ИНФОРМАТИКА

2009 апрель-июнь № 2

УДК 551.509

В.С. Муха

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Вводится понятие эффективности экстраполирования векторной случайной последовательности. Дается выражение для ее расчета. Выполняется анализ эффективности экстраполирования марковской векторной стационарной случайной последовательности.

Введение

Несмотря на длительную историю развития, задача экстраполирования (прогнозирования) случайных последовательностей продолжает интересовать исследователей. Впервые данная задача была сформулирована А.Н. Колмогоровым в работе [1]. В этой работе рассматривалась скалярная стационарная случайная последовательность $x(t)$ при целых t $(-\infty < t < +\infty)$ с нулевым средним значением и ковариационной функцией $B(k) = E(x(t+k)x(t))$, где E – символ математического ожидания. Задача линейного экстраполирования этой последовательности заключается в подборе при заданных $s > 0$ и $m > 0$ таких действительных коэффициентов a_i, при которых линейная комбинация

$$L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + ... + a_s x(t-s)$$

случайных величин

$$x(t-1), x(t-2), ..., x(t-s)$$

доставляет возможно более точное приближение к случайной величине $x(t+m)$. За меру точности такого приближения принимается математическое ожидание

$$\sigma^2 = E(x(t+m) - L)^2 .$$

Минимальное значение σ^2 обозначается $\sigma_E^2(s,m)$ и определяется предел

$$\sigma_E^2(m) = \lim_{s\to\infty} \sigma_E^2(s,m) . \qquad (1)$$

Относительно $\sigma_E^2(m)$ в [1] доказана следующая

Теорема. *Пусть*

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \log w(\lambda) d\lambda ,$$

где $w(\lambda) = B(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} B(k)\cos k\lambda$, $-\pi \le \lambda \le \pi$, *– спектральная плотность последовательности* $x(t)$. *Если* $I = -\infty$, *то* $\sigma_E^2(m) = 0$ *для всех* $m \ge 0$. *Если же интеграл* I *конечен, то*

$$\sigma_E^2(m) = e^I (1 + r_1^2 + r_2^2 + ... + r_m^2),$$

где r_i *определяются из соотношений*

$$e^{a_1\xi + a_2\xi^2 + ...} = 1 + r_1\xi + r_2\xi^2 + ...,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos k\lambda \log w(\lambda) d\lambda . \qquad (2)$$

Аналитическое исследование функции $\sigma_E^2(m)$ с помощью этой теоремы для конкретных случайных последовательностей (для конкретных спектральных плотностей $w(\lambda)$) представляется трудноосуществимым, так как следует ожидать, что интеграл (2) не будет выражаться в элементарных функциях. Численные расчеты потребуют привлечения методов численного интегрирования. Определенные неудобства вносит необходимость использования в качестве исходных данных спектральной плотности последовательности $w(\lambda)$, которая, как правило, неизвестна, а ее оценки не являются достаточно хорошими [2]. Отметим, что функция $\sigma_E^2(m)$ представляет собой дисперсию ошибки экстраполирования относительно истинной последовательности для момента времени m при бесконечном времени наблюдения последовательности. Практический интерес представляет исследование не $\sigma_E^2(m)$, а функции двух переменных $\sigma_E^2(s,m)$, что позволит рациональным образом выбирать конечное число наблюдаемых отсчетов s. Постановка задачи в работе [1] привлекательна не только для исследования точности прогнозирования, но и для разработки алгоритма прогнозирования. Однако такой алгоритм в [1], к сожалению, не представлен. В настоящее время возникает потребность в прогнозировании не только скалярных, но и векторных случайных последовательностей и, как следствие, в разработке алгоритмов их прогнозирования и исследовании точности прогнозирования.

В работах [3, 4] разработан алгоритм экстраполирования (прогнозирования) векторной случайной последовательности, базирующийся на ковариационной функции последовательности. Этот алгоритм был использован для статистического прогнозирования векторного метеорологического процесса, составляющими которого являются температура воздуха, атмосферное давление, относительная влажность воздуха, направление и скорость ветра. Практический интерес представляют характеристики точности такого прогнозирования. В настоящей статье вводится понятие эффективности экстраполирования векторной стационарной случайной последовательности и выполняется ее анализ для векторной марковской случайной последовательности.

1. Экстраполирование векторной случайной последовательности

Задача экстраполирования векторной случайной последовательности заключается в том, чтобы по наблюдению участка реализации этой последовательности получить оценку другого участка реализации, относящегося к будущему промежутку времени. В работах [3, 4] наблюдаемая часть векторной случайной последовательности $\gamma(t) = (\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))$, где $t = 0, T, 2T, ...$, T – интервал дискретности, рассматривается как двухмерная ($n \times s$)-матрица ξ:

$$\xi = (\xi_{i_1,i_2}) = (\gamma_{i_1}(t_{i_2})),\ i_1 = \overline{1,n},\ \ i_2 = \overline{1,s},$$

а прогнозируемая часть – как двухмерная ($n \times (k_2 - k_1 + 1)$)-матрица η:

$$\eta = (\eta_{i_1,i_2}) = (\gamma_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})),\ i_1 = \overline{1,n},\ i_2 = \overline{1, k_2 - k_1 + 1},\ 1 \le k_1 \le k_2,$$

где s – число отсчетов наблюдаемой части реализации; k_1, k_2 – минимальное и максимальное число отсчетов экстраполируемой части реализации соответственно (минимальная и максимальная заблаговременность прогноза), $t_i = iT$. Экстраполирование векторной случайной последовательности $\gamma(t)$ рассматривается как задача оценивания случайной матрицы η по наблюдению случайной матрицы ξ. Отыскивается оценка $\hat{y}$ матрицы η, доставляющая минимум критерию

$$r = E(\ {}^{0,2}(\hat{y}-\eta)^2) = E(\|\hat{y}-\eta\|_E^2), \tag{3}$$

где ${}^{0,2}(\hat{y}-\eta)^2$ – $(0,2)$-свернутый квадрат матрицы $(\hat{y}-\eta)$ [5, 6]; $\|\hat{y}-\eta\|_E^2$ – квадрат евклидовой нормы матрицы $(\hat{y}-\eta)$ (см. приложение). Решение данной задачи для гауссовской случайной последовательности определяется как апостериорное среднее $\hat{y} = E(\eta / x)$ матрицы η:

$$\hat{y} = A_{\eta/\xi} = A_\eta +\ {}^{0,2}({}^{0,2}(R_{\eta,\xi} D_\xi^{-1})(x - A_\xi)), \tag{4}$$

и апостериорная дисперсионная матрица $D_{\eta/\xi} = E(\overset{\circ}{\eta}\overset{\circ}{\eta}/ x)$ матрицы η находится из выражения

$$D_{\eta/\xi} = D_\eta -\ {}^{0,2}({}^{0,2}(R_{\eta,\xi} D_\xi^{-1})R_{\xi,\eta}), \tag{5}$$

где $A_\xi = E(\xi), A_\eta = E(\eta), D_\xi = E(\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\xi}), D_\eta = E(\overset{\circ}{\eta}\overset{\circ}{\eta}), R_{\xi,\eta} = E(\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\eta}), R_{\eta,\xi} = (R_{\xi,\eta})^{B_{4,2}}$ [6], $\overset{\circ}{\xi} = \xi - A_\xi$, $\overset{\circ}{\eta} = \eta - A_\eta$, x – наблюдение матрицы ξ [3, 4].

Из работы [7] следует, что линейный алгоритм (предиктор) (4) является оптимальным в смысле критерия (3) также для матриц ξ и η с произвольными распределениями.

Если известны математическое ожидание $A_\gamma(t) = (a_{\gamma,i}(t)) = (E(\gamma_i(t)))$ и ковариационная функция $R_\gamma(t,u) = (r_{\gamma,i,j}(t,u)) = (E(\overset{\circ}{\gamma}_i(t)\overset{\circ}{\gamma}_j(u)))$ векторной случайной последовательности $\gamma(t)$, то матрицы в выражениях (4), (5) могут быть получены по следующим развернутым формулам [3, 4]:

$$A_\xi = (E(\xi_{i_1,i_2})) = (a_{\xi,i_1,i_2}) = (E(\gamma_{i_1}(t_{i_2}))) = (a_{\gamma,i_1}(t_{i_2})),\ i_1 = \overline{1,n},\ i_2 = \overline{1,s};$$

$$A_\eta = (E(\eta_{i_1,i_2})) = (a_{\eta,i_1,i_2}) = (E(\gamma_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1}))) = (a_{\gamma,i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})),\ i_1 = \overline{1,n},\ i_2 = \overline{1,k_2-k_1+1};$$

$$D_\xi = (E(\overset{\circ}{\xi}_{i_1,i_2}\overset{\circ}{\xi}_{i_3,i_4})) = (r_{\xi,i_1,i_2,i_3,i_4}) = (E(\overset{\circ}{\gamma}_{i_1}(t_{i_2})\overset{\circ}{\gamma}_{i_3}(u_{i_4})) = (r_{\gamma,i_1,i_3}(t_{i_2},u_{i_4})),\ i_1,i_3 = \overline{1,n},\ i_2,i_4 = \overline{1,s};$$

$$D_\eta = (E(\overset{\circ}{\eta}_{i_1,i_2+s+k_1-1}\overset{\circ}{\eta}_{i_3,i_4+s+k_1-1})) = (r_{\eta,i_1,i_2,i_3,i_4}) =$$
$$= (E(\overset{\circ}{\gamma}_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})\overset{\circ}{\gamma}_{i_3}(u_{i_4+s+k_1-1}))) = (r_{\gamma,i_1,i_3}(t_{i_2+s+k_1-1},u_{i_4+s+k_1-1})),\ i_1,i_3 = \overline{1,n},\ i_2,i_4 = \overline{1,k_2-k_1+1};$$

$$R_{\xi,\eta} = (E(\overset{\circ}{\xi}_{i_1,i_2}\overset{\circ}{\eta}_{i_3,i_4+s+k_1-1})) = (r_{\xi,\eta,i_1,i_2,i_3,i_4}) =$$
$$= (E(\overset{\circ}{\gamma}_{i_1}(t_{i_2})\overset{\circ}{\gamma}_{i_3}(u_{i_4+s+k_1-1}))) = (r_{\gamma,i_1,i_3}(t_{i_2},u_{i_4+s+k_1-1})),\ i_1,i_3 = \overline{1,n},\ i_2 = \overline{1,s},\ i_4 = \overline{1,k_2-k_1+1}.$$

Матрицы $A_{\eta/\xi}$, $R_{\eta/\xi}$ при этом определяются выражениями

$$A_{\eta/\xi}=(E(\eta_{i_1,i_2}/x))=(a_{\eta/\xi,i_1,i_2})=(E(\gamma_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})/x)),\ i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,k_2-k_1+1};$$

$$D_{\eta/\xi}=(E(\overset{\circ}{\eta}_{i_1,i_2+s+k_1-1}\overset{\circ}{\eta}_{i_3,i_4+s+k_1-1}/x))=(r_{\eta/\xi,i_1,i_2,i_3,i_4})=$$
$$=(E(\overset{\circ}{\gamma}_{i_1}(t_{i_2+s+k_1-1})\overset{\circ}{\gamma}_{i_3}(u_{i_4+s+k_1-1})/x)),\ i_1,i_3=\overline{1,n},\ i_2,i_4=\overline{1,k_2-k_1+1}. \tag{6}$$

Для стационарной случайной последовательности $\gamma(t)$ имеем $A_\gamma(t)=(a_{\gamma,i})$, $R_\gamma(t,u)=R_\gamma(t-u)=R_\gamma(u-t)$, и предыдущие формулы принимают следующий вид:

$$A_\xi=(a_{\xi,i_1,i_2})=(a_{\gamma,i_1}),\ i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,s};$$

$$A_\eta=(a_{\eta,i_1,i_2})=(a_{\gamma,i_1}),\ i_1=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,k_2-k_1+1};$$

$$D_\xi=(r_{\xi,i_1,i_2,i_3,i_4})=(r_{\gamma,i_1,i_3}(t_{i_2}-u_{i_4})),\ i_1,i_3=\overline{1,n},\ i_2,i_4=\overline{1,s};$$

$$D_\eta=(r_{\eta,i_1,i_2,i_3,i_4})=(r_{\gamma,i_1,i_3}(t_{i_2+s+k_1-1}-u_{i_4+s+k_1-1})),\ i_1,i_3=\overline{1,n},\ i_2,i_4=\overline{1,k_2-k_1+1};$$

$$R_{\xi,\eta}=(r_{\xi,\eta,i_1,i_2,i_3,i_4})=(r_{\gamma,i_1,i_3}(t_{i_2}-u_{i_4+s+k_1-1})),\ i_1,i_3=\overline{1,n},\ i_2=\overline{1,s},\ i_4=\overline{1,k_2-k_1+1}.$$

2. Характеристики точности экстраполирования векторной случайной последовательности

Отметим, что апостериорная дисперсионная матрица $D_{\eta/\xi}$ (5), (6) представляет собой ковариационную матрицу прогноза относительно истинной случайной последовательности и характеризует точность экстраполирования. Минимальное значение критерия (3) определяется как след этой матрицы (см. приложение):

$$r_{\min}=\operatorname{tr}D_{\eta/\xi}=\sum_{i_1,i_2}d_{\eta/\xi,i_1,i_2,i_1,i_2}.$$

Введем в выражении (5) матрицу

$$D_d={}^{0,2}({}^{0,2}(R_{\eta,\xi}\,D_\xi^{-1})R_{\xi,\eta})=(d_{d,i_1,i_2,i_3,i_4}),\ i_1,i_3=\overline{1,n},\ i_2,i_4=\overline{1,k_2-k_1+1},$$

которая представляет собой ковариационную матрицу прогноза относительно среднего значения последовательности. Матрица D_η в выражении (5) представляет собой априорную ковариационную матрицу случайной последовательности относительно ее среднего значения. С учетом этого вместо (5) получим

$$D_{\eta/\xi}(s,k_1,k_2)=D_\eta(s,k_1,k_2)-D_d(s,k_1,k_2), \tag{7}$$

где матрицы представлены зависящими от чисел s, k_1, k_2. Напомним, что выражения (5), (7) относятся к экстраполированию по s отсчетам на определенный период времени от k_1 до k_2 отсчетов вперед. Полагая в (7) $k_1=k_2=m$, получим как частный случай соотношение для экстраполирования по s отсчетам на один m-й отсчет вперед:

$$D_{\eta/\xi}(s,m) = D_\eta(s,m) - D_d(s,m) \geq 0\,, \tag{8}$$

где $D_{\eta/\xi}(s,m) = (d_{\eta/\xi,i_1,i_3})$, $D_\eta(s,m) = (r_{\eta,i_1,i_3})$, $D_d(s,m) = (d_{d,i_1,i_3})$, $i_1, i_3 = \overline{1,n}$, – двухмерные $(n \times n)$-матрицы и ≥ 0 означает неотрицательную определенность. Эти матрицы определяются как сечения четырехмерных матриц в (7):

$$D_{\eta/\xi}(s,m) = (d_{\eta/\xi,i_1,m-k_1+1,i_3,m-k_1+1}),\ D_\eta(s,m) = (r_{\eta,i_1,m-k_1+1,i_3,m-k_1+1});$$
$$D_d(s,m) = (d_{d,i_1,m-k_1+1,i_3,m-k_1+1}),\ i_1, i_3 = \overline{1,n},\ m = \overline{k_1,k_2}\,.$$

Из выражения (8) видно, во-первых, что апостериорная дисперсионная матрица $D_{\eta/\xi}(s,m)$ не превышает априорную дисперсионную матрицу $D_\eta(s,m)$ (в смысле сравнения соответствующих квадратичных форм). Априорная дисперсионная матрица является предельной для апостериорной, т. е. если $D_d(s,m) \to 0$, то $D_{\eta/\xi}(s,m) \to D_\eta(s,m)$. Из теории статистических решений известно, что этот предельный случай имеет место, если решение принимается без наблюдений. В таком случае оптимальным прогнозом является априорное среднее A_η. Во-вторых, если $D_d(s,m) \to D_\eta(s,m)$, то $D_{\eta/\xi}(s,m) \to 0$ и прогноз приближается к абсолютно точному. В связи с этим представляет интерес исследование зависимости $D_{\eta/\xi}(s,m)$ от s и m. Это можно сделать численно, выполнив расчеты по формуле (5) при различных s, k_1, k_2 и выбирая сечения полученных четырехмерных матриц для всех $m = \overline{k_1,k_2}$.

Матрица $D_{\eta/\xi}(s,m)$ позволяет получить доверительные вероятности для прогнозируемых последовательностей. Если в первом приближении отклонение прогноза от действительного значения последовательности считать распределенным по нормальному закону $\varphi(x) = N(0, \sigma^2_{E,i}(s,m))$, где $\sigma^2_{E,i}(s,m) = d_{\eta/\xi,i,m,i,m}$ – апостериорная дисперсия прогноза компоненты $i = \overline{1,n}$ на m-й отсчет вперед, то доверительную вероятность (оправдываемость) прогноза компоненты $i = \overline{1,n}$ на m-й отсчет вперед можно рассчитать по формуле

$$p_i(s,m) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)dx = 2\int_0^{\varepsilon} \varphi(x)dx\,,\ i = \overline{1,n}\,,\ m = \overline{k_1,k_2}\,,$$

где ε – величина допустимого отклонения прогноза от действительного значения. При ручных расчетах следует пользоваться формулой

$$p_i(s,m) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^2_{E,i}(s,m)}\right),\ i = \overline{1,n}\,,\ m = \overline{k_1,k_2}\,,$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ – известная функция Лапласа.

Отметим, что $\sigma^2_{E,i}(s,m)$ есть допредельная функция в (1), введенная А.Н. Колмогоровым для скалярной случайной последовательности.

Соотношение (8) позволяет ввести такую характеристику, как эффективность экстраполирования. Так как матрица $D_\eta^{-1}(s,m)$ неотрицательно определенная, то после умножения левой части (8) на матрицу $D_\eta^{-1}(s,m)$ получим также неотрицательно определенную матрицу [9], т. е.

$$I - D_\eta^{-1}(s,m)D_d(s,m) \geq 0$$

или

$$I \geq D_\eta^{-1}(s,m)D_d(s,m), \tag{9}$$

где I – $(n \times n)$-единичная матрица. Из отношения порядка (9) следует [8], что

$$\det I \geq \det D_\eta^{-1}(s,m)\det D_d(s,m). \tag{10}$$

Обозначим

$$e(s,m) = \det D_\eta^{-1}(s,m)\det D_d(s,m) \tag{11}$$

и назовем эффективностью экстраполирования векторной случайной последовательности $\gamma(t)$ по наблюдениям s отсчетов на m-й отсчет вперед (эффективностью прогноза типа s/mT). Из (10) с учетом $\det I = 1$ получаем соотношение для эффективности:

$$0 \leq e(s,m) \leq 1.$$

3. Эффективность экстраполирования векторной марковской стационарной случайной последовательности

Рассмотрим пример исследования эффективности экстраполирования векторной стационарной случайной последовательности $\gamma(iT) = (\gamma_1(iT),...,\gamma_n(iT))$, $i = 0,1,...$, порождаемой уравнением состояния

$$\gamma(t+T) = F\gamma(t) + \varepsilon(t), \tag{12}$$

$$E(\varepsilon(t)) = 0,\ D_\varepsilon = E(\varepsilon^2(t)),\ t = 0, T, 2T,...,$$

где $\varepsilon(t)$ – последовательность независимых в совокупности по t случайных векторов. Как известно, если все собственные числа матрицы F меньше единицы, то такая последовательность при $t \to \infty$ имеет ковариационную функцию вида

$$B(k\mathrm{T}) = E(\gamma(iT)\gamma(iT+kT)) = \begin{cases} F^k D_\gamma,\ k > 0; \\ D_\gamma (F^T)^{-k},\ k \leq 0, \end{cases} \tag{13}$$

где $D_\gamma = E(\gamma^2(iT))$ – дисперсионная матрица последовательности, определяемая уравнением

$$D_\gamma = FD_\gamma F^T + D_\varepsilon. \tag{14}$$

Для расчетов использовались следующие значения параметров: число компонент последовательности $n = 2$, переходная матрица F уравнения состояния (12) и дисперсионная матрица возмущающего воздействия $\varepsilon(t)$ в уравнении (12) соответственно

$$F = \begin{pmatrix} 0,9333 & -0,0311 \\ 0 & 0,8710 \end{pmatrix}, \; D_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае из уравнения (14) получаем

$$D_\gamma = \begin{pmatrix} 16,4043 & -1,8010 \\ -1,8010 & 12,4264 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 изображены корреляционные функции компонент данной последовательности и их взаимная корреляционная функция. Горизонтальная прямая на уровне $0,1$ определяет время корреляции для каждой компоненты и время взаимной корреляции. Для первой компоненты оно равно примерно $70\,T$, для второй – примерно $35\,T$, а время взаимной корреляции составляет около $45\,T$. Графики эффективности $e(s,m)$ прогнозирования данной последовательности (12) для прогнозов $1/40\,T$ и $10/40\,T$ совпадают (рис. 2), что понятно, поскольку марковская случайная последовательность (12) прогнозируется только по одному текущему наблюдению. Эффективность прогноза с ростом заблаговременности прогноза m достаточно быстро убывает до нуля. Если эффективность с уровнем $\le 0,1$ считать незначительной, то данную случайную последовательность можно с убывающей эффективностью прогнозировать на время, не превышающее $35\,T$.

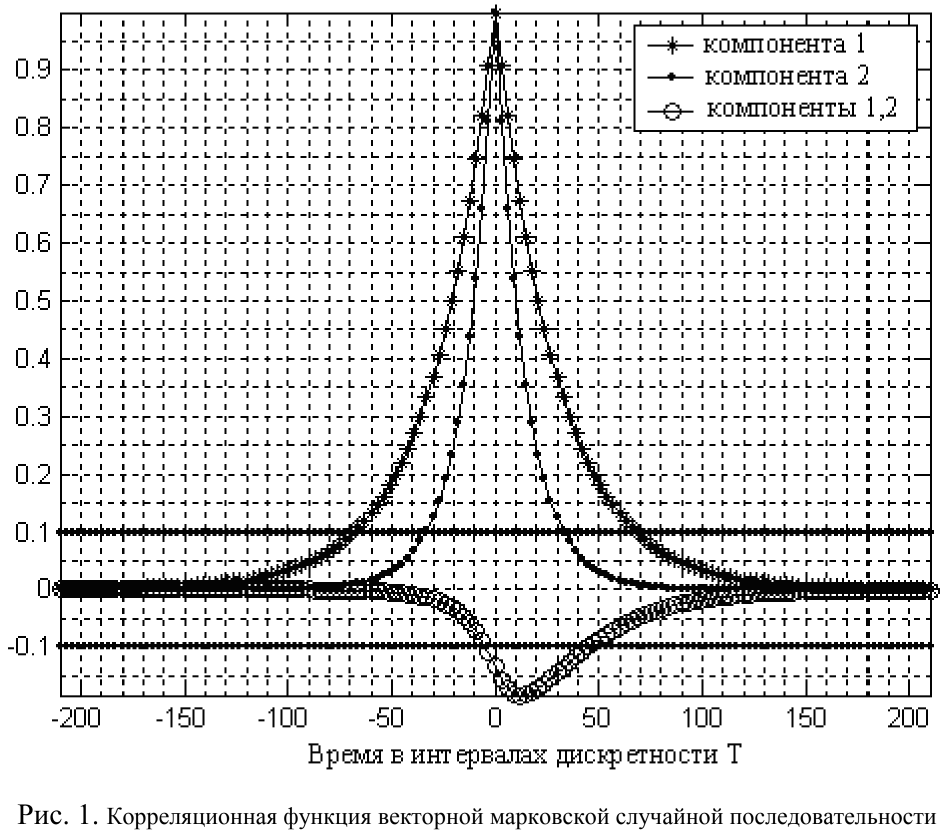

Рис. 1. Корреляционная функция векторной марковской случайной последовательности

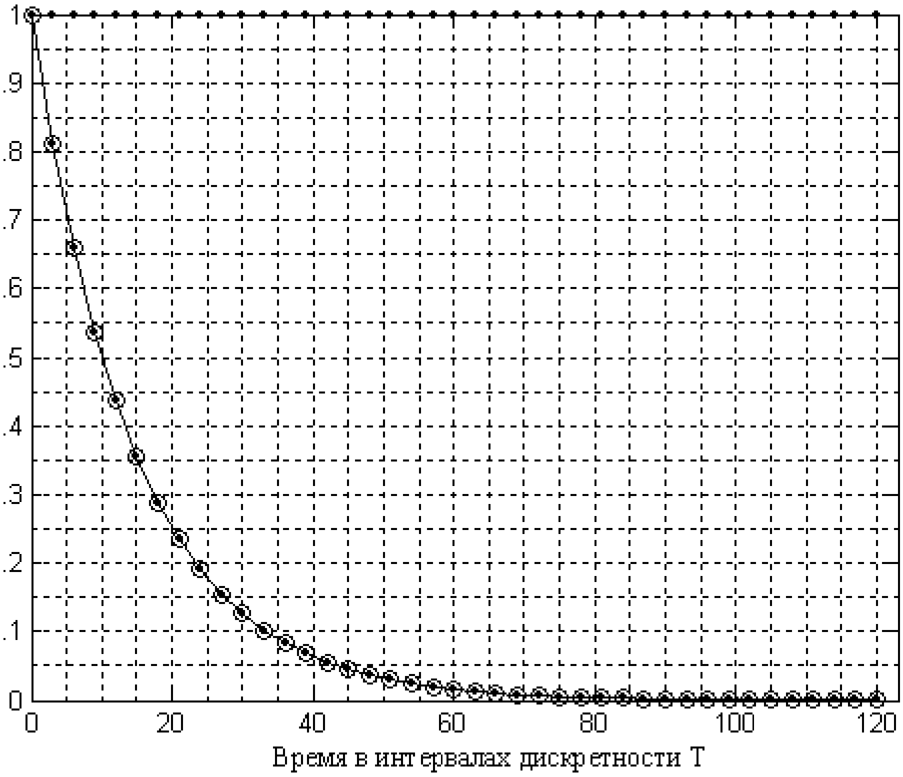

Рис. 2. Эффективность экстраполирования векторной марковской случайной последовательности

Приложение. Пусть $A=(a_{i,j})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, – действительная $(m\times n)$-матрица. Евклидова норма матрицы A определяется формулой

$$\|A\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2}\,,$$

причем справедливо равенство [8]

$$\|A\|_E^2=\operatorname{tr}(A^T A),$$

где tr означает след матрицы. Обобщим эти понятия на многомерные матрицы.

Утверждение 1. *Если $C=(c_{i,j})$, $i=(i_1,i_2,...,i_q)$, $j=(j_1,j_2,...,j_s)$, – действительная $(q+s)$-мерная матрица, то выполняются равенства*

$$\|C\|_E^2=\operatorname{tr}\,{}^{0,q}(C^{B_q}C)=\operatorname{tr}\,{}^{0,s}(CC^{B_s})={}^{0,(q+s)}C^2=\operatorname{tr}\,{}^{0,0}C^2\,, \tag{15}$$

где B_q, B_s – подстановки транспонирования типа «вперед» на q и s индексов соответственно; $\|C\|_E=\sqrt{\sum_{i,j}c_{i,j}^2}$ – евклидова норма матрицы C; tr – след многомерной матрицы.

Следом $(2q+2s)$-мерной матрицы $V=(v_{i,j,k,l})$, $i=(i_1,i_2,...,i_q)$, $j=(j_1,j_2,...,j_s)$, $k=(k_1,k_2,...,k_q)$, $l=(l_1,l_2,...,l_s)$, при условии, что индексы мультииндексов i и k, а также j и l пробегают одни и те же (свои для каждой пары) значения, будем называть скалярную величину вида

$$\operatorname{tr} V = \sum_{i,j} v_{i,j,i,j} \ .$$

Равенства (15) доказываются с помощью следующих преобразований:

$$Z = {}^{0,q}(\tilde{N}^{B_q}\tilde{N}) = (\sum_{\nu} \tilde{n}^{B_q}_{i,\nu}\tilde{n}_{\nu,j}) = (z_{i,j}) = (\sum_{\nu} \tilde{n}_{\nu,i}\tilde{n}_{\nu,j});$$

$$\operatorname{tr}{}^{0,q}(\tilde{N}^{B_q}\tilde{N}) = \operatorname{tr} Z = \sum_{i} z_{i,i} = \sum_{i}\sum_{\nu} \tilde{n}_{\nu,i}\tilde{n}_{\nu,i} = \sum_{i,\nu} \tilde{n}^2_{\nu,i} = \|\tilde{N}\|^2_E;$$

$$M = {}^{0,s}(\tilde{N}\tilde{N}^{B_s}) = (\sum_{\nu} \tilde{n}_{i,\nu}\tilde{n}^{B_s}_{\nu,j}) = (m_{i,j}) = (\sum_{\nu} \tilde{n}_{i,\nu}\tilde{n}_{j,\nu});$$

$$\operatorname{tr}{}^{0,s}(\tilde{N}\tilde{N}^{B_s}) = \operatorname{tr} M = \sum_{i} m_{i,i} = \sum_{i}\sum_{\nu} \tilde{n}_{i,\nu}\tilde{n}_{i,\nu} = \sum_{i,\nu} \tilde{n}^2_{i,\nu} = \|\tilde{N}\|^2_E;$$

$${}^{0,(q+s)}C^2 = {}^{0,(q+s)}(CC) = \sum_{i,j} c_{i,j}c_{i,j} = \sum_{i,j} c^2_{i,j} = \|C\|^2_E;$$

$$Y = {}^{0,0}(\tilde{N}^2) = (v_{i,j,k,l}) = (\tilde{n}_{i,j}c_{k,l});$$

$$\operatorname{tr}{}^{0,0}(\tilde{N}^2) = \operatorname{tr} Y = \sum_{i,j} y_{i,j,i,j} = \sum_{i,j} \tilde{n}_{i,j}\tilde{n}_{i,j} = \sum_{i,j} \tilde{n}^2_{i,j} = \|\tilde{N}\|^2_E .$$

Утверждение 2. *Если* $\xi = (\xi_{i,j})$, $i = (i_1, i_2, ..., i_q)$, $j = (j_1, j_2, ..., j_s)$, – *действительная* $(q+s)$*-мерная случайная матрица со средним значением*

$$A_\xi = E(\xi) = (a_{\xi,i,j})$$

и дисперсионной матрицей

$$V = E((\xi - A_\xi)^2) = (v_{i,j,k,l}) = ((\xi_{i,j} - a_{\xi,i,j})(\xi_{k,l} - a_{\xi,k,l})),$$

то выполняются равенства

$$\begin{gathered} E\left(\|\xi - A_\xi\|^2_E\right) = E\left(tr\ {}^{0,q}((\xi - A_\xi)^{B_q}(\xi - A_\xi))\right) = \\ = E\left(\operatorname{tr}\ {}^{0,s}((\xi - A_\xi)(\xi - A_\xi)^{B_s})\right) = E\left({}^{0,(q+s)}(\xi - A_\xi)^2\right) = \operatorname{tr} V . \end{gathered} \tag{16}$$

Если матрица $\xi = (\xi_{i,j})$ допускает существование следа $\operatorname{tr}\xi = \sum_i \xi_{i,i}$, то

$$E(\operatorname{tr}\xi) = \operatorname{tr}\big(E(\xi)\big) = \operatorname{tr} A_\xi . \tag{17}$$

Строка равенств (16) доказывается заменой в равенствах (15) C на $\xi - A_\xi$ и взятием математического ожидания. Равенство (17) доказывается следующими преобразованиями:

$$E(\operatorname{tr}\xi) = E\left(\sum_i \xi_{i,i}\right) = \sum_i E(\xi_{i,i}) = \sum_i A_{\xi,i,i} = \operatorname{tr} A_\xi = \operatorname{tr}\big(E(\xi)\big).$$

Заключение

Задача экстраполирования случайных последовательностей имеет два аспекта: построение оптимального алгоритма экстраполирования и выяснение потенциальных возможностей алгоритма. В настоящей работе дается решение обоих аспектов применительно к векторной случайной последовательности. Представленный линейный алгоритм экстраполирования является оптимальным в смысле минимума среднего риска при квадратичной функции потерь как для гауссовских, так и не гауссовских случайных последовательностей. В алгоритме используются среднее значение и ковариационная функция векторной последовательности. Ввиду оптимальности алгоритма для произвольных распределений, в том числе и для выборочных, эти характеристики могут быть заменены выборочными характеристиками без потери оптимальности. Введенное понятие эффективности экстраполирования позволяет рассчитать эффективность имеющегося алгоритма экстраполирования до его применения и тем самым определить целесообразность и границы применимости алгоритма. Показано, что линейный алгоритм экстраполирования марковской стационарной случайной последовательности с возрастанием глубины экстраполирования достаточно быстро теряет свою эффективность до нуля.

Список литературы

1. Колмогоров, А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей / А.Н. Колмогоров // Известия АН СССР. Сер. математическая. – 1941. – Т. 5. – С. 3–14.

2. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон. – М. : Мир, 1976. – 756 с.

3. Mukha, V.S. Statistical weather forecasting / V.S. Mukha, K.S Korchyts // Computer Data Analysis and Modeling. Robustness and Computer Intensive Methods : Proceeding of the Seventh International Conference. – Minsk, 2004. – Vol. 2. – P. 142–145.

4. Муха, В.С. Статистическое векторное прогнозирование количественных характеристик погоды / В.С. Муха // Информационные системы и технологии (IST'2004) : материалы Междунар. конф., Минск, Беларусь, 8–10 ноября 2004. – Минск, 2004. – Ч. 2. – С. 195–200.

5. Соколов, Н.П. Введение в теорию многомерных матриц / Н.П. Соколов. – Киев : Наукова думка, 1972. – 175 с.

6. Муха, В.С. Анализ многомерных данных / В.С. Муха. – Минск : Технопринт, 2004. – 368 с.

7. Муха, В.С. Наилучшая полиномиальная многомерно-матричная регрессия / В.С. Муха // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 138–143.

8. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.

Поступила 06.01.09

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники,
Минск, П. Бровки, 6
e-mail: mukha@bsuir.by

V.S. Mukha

THE EFFICIENCY OF EXTRAPOLATION OF VECTOR RANDOM SEQUENCES

A concept of the efficiency of extrapolation of vector random sequence is introduced. The way of calculating of the efficiency and corresponding formulas are suggested. An analysis of extrapolation efficiency of Markov vector stationary random sequence is provided.