ИНФОРМАТИКА

2009 **апрель-июнь** **№ 2**

ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

УДК 519.7

А.Д. Закревский

КАНОНИЧЕСКИЕ БУЛЕВЫ ФОРМУЛЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Рассматривается задача о принадлежности точки многоугольнику, заданному на плоскости последовательностью угловых точек. В основу метода ее решения положены получение множества ориентированных прямых, продолжающих отрезки границы многоугольника, и переход в пространство соответствующих предикатов типа «точка расположена левее прямой». Предлагается метод построения представляющей многоугольник канонической булевой формулы над введенными предикатами. Задача о принадлежности сводится к подстановке в формулу координат рассматриваемой точки в пространстве предикатов.

Постановка задачи

Алгебра логики может быть использована для описания объектов, расположенных на плоскости, и решения ряда геометрических задач [1]. К их числу принадлежит следующая задача, имеющая практические приложения [2]. На плоскости задан произвольный многоугольник и некоторая точка. Требуется выяснить, принадлежит ли она этому многоугольнику. Очевидно, что данная задача элементарна при визуальном представлении рассматриваемых объектов, но заметно труднее при более формальном описании многоугольника.

В настоящей статье предлагается универсальный метод решения задачи, пригодный как для односвязных, так и для многосвязных многоугольников.

Положим, что многоугольник задан своей *границей* – замкнутой непересекающейся ломаной линией, состоящей из отрезков прямых, а эта граница определена последовательностью *угловых точек* многоугольника, получаемых при обходе его по границе справа: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (рис. 1).

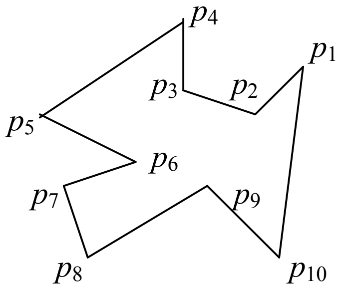


Рис. 1. Угловые точки многоугольника

Точка p_i задается парой декартовых координат (x_i, y_i). Пара соседних угловых точек ограничивает соответствующую сторону $\boldsymbol{s}_i$ многоугольника – один из отрезков $\boldsymbol{s}_1 = (p_1, p_2)$, $\boldsymbol{s}_2 = (p_2, p_3)$, …, $\boldsymbol{s}_n = (p_n, p_1)$. Каждому отрезку $\boldsymbol{s}_i$ соответствует *ориентированная прямая* $\boldsymbol{v}_i$, содержащая точки p_i и p_{i+1} и описываемая соответствующим линейным уравнением $a_i x + b_i y + c_i = 0$. Положим, что она ориентирована в направлении от p_i к p_{i+1}. В общем случае все отрезки независимы – никакие два отрезка не располагаются на одной прямой.

Рассмотрим некоторую произвольную точку плоскости p с координатами (q, r), а также соответствующую ей точку (x, r) ориентированной прямой $\boldsymbol{v}_i$. Будем считать, что точка p расположена *слева* от прямой $\boldsymbol{v}_i$, если и только если $y_{i+1} > y_i$ и $q \le x$ либо $y_{i+1} < y_i$ и $q \ge x$. Если же прямая $\boldsymbol{v}_i$ горизонтальна ($y_{i+1} = y_i$), то точке $p = (q, r)$ соответствует точка (q, y) прямой $\boldsymbol{v}_i$ и точка p расположена слева от прямой $\boldsymbol{v}_i$, если $x_{i+1} > x_i$ и $r \ge y$ либо $x_{i+1} < x_i$ и $r \le y$. Все четыре варианта показаны на рис. 2.

С целью упрощения последующих рассуждений будем обозначать отрезки ломаной буквами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, …, а полуплоскости, расположенные слева от соответствующих ориентированных прямых, – буквами A, B, C, … . Введем также *предикаты* a, b, c, … для описания положения некоторой точки p на плоскости, полагая, например, что $a(p) = 1$, если и только если $p \in A$.

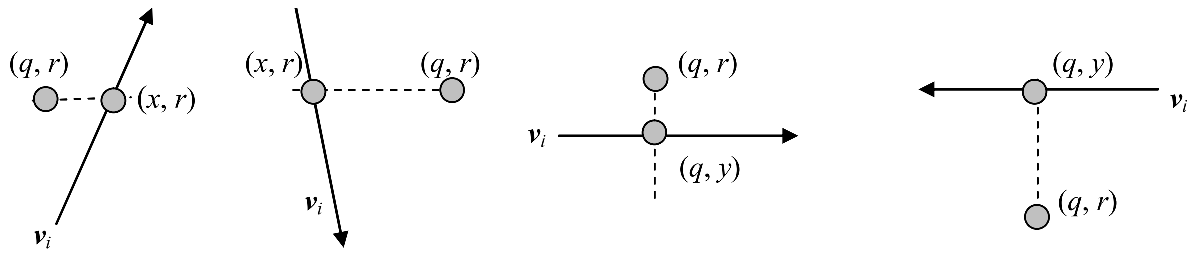


Рис. 2. Варианты ориентации точки относительно прямой

Заметим, что пространство введенных предикатных переменных существенно отличается от булева пространства n независимых переменных, содержащего 2^n элементов. Дело в том, что оно рассекается n прямыми не более чем на $n(n + 1) / 2 + 1$ участков, причем этот максимум достигается в случае, когда среди прямых нет параллельных и когда отсутствуют точки, в которых пересекаются более двух прямых. Например, шесть прямых рассекают плоскость на 22 участка (рис. 3).

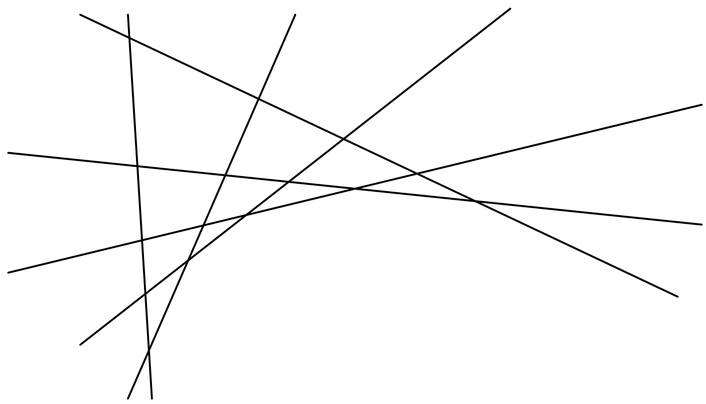


Рис. 3. Рассечение плоскости шестью прямыми

Рассматриваемая задача о принадлежности точки p многоугольнику сводится ниже к построению представляющей многоугольник булевой формулы F с введенными предикатными переменными. При подстановке предикатных координат точки p эта формула принимает значение 1 в случае, когда точка принадлежит многоугольнику, и значение 0 в противном случае.

В предлагаемом методе построения формулы F она оказывается *положительной* (не содержит символов отрицания) и *безызбыточной* – каждая из переменных $a, b, c, \dots$ входит в формулу только один раз.

Простые фрагменты границы многоугольника

Рассмотрим пару соседних отрезков $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, задающую некоторый угол многоугольника. Если этот угол меньше 180°, будем называть его *выпуклым*, в противном случае – *вогнутым*.

Соответствующая отрезкам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пара ориентированных прямых ограничивает участок плоскости, представленный формулой $A \cap B$ в первом случае и формулой $A \cup B$ во втором случае (рис. 4).

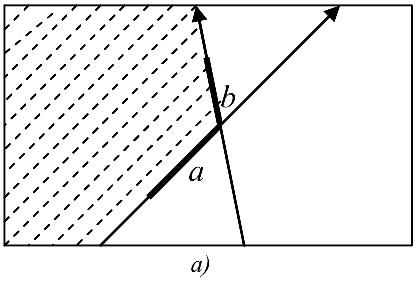


Рис. 4. Участки плоскости, ограниченные углами: *а)* выпуклым; *б)* вогнутым

Если все углы многоугольника оказываются выпуклыми, то и сам многоугольник называется *выпуклым* (рис. 5). В этом случае он представляется конъюнкцией предикатных переменных.

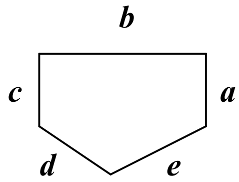


Рис. 5. Выпуклый многоугольник, $F = abcde$

В общем случае многоугольник может содержать как выпуклые, так и вогнутые углы. Серия следующих друг за другом выпуклых углов образует *простой выпуклый фрагмент* границы многоугольника, серия вогнутых углов – *простой вогнутый фрагмент*. Простой выпуклый фрагмент ограничивает участок плоскости, представляющий пересечение участков, которые ограничены отдельными прямыми (рис. 6, *а*). Аналогично, простой вогнутый фрагмент представляет объединение таких участков (рис. 6, *б*).

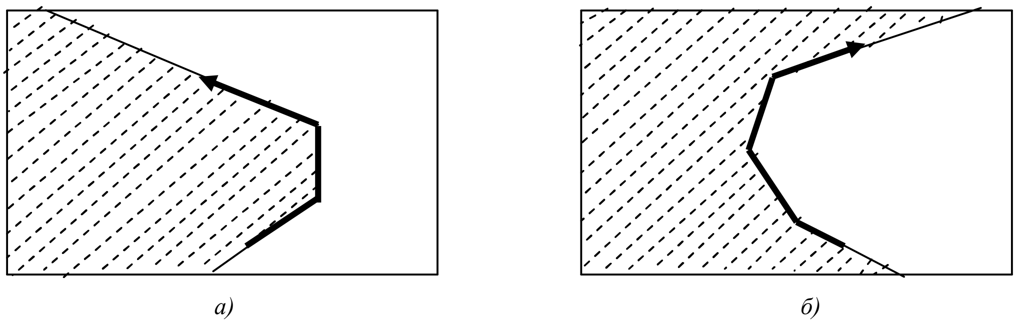


Рис. 6. Простые фрагменты границы многоугольника: *а)* выпуклый, *б)* вогнутый

Композиция двух простых фрагментов – выпуклого и вогнутого – образует границу многоугольника (рис. 7, *а*). Формулой этого многоугольника служит конъюнкция формул данных фрагментов – конъюнкции $abcde$ и дизъюнкции $f \vee g \vee h$.

Композициями большего числа простых фрагментов можно описывать и более сложные многоугольники. Один из них, описываемый конъюнкцией шести простых фрагментов, показан на рис. 7, *б*.

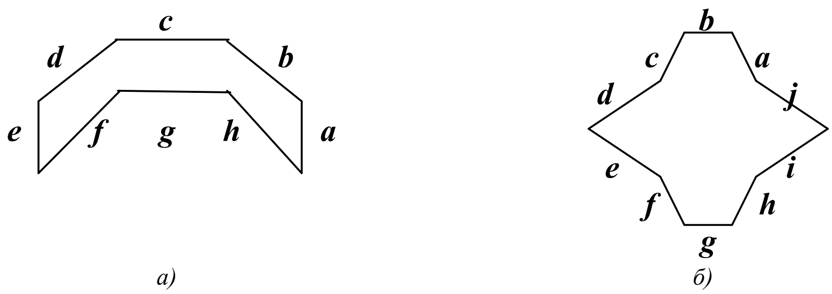


Рис. 7. Формулы многоугольников:
а) $F = abcde\,(f \vee g \vee h)$; *б)* $F = b\,(c \vee d)\,(e \vee f)\,g\,(h \vee i)\,(j \vee a)$

Стандартными операциями булевой алгебры полученные формулы многоугольников можно преобразовать в дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ), заменив, например, формулу $abcde\,(f \vee g \vee h)$ на $abcdef \vee abcdeg \vee abcdeh$. Последнюю можно интерпретировать как представление рассматриваемого многоугольника объединением трех соответствующих выпуклых многоугольников. Заметим, что ее можно упростить до $cdef \vee bcdg \vee abch$, хотя это и не эквивалентное преобразование в рамках булевой алгебры. Однако оно эквивалентно в пространстве предикатов, соответствующих отрезкам границы данного конкретного многоугольника.

Например, конъюнкции $abcdef$ и $cdef$ оказываются эквивалентными, поскольку они представляют один и тот же выпуклый многоугольник. Это хорошо видно на рис. 7, а формально следует из того, что отрезки ***a*** и ***b*** оказываются справа от прямой, задаваемой отрезком ***f***. Поэтому символы *a* и *b* удаляются из формулы данного многоугольника. Аналогично объясняется сокращение других двух конъюнкций.

Впрочем, переход к ДНФ в данном случае нецелесообразен, так как исходная формула проще – каждая предикатная переменная встречается в ней только один раз.

Описание многоугольника в дизъюнктивной нормальной форме

Булеву формулу любого многоугольника можно представить в ДНФ, соответствующей покрытию многоугольника выпуклыми компонентами. Получить их можно двумя способами.

Можно рассечь многоугольник на непересекающиеся выпуклые компоненты, введя для этого дополнительные отрезки, связывающие некоторые упорядоченные пары угловых точек, и соответствующие им предикаты. Однако при этом придется использовать в формуле операторы отрицания, поскольку каждый из введенных отрезков будет принадлежать границам двух соседних компонент.

Можно избежать введения дополнительных отрезков и использования операторов отрицания путем выявления *покрывающих* многоугольник выпуклых компонент, описываемых заданными предикатами.

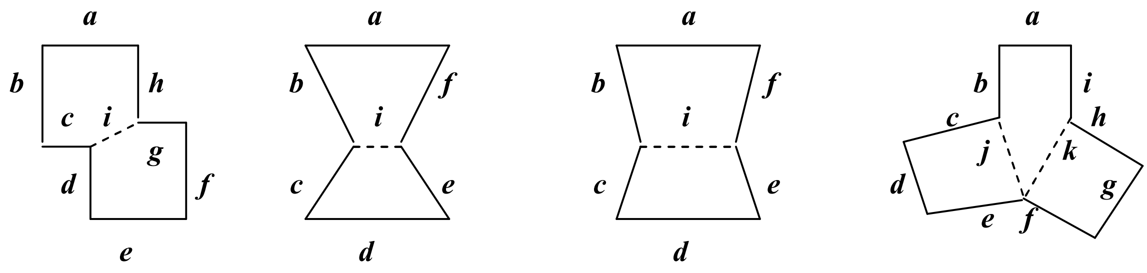
Для показанных на рис. 8 многоугольников по первому из этих методов можно получить формулы

а) F = $abcih \vee \bar{i}defg$; б) F = $abif \vee \bar{i}cde$; в) F = $abif \vee \bar{i}cde$; г) F = $abjki \vee \bar{j}cde \vee \bar{k}fgh$,

а по второму методу – формулы

а) F = $abch \vee defg$; б) F = $abf \vee cde$; в) F = $abdf \vee cdea$; г) F = $abei \vee cdegh \vee fghb$.

Видно, что недостатком первого метода является использование в формуле дополнительных переменных, а недостатком второго, проявляющимся на примерах (рис. 8, *в*, *г*), – повторение некоторых переменных в формуле.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 8. Покрытие многоугольников выпуклыми компонентами

Этих недостатков можно избежать, если не ограничиваться использованием ДНФ, а перейти к скобочным формулам, кратчайшим по числу символов переменных, хотя и представляющим более сложные композиции операций дизъюнкции и конъюнкции. Например, рассматривая границу многоугольника как композицию простых фрагментов, многоугольники на рис. 8, *в*, *г* можно описать соответственно формулами в) $F = a(b \vee c)\, d\, (e \vee f)$; г) $F = a(b \vee c)\, d\, (e \vee f)\, g\, (h \vee i)$,

представляющими собой конъюнкции формул этих простых фрагментов.

В следующем разделе предлагается эффективный метод построения формулы F для произвольного многоугольника. Ключевым в этом методе служит понятие *фрагмента границы* многоугольника, частным случаем которого является простой фрагмент. В общем случае фрагмент представляет собой связную часть границы, которая может содержать как выпуклые, так и вогнутые углы.

Любой фрагмент ограничивает часть плоскости, расположенную слева от ориентированной ломаной, которая получается путем замены крайних отрезков фрагмента лучами, продолжающими отрезки (рис. 9).

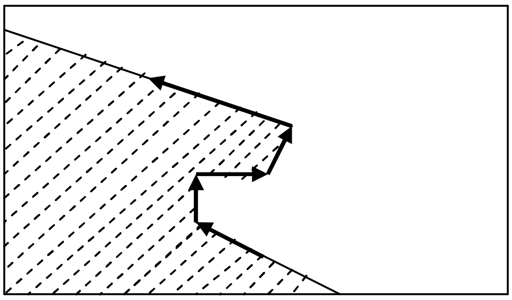


Рис. 9. Фрагмент и ограниченная им часть плоскости

Построение канонической булевой формулы, представляющей многоугольник

Назовем *канонической* булеву формулу многоугольника, удовлетворяющую следующим условиям:

– формула представляет собой произвольную композицию операций конъюнкции и дизъюнкции, заданную в скобочной форме;

– каждая предикатная переменная входит в формулу один раз;

– символы переменных следуют в формуле слева направо в том же порядке, в котором соответствующие им отрезки расположены в границе прямоугольника.

В данном разделе предлагается алгоритм нахождения канонических формул для любых многоугольников (рис. 10).

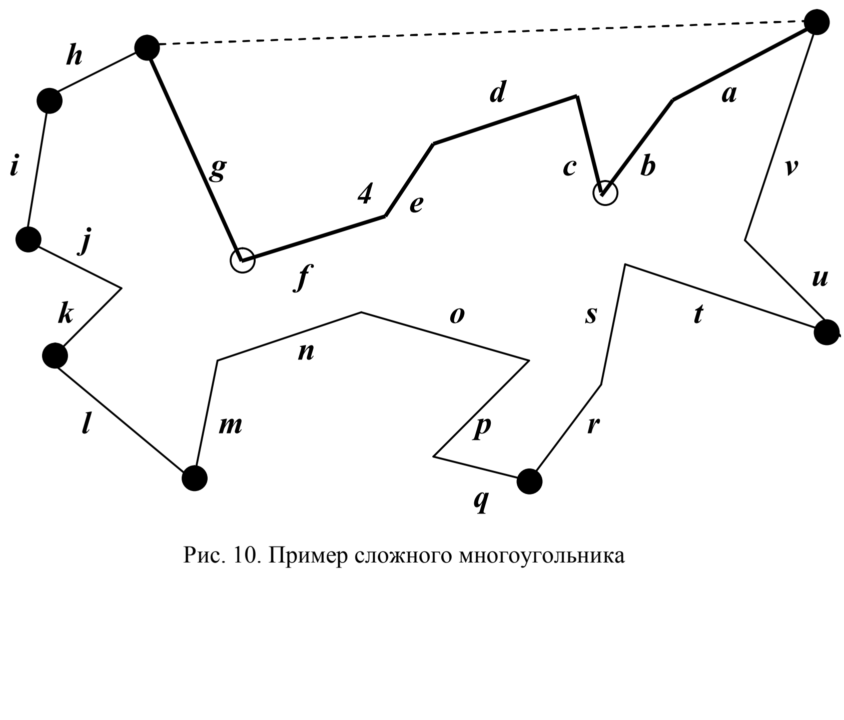


Рис. 10. Пример сложного многоугольника

1. В многоугольнике находятся все *крайние вершины* – такие точки его границы, расположенные на стыке двух отрезков, через которые можно провести прямые, не пересекающиеся ни с одним из остальных отрезков границы. На рис. 10 таких вершин восемь, и они отмечены жирными кружками. Среди крайних вершин выделим *начальную* – с максимальным значением координаты x, а если таких вершин несколько, то с максимальным среди них значением координаты y. На рисунке она расположена вверху справа и служит начальной точкой для последовательного обозначения отрезков, которые образуют границу многоугольника, представляемую последовательностью

$$\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p\,q\,r\,s\,t\,u\,v}.$$

2. Крайние вершины разбивают границу на фрагменты *первого ранга*, обозначаемые последовательностями образующих их отрезков. Так, граница делится на следующие восемь фрагментов:

$$\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g},\ \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j\,k},\ \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{m\,n\,o\,p\,q},\ \boldsymbol{r\,s\,t},\ \boldsymbol{u\,v}.$$

Получаемые фрагменты оказываются *вогнутыми*. Будем называть так фрагменты со следующим свойством: отрезок, соединяющий концевые точки фрагмента, проходит за пределами части плоскости, ограниченной фрагментом. На рис. 10 показан пунктиром такой отрезок для фрагмента $\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g}$. Заметим, что введенный выше простой вогнутый фрагмент является частным случаем вогнутого фрагмента, который может содержать как вогнутые, так и выпуклые углы.

Аналогично определяется *выпуклый* фрагмент: отрезок, соединяющий концевые точки выпуклого фрагмента, не выходит за пределы части плоскости, ограниченной фрагментом.

3. Будем строить искомую формулу F как *конъюнкцию* формул, описывающих фрагменты первого ранга:

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}(\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{h}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{i}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{j\,k}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{l}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{m\,n\,o\,p\,q}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{r\,s\,t}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{u\,v}).$$

При этом формула фрагмента, содержащего лишь один отрезок, представляется одним символом соответствующего предиката. В данном примере такими фрагментами оказываются три отрезка: $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{l}$. Получаем

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}(\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g}) \wedge h \wedge i \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{j\,k}) \wedge l \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{m\,n\,o\,p\,q}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{r\,s\,t}) \wedge \mathrm{F}(\boldsymbol{u\,v}).$$

4. Остальные фрагменты первого ранга рассекаются на фрагменты *второго ранга* следующей процедурой, иллюстрируемой на примере фрагмента $\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g}$:

– две концевые точки фрагмента соединяются условным отрезком (показанным на рис. 10 пунктирной линией), в результате чего получается многоугольник, называемый *замкнутым фрагментом*;

– в замкнутом фрагменте отыскиваются крайние вершины (к ним не относятся концевые точки). Они отмечены на рисунке простыми кружками и делят рассматриваемый фрагмент на фрагменты второго ранга $\boldsymbol{a\,b}$, $\boldsymbol{c\,d\,e\,f}$ и $\boldsymbol{g}$, которые оказываются *выпуклыми*. *Дизъюнкция* формул этих фрагментов представляет формулу фрагмента в целом:

$$\mathrm{F}(\boldsymbol{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g}) = \mathrm{F}(\boldsymbol{a\,b}) \vee \mathrm{F}(\boldsymbol{c\,d\,e\,f}) \vee \mathrm{F}(\boldsymbol{g}).$$

Аналогично делятся фрагменты первого ранга $\boldsymbol{j\,k}$, $\boldsymbol{m\,n\,o\,p\,q}$, $\boldsymbol{r\,s\,t}$ и $\boldsymbol{u\,v}$. В результате этого шага получаем

$$\mathrm{F} = (\mathrm{F}(\boldsymbol{a\,b}) \vee \mathrm{F}(\boldsymbol{c\,d\,e\,f}) \vee g)) \wedge h \wedge i \wedge (j \vee k) \wedge l \wedge (m \vee n \vee o \vee \mathrm{F}(\boldsymbol{p\,q}) \wedge (\mathrm{F}(\boldsymbol{r\,s}) \vee t) \wedge (u \vee v).$$

Полученные фрагменты второго ранга, содержащие более одного отрезка, разбиваются на фрагменты третьего ранга и т. д.

5. Эта итеративная процедура повторяется, пока все фрагменты не разобьются на отдельные отрезки. Полученные фрагменты нечетного ранга являются вогнутыми, а фрагменты четного ранга – выпуклыми. Каждый раз формула фрагмента нечетного ранга представляется

дизъюнкцией формул выпуклых фрагментов, получаемых при разбиении, а формула фрагмента четного ранга – *конъюнкцией* формул соответствующих вогнутых фрагментов.

Для рассматриваемого многоугольника получаем в конечном результате следующую каноническую булеву формулу:

$$\mathrm{F} = (ab \vee cd(e \vee f) \vee g)\ hi\ (j \vee k)\ l\ (m \vee n \vee o \vee pq)\ (rs \vee t)\ (u \vee v).$$

Простой алгоритм построения канонической формулы

Предложенный метод построения канонической формулы многоугольника F сводится к следующему простому формальному алгоритму, иллюстрируемому на том же примере:

1. Берем цепочку символов базисных предикатов, соответствующих отрезкам границы многоугольника:

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j\ k\ l\ m\ n\ o\ p\ q\ r\ s\ t\ u\ v.$$

2. Вставляем в нее операторы $\vee$ между символами, соответствующими соседним отрезкам границы, образующим вогнутый угол; в остальных местах будет подразумеваться оператор $\wedge$:

$$a\ b \vee c\ d\ e \vee f \vee g\ h\ i\ j \vee k\ l\ m \vee n \vee o \vee p\ q\ r\ s \vee t\ u \vee v.$$

3. Применяя описанный в предыдущем разделе способ последовательного разложения границы многоугольника на фрагменты, вводим в цепочку соответствующие пары скобок и получаем искомую формулу:

$$\to\ (a\ b \vee c\ d\ e \vee f \vee g)\ h\ i\ (j \vee k)\ l\ (m \vee n \vee o \vee p\ q)\ (r\ s \vee t)\ (u \vee v) \to$$

$$\to\ (a\ b \vee (c\ d\ e \vee f) \vee g)\ h\ i\ (j \vee k)\ l\ (m \vee n \vee o \vee p\ q)\ (r\ s \vee t)\ (u \vee v) \to$$

$$\to\ (a\ b \vee\ c\ d\ (e \vee f) \vee g)\ h\ i\ (j \vee k)\ l\ (m \vee n \vee o \vee p\ q)\ (r\ s \vee t)\ (u \vee v) = \mathrm{F}.$$

Заметим, что при этом отбрасываются скобки, окаймляющие конъюнкции.

Получение формул для нестандартных многоугольников

Предложенный метод решения задачи о принадлежности точки многоугольнику достаточно универсален. Например, его можно применить к многоугольнику, в котором имеются некоторые «пустоты» (рис. 11). В этом случае обход многоугольника по внешней границе дополняется обходом по внутренней границе. Требуется лишь соблюдать следующее правило: проходимые при обходе отрезки границы ориентируются так, чтобы ближние к отрезку точки многоугольника оставались слева.

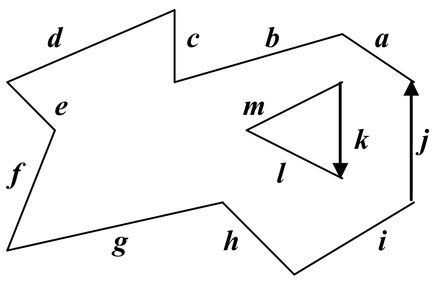


Рис. 11. Многоугольник с «пустотой». $\mathrm{F} = a\ (b \vee c)\ d\ (e \vee f)\ (g \vee h)\ ij\ (k \vee l \vee m)$

Представляет интерес также рассмотрение многоугольников, в которых некоторые отрезки границы расположены на одной прямой, и, следовательно, им соответствует одна и та же предикатная переменная. Например, на одной прямой находятся отрезки ***c*** и ***g*** (рис. 12, *а*). Ей можно поставить в соответствие любую из предикатных переменных *c* или *g*, выбираем *c*. Аналогично находятся предикатные переменные *a*, *d* и *f* для трех других прямых, в результате чего число переменных в формуле многоугольника сокращается до восьми. Многоугольник удобно рассмотреть как объединение двух прямоугольников и выразить формулу F как дизъюнкцию соответствующих формул *abch* и *defk*.

Формулу для многоугольника, показанного на рисунке 12, *б*, можно получить с помощью изложенного выше стандартного метода, предварительно сократив число предикатных переменных до пяти посредством удаления переменных h, e, j, g и i (поскольку $h = a$, $e = b$, $j = c$, $g = d$ и $i = f$). Тогда многоугольник будет представлен формулой

$$F = (a \vee c)\ (b \vee c)\ (b \vee d)\ (d \vee f)\ (a \vee f).$$

Однако можно представить этот же многоугольник как объединение треугольника *cdf*, ограниченного отрезками ***c***, ***d***, ***i***, ***j***, с четырехугольником $ab\ (d \vee f)$, граница которого содержит остальные отрезки, выразив результат компактной формулой

$$F = cdf \vee ab\ (d \vee f).$$

Многоугольник, показанный на рис. 12, *в*, можно рассмотреть как объединение двух четырехугольников и соответственно представить его формулой $F = abij \vee cdkl$.

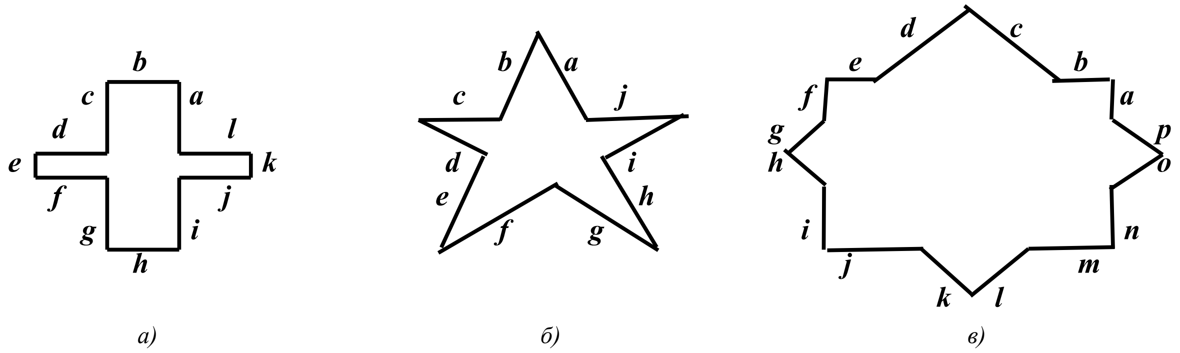


Рис. 12. Многоугольники с отрезками на одной прямой:
а) F = abch ∨ defk; *б)* F = cdf ∨ ab (d ∨ f); *в)* F = abij ∨ cdkl

Заключение

Предлагаемый в данной статье метод обеспечивает быстрое получение компактной булевой формулы, которая описывает многоугольник произвольного вида (в том числе многосвязный) в терминах предикатных переменных, соответствующих отрезкам границы многоугольника. Решение задачи о принадлежности точки многоугольнику сводится к вычислению значения этой формулы для координат точки в пространстве предикатных переменных.

Список литературы

1. Рвачев, В.Л. Геометрические приложения алгебры логики / В.Л. Рвачев. – Киев : Техника, 1967.

2. Поттосин, Ю.В. Использование булевых функций для представления многоугольников / Ю.В. Поттосин, Е.А. Шестаков // Вестник Томского гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 2 (3). – С. 106–115.

Поступила 09.02.09

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: Zakrevskij@tut.by

A.D. Zakrevskij

CANONICAL BOOLEAN FORMULAS OF POLYGONS

The task of checking a point belonging to a polygon defined on the plane by a sequence of angular points is considered. The following operation is laid in the basis of suggested method of solution: obtaining the set of oriented straight lines prolonging segments of the boundary of the polygon and transition to the space of appropriate predicates such as «the point is located more to the left of the straight line». The method of constructing an irredundant positive Boolean formula of predicates is suggested for the polygon representation. The task is reduced to substitution into the formula of coordinates of the considered point in the space of predicates.