ИНФОРМАТИКА

2009 **январь-март** **№ 1**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.8

Я.М. Шафранский

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ: ПРИОРИТЕТО-ПОРОЖДАЮЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Рассматриваются задачи построения расписаний обслуживания требований при условии, что значения всех или части числовых параметров требований не заданы, известны лишь множества их возможных значений, причем эти параметры не являются управляемыми. Предлагается механизм распространения методов, разработанных для детерминированных задач с приоритето-порождающими целевыми функционалами, на ситуацию с неопределенными параметрами, а также применение этих методов для улучшения качества вариантов, получаемых при использовании таких подходов, как принцип гарантированного результата.

Введение

Известны ситуации, нередко возникающие на практике, в которых построение расписаний обслуживания требований осуществляется в условиях неопределенности, когда значения всех либо некоторых числовых параметров требований априори не известны. Для каждого такого параметра известно лишь множество его возможных значений. При этом указанные параметры не являются управляемыми, т. е. каждый параметр может принимать любое из своих возможных значений независимо от воли лица, принимающего решение либо составляющего расписание. В работе [1] представлены некоторые направления в области исследования задач теории расписаний с неопределенными параметрами, когда множество возможных значений каждого параметра представляет собой отрезок числовой оси. Рассмотрены подходы, наиболее характерные для теории принятия решений в условиях неопределенности, а также возможности методов, основанных на элиминации вариантов. В частности, при обсуждении элиминации вариантов предложена техника, позволяющая переносить известные результаты из теории минимизации приоритето-порождающих функционалов на случай, когда длительность обслуживания требования является неопределенным параметром.

В данной статье проводится систематизация результатов, получаемых распространением известных утверждений и алгоритмов для минимизации приоритето-порождающих функционалов на ситуации с неопределенными параметрами, когда множество возможных значений параметра представляет собой конечное множество отрезков числовой оси. Предлагается способ интеграции возможностей таких подходов, как принцип гарантированного результата, и методов минимизации приоритето-порождающих функционалов. Значительная часть конкретных приоритето-порождающих функционалов (минимизация которых относится, вообще говоря, к теории дискретной оптимизации) – это целевые функционалы тех или иных задач построения оптимальных расписаний. Соответствующие примеры можно найти в монографиях [2, 3].

1. Основные определения и обозначения

Пусть N – конечное множество, $|N| = n$. Каждому элементу $j \in N$ сопоставлен набор числовых параметров $z_1(j), z_2(j),\dots, z_\mu(j)$. Для каждого параметра $z_\kappa(j)$ задано множество его возможных значений $Z_\kappa(j)$, причем параметры не являются управляемыми, т. е. $z_\kappa(j)$ может принимать любое значение из множества $Z_\kappa(j)$ независимо от воли лица, принимающего решение либо решающего задачу, в которой присутствуют элементы множества N. Каждое множество $Z_\kappa(j)$ представляет собой конечный набор отрезков числовой оси вида $[a, b]$, где a и b – рациональные числа, $a \le b$. Обозначим через Z множество всех возможных наборов значений неопределенных параметров.

В качестве множества N может фигурировать множество требований, поступающих в некоторую обслуживающую систему, а в качестве параметров требования $j \in N$ могут рассматриваться длительность p_j его обслуживания, момент r_j готовности требования к обслуживанию, весовой коэффициент w_j, характеризующий важность требования, длительность δ_j переналадки прибора перед началом обслуживания требования и т. п. Каждый из перечисленных параметров может быть неопределенным.

Во многих задачах расписание обслуживания требований однозначно определяется перестановкой требований, т. е. перестановкой элементов множества N (см., например, [2, 3]). Далее рассматриваются именно такие ситуации.

Перестановка π называется частичной, если в нее входят не все элементы множества N. Множество элементов перестановки π обозначается через $\{\pi\}$, а число $\theta = |\{\pi\}|$ называется длиной π. Если $\{\pi\} = \varnothing$, то говорят о перестановке нулевой длины. Обозначим через $\overline{\Pi}$ множество всех перестановок из элементов множества N (включая частичные и нулевой длины). Пусть $\Pi \subseteq \overline{\Pi}$, обозначим через $S[\Pi]$ множество сегментов перестановок из Π, где $\pi' \in \overline{\Pi}$ – сегмент, если существуют такие частичные перестановки $\sigma_1, \sigma_2 \in \overline{\Pi}$, что $(\sigma_1, \pi', \sigma_2) \in \Pi$.

Рассмотрим задачу минимизации на множестве Π функционала $F(\pi)$, значения которого зависят как от перестановки $\pi \in \Pi$ (являющейся в данном случае управляемым параметром), так и от значений неопределенных неуправляемых параметров $z_1(j), z_2(j),\ldots, z_\mu(j)$, сопоставленных элементам множества N. Предполагается, что функционал $F(\pi)$ определен на некотором множестве $\Pi' \subseteq \overline{\Pi}$ и $\Pi \subseteq \Pi'$. Чтобы подчеркнуть зависимость функционала от набора неопределенных параметров, далее используется запись $F(\pi, z)$, где $z = \{z_1(j), z_2(j),\ldots, z_\mu(j) \mid j \in N\}$.

Пусть на множестве $S[\Pi]$ определен функционал $\omega(\pi, z)$, также зависящий от перестановки π и от набора z неопределенных параметров, где $\pi = (j_1,\ldots, j_r)$, $r \le n$.

Функционал $F(\pi, z)$ назовем *приоритето-порождающим на множестве* Π в условиях неопределенности, если на множестве $S[\Pi]$ может быть определен функционал $\omega(\pi, z)$ со следующими свойствами. Для любого набора z значений неопределенных параметров, любых сегментов $\alpha, \beta \in S[\Pi]$ и любых перестановок $\pi' = (\sigma_1, \alpha, \beta, \sigma_2)$ и $\pi'' = (\sigma_1, \beta, \alpha, \sigma_2)$, принадлежащих Π, справедливость неравенства $\omega(\alpha, z) \ge \omega(\beta, z)$ влечет справедливость неравенства $F(\pi', z) \le F(\pi'', z)$. В этом случае $\omega(\pi, z)$ назовем *функционалом приоритета* для $F(\pi, z)$.

Будем называть функционал $F(\pi, z)$ *строгим приоритето-порождающим на множестве* Π в условиях неопределенности, если в приведенном определении из строгого неравенства $\omega(\alpha, z) > \omega(\beta, z)$ следует $F(\pi', z) < F(\pi'', z)$.

Для перестановки $\pi = (j_1,\ldots, j_r)$ определим не зависящие от значений неопределенных параметров функционалы $\omega_{\min}(\pi) = \min\{\omega(\pi; z_1(j_1),\ldots, z_\mu(j_1),\ldots, z_1(j_r),\ldots, z_\mu(j_r)) \mid z_\kappa(j_l) \in Z_\kappa(j_l)\}$ и $\omega_{\max}(\pi) = \max\{\omega(\pi; z_1(j_1),\ldots, z_\mu(j_1),\ldots, z_1(j_r),\ldots, z_\mu(j_r)) \mid z_\kappa(j_l) \in Z_\kappa(j_l)\}$. Для приоритето-порождающего функционала неравенство $F(\pi', z) \le F(\pi'', z)$ справедливо для любого набора z значений неопределенных параметров, если $\omega_{\min}(\alpha) \ge \omega_{\max}(\beta)$, а в случае строгого приоритето-порождающего функционала из $\omega_{\min}(\alpha) > \omega_{\max}(\beta)$ следует $F(\pi', z) < F(\pi'', z)$ для любого z.

Далее предполагается, что величины $\omega_{\min}(\pi)$ и $\omega_{\max}(\pi)$ могут быть вычислены за полиномиальное от n время для любой перестановки π.

Нетрудно убедиться, что в детерминированном случае, когда каждое множество $Z_\kappa(j)$ состоит из единственной точки, введенные определения совпадают с определениями приоритето-порождающего и строгого приоритето-порождающего функционалов (см., например, [3]).

2. Задачи с ограничениями предшествования

Пусть на множестве N задано отношение $\to$ строгого порядка (бинарное транзитивное и антирефлексивное отношение), представленное своим графом редукции $G = (N, U)$.

Содержательно взаимосвязь $i \to j$ может означать, что обслуживание требования j нельзя начинать до завершения обслуживания требования i. В таком случае говорят, что на множестве требований заданы ограничения предшествования.

Перестановка $\pi = (j_1, \ldots, j_r)$, $r \le n$, из элементов множества N называется допустимой относительно строгого порядка $\to$, если из соотношения $j_k \to j_l$ следует $k < l$, т. е. элемент j_k расположен в допустимой перестановке π левее элемента j_l. Вершина j_k называется предшественником вершины j_l, а j_l называется потомком j_k. Если $(j_k, j_l) \in U$, то j_k называется непосредственным предшественником вершины j_l, а j_l – прямым потомком j_k. Для вершин i и j будем писать $i \sim j$, если не выполняется ни $i \to j$, ни $j \to i$. Множество всех предшественников и потомков вершины j обозначим соответственно через $B(j)$ и $A(j)$, а множества непосредственных предшественников и прямых потомков – через $B^0(j)$ и $A^0(j)$.

Для $v, h \in N$ обозначим $\overline{B}(h,v) = B(h) \setminus (B(v) \cup v)$, $\overline{A}(h,v) = A(v) \setminus (A(h) \cup h)$.

Обозначим через $\Pi(G)$ множество всех полных перестановок элементов множества N, допустимых относительно строгого порядка $\to$, определяемого графом G.

Рассмотрим задачу отыскания перестановки $\pi^* \in \Pi(G)$, доставляющей минимум функционалу $F(\pi, z)$, который является приоритето-порождающим либо строгим приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$.

В силу наличия неопределенности сформулированная задача решения не имеет: если не учитывать изредка встречающиеся вырожденные ситуации, то для любой перестановки $\pi^* \in \Pi(G)$ найдется такой набор $z' \in Z$, что $F(\pi^*, z') > F(\pi^0, z')$ для некоторой перестановки $\pi^0 \in \Pi(G)$.

В детерминированном случае, когда каждое множество $Z_\kappa(j)$ состоит из единственной точки, принадлежность целевого функционала классу приоритето-порождающих функционалов позволяет сформировать набор преобразований, с помощью которых осуществляется сужение области поиска оптимальной перестановки. Алгоритмы, основанные на использовании указанных преобразований, позволяют эффективно решать задачу поиска оптимальной перестановки для достаточно широкого набора ситуаций (см. [2, 3]). Рассмотрим, какой эффект может дать построение и использование аналогичных преобразований в случае неопределенности.

Теорема 1. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$, $B^0(h) = v$ и $\omega_{\min}(h) \ge \omega_{\max}(j)$ для всех $j \in \overline{A}(h,v) \cup v$. Тогда для любой перестановки $\pi = (\ldots, v, \sigma, h, \ldots) \in \Pi(G)$ при любом наборе z' значений неопределенных параметров найдется такая перестановка $\pi^0 = (\ldots, v, h, \ldots) \in \Pi(G)$, что $F(\pi^0, z') \le F(\pi, z')$.*

Теорема 2. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$, $h \sim v$ и $\omega_{\min}(j) \ge \omega_{\max}(i)$ для всех $j \in \overline{B}(h,v) \cup h$ и $i \in \overline{A}(h,v) \cup v$. Тогда для любой перестановки $\pi = (\ldots, v, \sigma, h, \ldots) \in \Pi(G)$ при любом наборе z' значений неопределенных параметров найдется такая перестановка $\pi^0 = (\ldots, h, v, \ldots) \in \Pi(G)$, что $F(\pi^0, z') \le F(\pi, z')$.*

Теоремы 1 и 2 являются прямыми аналогами соответствующих теорем для детерминированного случая (см., например, теоремы 2.1 и 2.2 в гл. 3 монографии [2]). При фиксации того или иного набора значений неопределенных параметров формулировки теорем 1 и 2 попросту совпадают с формулировками их аналогов, что избавляет от необходимости повторного проведения доказательств.

Сформулированные утверждения имеют простую интерпретацию. В условиях теоремы 1 пара v и h вершин графа G заменяется одной вершиной, которой сопоставляется перестановка (v, h). В условиях теоремы 2 в G вводится новая дуга (h, v). Описанные преобразования обозначим соответственно через I-$[v, h]$ и II-(h, v). Граф G', полученный в результате многократного применения к графу G преобразований I и II, обладает тем свойством, что $\Pi(G') \subset \Pi(G)$.

Лемма 1. *Пусть граф G' получен в результате многократного применения к графу G преобразований I и II. Тогда для любого набора z' значений неопределенных параметров во множестве $\Pi(G')$ найдется перестановка, доставляющая минимум функционалу $F(\pi, z')$.*

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из теоремы 5 [1].

В детерминированном случае применение преобразований I и II позволяет переводить исходный граф G в цепь в ряде ситуации (когда, например, граф G является последовательно-параллельным [2]). Тем самым гарантируется получение оптимальной перестановки.

При наличии неопределенных параметров подобные гарантии отсутствуют даже в случае, когда отношение $\rightarrow$ пусто или, что эквивалентно, $G = (N, \varnothing)$. Это объясняется тем, что в условиях неопределенности не любые два элемента i, j множества N сравнимы в смысле бинарного отношения, порождаемого функционалом приоритета, т. е. могут не выполняться ни неравенство $\omega_{\min}(j) \geq \omega_{\max}(i)$, ни неравенство $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(j)$ и, таким образом, не может быть применено ни одно из преобразований I и II. В этом случае интервалы $[\omega_{\min}(i), \omega_{\max}(i)]$ и $[\omega_{\min}(j), \omega_{\max}(j)]$ пересекаются. Здесь под пересечением двух интервалов понимается (в отличие от стандартного понятия пересечения множеств) наличие у интервалов по крайней мере одной общей точки, которая не является граничной точкой хотя бы одного из рассматриваемых интервалов. Такое пересечение интервалов будем называть *невырожденным*, а об интервалах, имеющих невырожденное пересечение, будем говорить, что они пересекаются невырожденным образом.

3. Задачи с заданным группированием элементов

Пусть отношение $\rightarrow$ пусто и, соответственно, $G = (N, \varnothing)$, но задано разбиение множества N на m непересекающихся непустых подмножеств: $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_m$. Перестановка $\pi = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ элементов множества N называется допустимой, если для каждого подмножества N_k все его элементы расположены в перестановке π непосредственно друг за другом, иначе говоря, должен существовать такой индекс $l \geq 1$, что $j_l, j_{l+1}, \ldots, j_{l+q-1} \in N_k$, где $q = |N_k|$.

На содержательном уровне подмножества N_k представляют собой так называемые партии требований. При любом допустимом расписании требования, относящиеся к одной и той же партии, должны обслуживаться непосредственно друг за другом, что отражается в структуре допустимой перестановки.

Обозначим через Π_{GT} множество всех допустимых перестановок. При работе с множеством Π_{GT} нет необходимости использовать преобразования I, а условия применения преобразования II существенно упрощаются. Эти условия представлены приведенной ниже теоремой 3. Поскольку далее в исходный граф G предполагается вводить новые дуги, обеспечивая тем самым сужение множества допустимых перестановок, целесообразно вместо обозначения Π_{GT} использовать $\Pi_{GT}(G)$. Само понятие допустимой перестановки также потребует уточнения: перестановка должна быть допустимой и относительно заданного группирования элементов, и относительно генерируемого с помощью преобразований II отношения строгого порядка.

Теорема 3. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является приоритето-порождающим на множестве Π_{GT}, элементы h и v принадлежат одной и той же партии, $h \sim v$ и $\omega_{\min}(h) \geq \omega_{\max}(v)$. Тогда для любой перестановки $\pi = (\ldots, v, \sigma, h, \ldots) \in \Pi_{GT}$ при любом наборе z' значений неопределенных параметров найдется такая перестановка $\pi^0 = (\ldots, h, v, \ldots) \in \Pi_{GT}$, что $F(\pi^0, z') \leq F(\pi, z')$.*

Доказательство. Пусть граф G' получен из исходного графа G в результате применения преобразования II-(h_1, v_1). Нетрудно убедиться, что, во-первых, элементы h_1 и v_1 удовлетворяют условиям теоремы 2 и, во-вторых, любые элементы h и v, сопоставленные некоторым вершинам графа G' и удовлетворяющие условиям теоремы 3, одновременно удовлетворяют и условиям теоремы 2. Эти рассуждения остаются справедливыми и для графа G', полученного из исходного графа G в результате многократного применения преобразования II. ■

Приведенные рассуждения показывают, что теорема 3 представляет собой специальный случай теоремы 2. Отсюда следует справедливость приведенного ниже аналога леммы 1.

Лемма 2. *Пусть граф G' получен в результате многократного применения к графу G преобразований II, проводимых при выполнении условий теоремы 3. Тогда для любого набора z' значений неопределенных параметров во множестве $\Pi_{GT}(G')$ найдется перестановка, доставляющая минимум функционалу $F(\pi, z')$.*

4. Задачи без ограничений на порядок следования элементов

Ситуация существенно упрощается, если допустимой является любая перестановка элементов множества N. В этом случае, как и в предыдущем разделе, для сужения исходного множества допустимых перестановок достаточно иметь преобразование II. Более того, достаточно потребовать, чтобы целевой функционал $F(\pi, z)$ был *1-приоритето-порождающим*.

Определение 1-приоритето-порождающего функционала получается из определения приоритето-порождающего функционала заменой множества $S[\Pi]$ множеством N. Аналогичным образом определяются строгие 1-приоритето-порождающие функционалы. Примеры функционалов, не являющихся приоритето-порождающими, но являющихся 1-приоритето-порождающими, можно найти в [2]. Поскольку далее предполагается использование преобразований II, то для представления текущего множества допустимых перестановок целесообразно сохранить обозначение $\Pi(G)$, где вначале $G = (N, \varnothing)$. Применение преобразования II в рассматриваемой ситуации регулируется следующим утверждением, являющимся специальным случаем теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является 1-приоритето-порождающим на множестве $\Pi(G)$, h и v – элементы множества N, $h \sim v$ и $\omega_{\min}(h) \geq \omega_{\max}(v)$. Тогда для любой перестановки $\pi = (\ldots, v, \sigma, h, \ldots) \in \Pi(G)$ при любом наборе z' значений неопределенных параметров найдется такая перестановка $\pi^0 = (\ldots, h, v, \ldots) \in \Pi(G)$, что $F(\pi^0, z') \leq F(\pi, z')$.*

Справедлив также следующий аналог леммы 2.

Лемма 3. *Пусть граф G' получен в результате многократного применения к графу G преобразований II, проводимых при выполнении условий теоремы 4. Тогда для любого набора z' значений неопределенных параметров во множестве $\Pi(G')$ найдется перестановка, доставляющая минимум функционалу $F(\pi, z')$.*

Для детерминированной ситуации в предположении, что целевой функционал $F(\pi)$ является строгим приоритето-порождающим, получен ряд результатов по характеризации множества всех оптимальных перестановок. В работе [4] предложен алгоритм описания множества всех оптимальных перестановок для случая, когда на множестве N задано отношение строгого порядка $\rightarrow$, а граф редукции отношения $\rightarrow$ является последовательно-параллельным. В монографии [3] приведено описание множества всех оптимальных перестановок для задачи построения расписаний при заданном группировании элементов и векторном строгом приоритето-порождающем целевом функционале. Упрощенный вариант этих результатов для случая, когда поиск оптимальной перестановки осуществляется на множестве всех перестановок элементов множества N, формулируется следующим образом.

Если $\omega(v) > \omega(h)$, то преобразование II-(v, h) является допустимым для исходного графа $G = (N, \varnothing)$. Будем вводить в исходный граф $G = (N, \varnothing)$ дугу вида (v, h) всякий раз, когда для текущего графа выполнены условия $v \sim h$ и $\omega(v) > \omega(h)$. Полученный в результате выполнения всех таких преобразований граф обозначим через G^*. Пусть Π^{opt} – множество всех оптимальных перестановок для задачи минимизации строгого 1-приоритето-порождающего функционала $F(\pi)$ на множестве всех перестановок элементов множества N. Тогда $\Pi^{opt} = \Pi(G^*)$.

Отсюда очевидным образом следует справедливость приведенного ниже утверждения.

Следствие 1. *Перестановка $\pi = (j_1,\ldots, j_n)$ доставляет минимум строгому 1-приоритето-порождающему функционалу $F(\pi)$ на множестве всех перестановок элементов множества N тогда и только тогда, когда $\omega(j_l) \geq \omega(j_{l+1})$ для всех $l = 1, \ldots, n-1$.*

Аналогичное утверждение справедливо и для минимизации строгого 1-приоритето-порождающего функционала в условиях неопределенности.

Обозначим через Π^* такое минимальное по мощности множество перестановок, что для любого набора z' значений неопределенных параметров множество Π^* содержит перестановку, доставляющую минимум функционалу $F(\pi, z')$ на множестве всех перестановок элементов множества N. Нетрудно заметить, что множество Π^* определено, вообще говоря, неоднозначно.

Теорема 5. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является строгим 1-приоритето-порождающим на множестве всех перестановок элементов множества N. В этом случае $|\Pi^*| = 1$ тогда и только тогда, когда для любой пары элементов $h, v \in N$ выполняется соотношение $\omega_{\min}(h) \geq \omega_{\max}(v)$ или соотношение $\omega_{\min}(v) \geq \omega_{\max}(h)$.*

Доказательство. *Достаточность* следует непосредственно из возможности выполнения преобразования II-(h, v) или преобразования II-(v, h) соответственно для любой пары элементов множества N. В результате выполнения всех возможных преобразований II, проводимых при выполнении условий теоремы 4, исходный граф $G = (N, \varnothing)$ будет преобразован в цепь.

Необходимость. Пусть множество N содержит такие элементы h, v, что $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$. Покажем, что в этом случае множество Π^* содержит не менее двух перестановок. Для одновременного выполнения неравенств $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$ необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(h)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(v)$. Пусть для определенности $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(h)$, а z' и z'' – такие наборы значений неопределенных параметров, что $\omega_{\min}(h) = \omega(h; z'_1(h),\ldots, z'_\mu(h))$, $\omega_{\max}(v) = \omega(v; z'_1(v),\ldots, z'_\mu(v))$ и $\omega_{\max}(h) = \omega(h; z''_1(h),\ldots, z''_\mu(h))$, $\omega_{\min}(v) = \omega(v; z''_1(v),\ldots, z''_\mu(v))$. Из $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(h)$ следует, что $z' \neq z''$.

Покажем, что никакая перестановка вида $\pi^0 = (\ldots, h,\ldots, v,\ldots)$ не может доставлять минимум функционалу $F(\pi, z')$, если $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$. При фиксированном наборе z' выполняется $\omega(h, z') = \omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v) = \omega(v, z')$. Пусть перестановка π^0 имеет вид $\pi^0 = (..., h, j_1,\ldots, j_k, v,\ldots)$. Если $\omega(v, z') \geq \omega(j_t, z')$, $t = 1,\ldots, k$, то из определения приоритето-порождающего функционала следует, что $F(\pi, z') \leq F(\pi^0, z')$, где $\pi = (..., h, v, j_1,\ldots, j_k, \ldots)$. Если же неравенство $\omega(v, z') \geq \omega(j_t, z')$ не выполняется для некоторых t, то среди элементов $j_1,\ldots, j_k$ отыщем элемент j_l с максимальным значением функционала приоритета. Как и в предыдущем случае, $F(\pi, z') \leq F(\pi^0, z')$, где $\pi = (..., h, j_l, j_1,\ldots, j_{l-1}, j_{l+1},\ldots, j_k, v,\ldots)$. При этом $\omega(h, z') < \omega(j_l, z')$. В перестановке π поменяем местами элемент h и расположенный справа от него элемент. Для полученной в результате такой транспозиции перестановки π' из определения строгого приоритето-порождающего функционала следует, что $F(\pi', z') < F(\pi^0, z')$. Приведенные рассуждения показывают, что перестановка π^0 не является оптимальной для z'. Следовательно, множество Π^* содержит хотя бы одну перестановку вида $(\ldots, v,\ldots, h,\ldots)$. Аналогично, из $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$ следует, что множество Π^* содержит хотя бы одну перестановку вида $(\ldots, h,\ldots, v,\ldots)$. ■

Следствие 2. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является 1-приоритето-порождающим на множестве всех перестановок элементов множества N. Тогда $|\Pi^*| = 1$, если для любой пары элементов $h, v \in N$ выполняется соотношение $\omega_{\min}(h) \geq \omega_{\max}(v)$ или $\omega_{\min}(v) \geq \omega_{\max}(h)$.*

Условия теоремы 5 (и следствия 2) имеют простую интерпретацию. Если для любых элементов $h, v \in N$ выполняется $\omega_{\min}(h) \geq \omega_{\max}(v)$ или $\omega_{\min}(v) \geq \omega_{\max}(h)$, то интервалы приоритетов $[\omega_{\min}(h), \omega_{\max}(h)]$ и $[\omega_{\min}(v), \omega_{\max}(v)]$ элементов h и v не пересекаются невырожденным образом. Для проверки справедливости этих условий можно использовать стандартную процедуру проверки наличия пересекающихся интервалов в наборе интервалов: все интервалы упорядочиваются по неубыванию их левых (или правых) границ, а проверка приведенных условий осуществляется только для интервалов, являющихся соседними в полученной последовательности. Поэтому сложность проверки выполнимости условий и теоремы 5, и следствия 2 можно оценить как $O(n \log n)$, если $\omega_{\min}(j)$ и $\omega_{\max}(j)$ вычислимы за константное время для любых $j \in N$.

Замечание 1. Теорема 5 дает необходимые и достаточные условия для существования перестановки, доставляющей минимум целевому функционалу при любых значениях неопределенных параметров. Следствие 2 описывает лишь достаточные условия.

Замечание 2. Если функционал $F(\pi, z)$ является приоритето-порождающим, то для сокращения множества перестановок можно использовать наряду с преобразованием II и преобразование I. Поскольку исходный граф G пуст, а преобразование II-(h, v) проводится при выполнении условия $\omega_{\min}(h) \geq \omega_{\max}(v)$, то всякий раз, выполнив преобразование II-(h, v), можно выполнять и преобразование I-$[h, v]$, заменяя соответствующую пару вершин графа G одной вершиной.

Если для любой пары элементов $h, v \in N$ выполняются соотношения $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$, то к исходному графу $G = (N, \varnothing)$ нельзя применить ни одного преобразования II. Для строгого 1-приоритето-порождающего целевого функционала указанное условие является и необходимым для недопустимости преобразований II. Это, однако, не означает, что для строгого 1-приоритето-порождающего функционала выполнение таких условий гарантирует выполнение соотношения $|\Pi^*| = n!$. Нетрудно построить пример, когда $2 \leq |\Pi^*| < n!$.

Найдем условия, обеспечивающие выполнение соотношения $|\Pi^*| = n!$.

Утверждение 1. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является строгим 1-приоритето-порождающим на множестве всех перестановок элементов множества N. Для выполнения соотношения $|\Pi^*| = n!$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой из $n!$ перестановок $\pi = (j_1,\dots, j_n)$ существовал такой набор z' значений неопределенных параметров, что $\omega(j_l; z') > \omega(j_{l+1}; z')$ для всех $l = 1,\dots, n-1$.*

Доказательство. *Достаточность* следует из того, что перестановка π является единственной оптимальной перестановкой для набора z' (см. доказательство теоремы 5) и, следовательно, π принадлежит каждому множеству Π^*.

Необходимость. Пусть при любом наборе z' значений неопределенных параметров существует такая пара j_l и j_{l+1} элементов, что $\omega(j_l; z') \leq \omega(j_{l+1}; z')$. Ситуацию $\omega(j_l; z') < \omega(j_{l+1}; z')$ можно не рассматривать, поскольку в этом случае перестановка $\pi = (j_1,\dots, j_n)$ не является оптимальной для набора z'. Предположим, что множество Π^* содержит все $n!$ перестановок. В таком случае Π^* содержит перестановку, отличающуюся от π лишь транспозицией элементов j_l и j_{l+1} и являющуюся оптимальной для набора z'. Поэтому перестановку π можно из множества Π^* исключить. ■

Очевидна бесполезность утверждения 1 для проверки корректности равенства $|\Pi^*| = n!$, поскольку такая проверка потребовала бы просмотра всех $n!$ перестановок. Тем не менее, определенная польза от него есть. В частности, из этого утверждения следует справедливость еще одного необходимого (но не достаточного) и еще одного достаточного (но не необходимого) условий.

Для элемента $j \in N$ обозначим через $\Omega(j)$ множество всех возможных значений его функционала приоритета при различных значениях неопределенных параметров: $\Omega(j) = \{\omega(j; z_1(j),\dots, z_\mu(j)) \mid z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j), \kappa = 1,\dots, \mu\}$.

Следствие 3. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является строгим 1-приоритето-порождающим на множестве всех перестановок элементов множества N. Для выполнения соотношения $|\Pi^*| = n!$ необходимо, чтобы $|\bigcup_{j\in N} \Omega(j)| \geq n$ и для любой пары элементов $h, v \in N$ выполнялись соотношения $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$.*

Элемент $j \in N$ будем называть *ω-детерминированным*, если $|\Omega(j)| = 1$.

Пусть $\lambda \in \bigcup_{j\in N} \Omega(j)$, обозначим через $\Omega^<(j, \lambda)$ подмножество всех таких чисел $\omega \in \Omega(j)$, что $\omega < \lambda$: $\Omega^<(j, \lambda) = \{\omega(j; z_1(j),\dots, z_\mu(j)) \mid z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j), \omega(j; z_1(j),\dots, z_\mu(j)) < \lambda\}$. Аналогично, $\Omega^>(j, \lambda) = \{\omega(j; z_1(j),\dots, z_\mu(j)) \mid z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j), \omega(j; z_1(j),\dots, z_\mu(j)) > \lambda\}$.

Следствие 4. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является строгим 1-приоритето-порождающим на множестве всех перестановок элементов множества N. Соотношение $|\Pi^*| = n!$ выполняется, если (а) выполняется $|\bigcap_{j\in N} \Omega(j)| \geq n$ либо (б) множество N содержит не более одного ω-детерминированного элемента j^0, $|\bigcap_{j\in N\setminus j^0} \Omega^<(j, \omega(j^0))| \geq n-1$ и $|\bigcap_{j\in N\setminus j^0} \Omega^>(j, \omega(j^0))| \geq n-1$.*

Доказательство. Если выполнено условие (*а*), то для каждого $j \in N$ и каждого набора z значений неопределенных параметров имеется n таких чисел $\omega_1 < \dots < \omega_n$, что функционал приоритета $\omega(j, z)$ может принимать любое из значений $\omega_1,\dots, \omega_n$. В этом случае выполнены условия утверждения 1. Если выполнено условие (*б*), то для каждого $j \in N$ и каждого набора z имеется

$n - 1$ различных значений $\omega(j, z)$, меньших, чем $\omega(j^0)$, и $n - 1$ различных значений $\omega(j, z)$, больших, чем $\omega(j^0)$, т. е. для любой перестановки снова выполнены условия утверждения 1. ■

Множество $\Omega(j)$ можно рассматривать как множество отрезков числовой прямой. В простейшем случае, когда каждое множество $\Omega(j)$ состоит из единственного отрезка, можно сформулировать легко проверяемые необходимые и достаточные условия, при которых справедливо равенство $|\Pi^*| = n!$.

Следствие 5. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является строгим 1-приоритето-порождающим на множестве всех перестановок элементов множества N, а каждое множество $\Omega(j)$ состоит из единственного отрезка. Соотношение $|\Pi^*| = n!$ выполняется тогда и только тогда, когда для любых $h, v \in N$ выполняются соотношения $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$.*

Доказательство. Из справедливости соотношений $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$ для любой пары элементов $h, v \in N$ следует, что существует не более одного такого множества $\Omega(j^0)$, что $|\Omega(j^0)| = 1$. Для остальных множеств соответствующие отрезки не вырождены (не являются точками), поэтому $|\bigcup_{j\in N} \Omega(j)| = \infty$ и, в силу следствия 3, условия леммы являются необходимыми для выполнения равенства $|\Pi^*| = n!$.

Достаточность. Из справедливости соотношений $\omega_{\min}(h) < \omega_{\max}(v)$ и $\omega_{\min}(v) < \omega_{\max}(h)$ для любой пары элементов $h, v \in N$ следует, что множество $\bigcap_{j\in N\setminus j^0} \Omega(j)$ представляет собой отрезок $[a, b]$, где $a = \max\{\omega_{\min}(j) \mid j \in N \setminus j^0\}$, $b = \min\{\omega_{\max}(j) \mid j \in N \setminus j^0\}$, $a < b$. При этом если элемент j^0, удовлетворяющий условию $|\Omega(j^0)| = 1$, существует, то $a < \omega(j^0) < b$. Это, в свою очередь, означает, что выполнены условия следствия 4, поскольку каждый из отрезков $[a, b]$, $[a, \omega(j^0)]$ и $[\omega(j^0), b]$ содержит бесконечное число и действительных, и рациональных чисел. Последнее уточнение важно, так как в задачах дискретной оптимизации обычно ограничиваются рассмотрением рациональных чисел. ■

Прямая проверка условий следствия 5 требует выполнения $O(n^2)$ операций сравнения. Анализируя доказательство следствия 5, нетрудно заметить, что такую проверку можно выполнить за $O(n)$ операций: достаточно проверить наличие и единственность элемента j^0, найти числа a и b, а затем проверить справедливость неравенства $a < b$ (при отсутствии элемента j^0) либо неравенств $a < \omega(j^0) < b$, если элемент j^0 существует и единственен.

Частный случай ситуации, когда каждое множество $\Omega(j)$ состоит из единственного отрезка, рассмотрен в работе [5] для одного из простейших строгих приоритето-порождающих функционалов (каждому элементу $j \in N$ сопоставлена пара чисел $p_j > 0$ и w_j, а $\omega(j) = w_j/p_j$; неопределенным является первый из указанных параметров, представляющий в задачах построения расписаний длительность обслуживания требования). В [5] для этого частного случая сформулированы необходимые и достаточные условия, при которых $|\Pi^*| = n!$. Следует отметить, что приведенные в [5] условия являются необходимыми лишь при отсутствии во множестве N ω-детерминированных элементов, в общем случае эти условия являются достаточными, но не являются необходимыми. Следует отметить также, что идея формулировки приведенного выше утверждения 1 взята из [5].

Известно несколько работ, посвященных поиску условий, при которых $|\Pi^*| = 1$. В [5] такие условия сформулированы для упомянутой выше задачи, а в работе [6] – для задачи, обычно именуемой в русскоязычной литературе задачей Беллмана-Джонсона для двух приборов.

5. Принцип гарантированного результата и преобразование II

Как уже отмечалось, с математической точки зрения для оптимизационной задачи в условиях неопределенности, как правило, бессмысленно говорить о ее решении в традиционном понимании, т. е. о поиске значений управляемых параметров, доставляющих наименьшее значение целевому функционалу при любых наборах значений неопределенных параметров.

В теории исследования операций одним из основных направлений работы с оптимизационными задачами в условиях неопределенности является введение вспомогательного критерия и решение соответствующей оптимизационной задачи с тем же множеством значений управляемых параметров. Вспомогательный критерий вводится таким образом, чтобы устранить неопределенность, обеспечивая тем самым переход к задаче детерминированной оптимизации, и, главное, гарантировать получение приемлемого варианта при любых возможных значениях неопределенных параметров. Наиболее известные критерии такого рода – это критерий Вальда (принцип гарантированного результата), критерии Сэвиджа и Гурвица.

Как показано в работе [1], элиминация вариантов, основанная на представленных выше преобразованиях или аналогичных им, не имеет серьезного самостоятельного значения, поскольку ее характер не гарантирует сохранение в результирующем множестве тех вариантов, которые являются оптимальными в смысле критериев Вальда, Сэвиджа и Гурвица. Более того, нетрудно построить примеры, в которых в результирующем множестве нет ни одного такого варианта, но оно содержит при этом для каждого набора возможных значений неопределенных параметров оптимальный вариант, т. е. вариант, доставляющий минимум целевому функционалу при данном наборе значений неопределенных параметров.

Ниже описывается подход, позволяющий использовать преобразование II для улучшения качества решений, формируемых при использовании принципа гарантированного результата.

Принцип гарантированного результата приводит к следующей формулировке. Найти перестановку $\pi \in \Pi$, доставляющую минимум функционалу $F(\pi, z)$ при наихудшем с точки зрения минимизации $F(\pi, z)$ наборе z значений неопределенных параметров. Иначе говоря, исходная задача заменяется задачей поиска перестановки $\pi \in \Pi$, доставляющей минимум функционалу $V(\pi) = \max\{F(\pi; z_1(j_1),\ldots, z_\mu(j_1),\ldots, z_1(j_r),\ldots, z_\mu(j_r)) \mid z_\kappa(j_l) \in Z_\kappa(j_l)\}$.

В работе [7] рассмотрено использование критерия Вальда при минимизации функционала $F(\pi, z)$ в ситуации, когда каждому элементу $j \in N$ сопоставлен единственный неопределенный параметр, интерпретируемый в задачах построения расписаний как длительность обслуживания требования (операции), введено понятие регулярной задачи теории расписаний.

Задача построения расписания s называется *регулярной*, если целевой функционал задачи является регулярным (неубывающим от моментов $C_j(s)$ завершения обслуживания требований) и выполняется следующее условие. Пусть I_1 и I_2 – два примера задачи, отличающиеся только длительностями выполнения операций требований, и $p_{ij} \geq p'_{ij}$, где p_{ij} и p'_{ij} – длительности выполнения операций в примерах I_1 и I_2 соответственно. Тогда для каждого допустимого расписания s для примера I_1 должно существовать такое допустимое расписание s' для примера I_2, что $S_{ij}(s') \leq S_{ij}(s)$, где $S_{ij}(s)$ – момент начала выполнения операции O_{ij} при расписании s. Здесь под операцией O_{ij} подразумевается обслуживание требования j прибором i.

Понятие регулярной задачи введено для описания класса задач, в которых увеличение длительностей обслуживания требований (выполнения операций) не может привести к уменьшению значения целевого функционала при любом расписании, включая оптимальное.

Для ситуации, когда каждому элементу $j \in N$ сопоставлено несколько неопределенных числовых параметров $z_1(j),\ldots, z_\mu(j)$, целесообразно расширить понятие регулярности задачи.

Будем говорить, что функционал $F(\pi, z)$ является *монотонным по неопределенным параметрам*, если он является монотонным по каждому из параметров $z_\kappa(j)$, $z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j)$, $\kappa = 1,\ldots, \mu$, $j \in N$.

Отметим, что обычно характер монотонности $F(\pi, z)$ по параметру $z_\kappa(j)$ не зависит от j, являясь одним и тем же для всех $j \in N$, хотя в определении возможность наличия такой зависимости учтена.

Пусть $z_\kappa^{\min}(j) = \min\{z_\kappa(j) \mid z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j)\}$ и $z_\kappa^{\max}(j) = \max\{z_\kappa(j) \mid z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j)\}$. Очевидна справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *Если функционал $F(\pi, z)$, $\pi = (j_1,\ldots, j_n)$, является монотонным по неопределенным параметрам, то* $V(\pi) = F(\pi; z_1^{e_{11}}(j_1),\ldots, z_\mu^{e_{\mu 1}}(j_1),\ldots, z_1^{e_{1n}}(j_n),\ldots, z_\mu^{e_{\mu n}}(j_n))$, *где* $e_{\kappa l} = \min$, *если функционал $F(\pi, z)$ является невозрастающим по параметру $z_\kappa(j_l)$, и* $e_{\kappa l} = \max$, *если функционал $F(\pi, z)$ является неубывающим по параметру $z_\kappa(j_l)$.*

Следствие 6. *Для задачи минимизации монотонного по неопределенным параметрам функционала $F(\pi, z)$ поиск перестановки, оптимальной относительно критерия Вальда, сво-*

дится к решению детерминированного варианта исходной задачи путем фиксации для каждого из неопределенных параметров их минимальных либо максимальных значений – в зависимости от характера монотонности $F(\pi, z)$ относительно конкретного параметра.

В случае когда целевой функционал является одновременно приоритето-порождающим и монотонным по неопределенным параметрам, поиск перестановки, оптимальной относительно критерия Вальда, сводится к решению детерминированного варианта исходной задачи и, соответственно, может быть использован весь математический аппарат, разработанный для минимизации приоритето-порождающих функционалов (см., например, [3]).

С точки зрения исходной задачи минимизации приоритето-порождающего функционала в условиях неопределенности ее решение в смысле критерия Вальда может быть несколько улучшено следующим образом.

При определении взаимного расположения элементов i и j в оптимальной перестановке все алгоритмы минимизации приоритето-порождающих функционалов используют сравнение значений $\omega(i)$ и $\omega(j)$ функционала приоритета. При построении перестановки, оптимальной в смысле критерия Вальда, также производится сравнение указанных значений. Возможны ситуации, когда $\omega(i) = \omega(j)$ при зафиксированных (в соответствии с теоремой 6) значениях неопределенных параметров. В таких ситуациях элементы i и j неразличимы для алгоритма минимизации приоритето-порождающего функционала и, следовательно, существует несколько перестановок, оптимальных в смысле критерия Вальда. С точки зрения ситуации неопределенности эти перестановки могут быть неравноправны. Возможно, например, что $\omega_{\min}(i) \geq \omega_{\max}(j)$. В таком случае целесообразно ввести в текущий граф G дугу (i, j), поскольку при любых значениях неопределенных параметров существует перестановка вида $(\ldots, i, \ldots, j, \ldots)$, которая «не хуже» любой перестановки вида $(\ldots, j, \ldots, i, \ldots)$.

Аналогичная ситуация может сложиться при сравнении не отдельных элементов множества N, а так называемых составных элементов (являющихся элементами множества $S[\Pi]$). Составные элементы формируются алгоритмами минимизации приоритето-порождающих функционалов, например, в задачах с ограничениями предшествования; такие элементы сопоставляются вершинам текущего графа G. Если π_1 и π_2 – составные элементы и $\omega(\pi_1) = \omega(\pi_2)$ при зафиксированных значениях неопределенных параметров, то следует сравнить $\omega_{\min}(\pi_1)$ и $\omega_{\max}(\pi_2)$, а также $\omega_{\min}(\pi_2)$ и $\omega_{\max}(\pi_1)$. Если $\omega_{\min}(\pi_1) \geq \omega_{\max}(\pi_2)$ либо $\omega_{\min}(\pi_2) \geq \omega_{\max}(\pi_1)$, то в текущий граф G вводится дуга (π_1, π_2) либо дуга (π_2, π_1) соответственно.

Если поиск перестановки, доставляющей минимум приоритето-порождающему функционалу, осуществляется на множестве всех перестановок, то решение, оптимальное относительно принципа гарантированного результата и формируемое в соответствии с описанной процедурой, обладает некоторыми новыми свойствами. Для их представления приведем формальное описание алгоритма построения оптимальной по Вальду перестановки для приоритето-порождающего и монотонного по неопределенным параметрам функционала $F(\pi, z)$.

Алгоритм V

Шаг 1. Для каждой пары κ, j, где $\kappa = 1, ..., \mu$, $j \in N$, определяем характер монотонности функционала $F(\pi, z)$. Полагаем $\bar{z}_\kappa(j) = \min\{z_\kappa(j) \,|\, z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j)\}$, если функционал $F(\pi, z)$ является невозрастающим по параметру $z_\kappa(j)$, и $\bar{z}_\kappa(j) = \max\{z_\kappa(j) \,|\, z_\kappa(j) \in Z_\kappa(j)\}$, если функционал $F(\pi, z)$ является неубывающим по параметру $z_\kappa(j)$.

Шаг 2. Полагаем $\overline{\omega}(j) = \omega(j; \bar{z}_1(j), ..., \bar{z}_\mu(j))$, $j \in N$.

Шаг 3. Строим перестановку π^V, упорядочивая элементы j множества N по невозрастанию соответствующих значений $\overline{\omega}(j)$. При $\overline{\omega}(j') = \overline{\omega}(j'')$ вычисляем значения $\omega_{\min}(j')$, $\omega_{\max}(j'')$, $\omega_{\min}(j'')$ и $\omega_{\max}(j')$. Если $\omega_{\min}(j') \geq \omega_{\max}(j'')$, то располагаем элементы j' и j'' в перестановке π^V в порядке j', j''. Если $\omega_{\min}(j'') \geq \omega_{\max}(j')$, то располагаем элементы j' и j'' в π^V в порядке j'', j'. Если ни одно из указанных условий не выполнено, то располагаем j' и j'' в π^V в произвольном порядке.

Обозначим через Π^0 множество всех перестановок, каждая из которых доставляет минимум функционалу $F(\pi, z)$ на множестве всех перестановок элементов множества N при любых значениях неопределенных параметров.

Утверждение 2. *Если функционал $F(\pi, z)$ является монотонным по неопределенным параметрам и строгим 1-приоритето-порождающим, а множество Π^0 не пусто, то $\pi^V \in \Pi^0$.*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что множество Π^0 существует тогда и только тогда, когда для любой пары элементов $j', j'' \in N$ выполняется соотношение $\omega_{\min}(j') \geq \omega_{\max}(j'')$ или соотношение $\omega_{\min}(j'') \geq \omega_{\max}(j')$. В первом случае выполняется неравенство $\overline{\omega}(j') \geq \overline{\omega}(j'')$, во втором – неравенство $\overline{\omega}(j') \leq \overline{\omega}(j'')$. Из доказательства теоремы 5 следует, что для любой перестановки $\pi = (j_1, \dots, j_n)$ из множества Π^0 выполняются условия $\omega_{\min}(j_l) \geq \omega_{\max}(j_{l+1})$, $l = 1, \dots, n-1$, причем любая перестановка, удовлетворяющая этим условиям, принадлежит Π^0. Из приведенных рассуждений и описания алгоритма V следует, что $\pi^V \in \Pi^0$. ■

Следствие 7. *Пусть функционал $F(\pi, z)$ является монотонным по неопределенным параметрам и 1-приоритето-порождающим. Если множество Π^ω содержит все те и только те перестановки $\pi = (j_1, \dots, j_n)$, что $\omega_{\min}(j_l) \geq \omega_{\max}(j_{l+1})$, $l = 1, \dots, n-1$, то каждая перестановка из Π^ω доставляет минимум функционалу $F(\pi, z)$ на множестве всех перестановок элементов множества N при любых значениях неопределенных параметров и $\pi^V \in \Pi^\omega$, если Π^ω не пусто.*

В работе [1] показано, что для некоторых приоритето-порождающих функционалов задача формирования перестановки, оптимальной относительно критерия Гурвица, сводится к упорядочению элементов множества N в соответствии со значениями некоторой функции при специальной фиксации значений неопределенных параметров. В таких ситуациях, как и в случае критерия Вальда, преобразование II можно использовать для улучшения качества получаемых вариантов. Более того, справедливы утверждения, аналогичные утверждению 2 и следствию 7.

Заключение

Рассмотрены задачи построения расписаний обслуживания требований в условиях неопределенности, когда значения некоторых числовых параметров требований не заданы, известны лишь множества их возможных значений, причем эти параметры не являются управляемыми. Показано, как методы, разработанные для детерминированных задач с приоритето-порождающими целевыми функционалами, могут быть использованы для элиминации вариантов в ситуации с неопределенными параметрами. Необходимо отметить, что отношения доминирования, порождаемые в результате использования преобразований II и аналогичных им носят специфический характер. Для описания этой специфики рассмотрим сначала стандартные отношения доминирования. Стандартные отношения определяются на множестве вариантов принимаемых решений и, если вариант x_1 доминирует вариант x_2, то это означает, что x_1 не хуже, чем x_2 при любых значениях неопределенных параметров. Соответственно, вариант x_2 можно безболезненно удалить из рассмотрения. В случае же рассматриваемых отношений доминирования картина имеет иной характер. Для доминируемого варианта x_2 не существует единственного варианта x_1, который не хуже, чем x_2 при любых значениях неопределенных параметров. Существует лишь такое множество вариантов X_1, что для любого конкретного набора z значений неопределенных параметров в X_1 найдется вариант, который не хуже, чем x_2 при данном наборе z. В результате, исключив из рассмотрения вариант x_2 и ему подобные, можно потерять то, что наиболее привлекательно для лица, принимающего решение: варианты, которые являются относительно хорошими при любом стечении обстоятельств (любых значениях неопределенных параметров). Результирующее множество вариантов при таком доминировании аналогично подмножеству множества Парето (в многокритериальной оптимизации), каждый элемент которого доставляет минимум ровно одному из критериев, игнорируя поведение остальных критериев.

Предложена схема использования преобразований II для улучшения качества вариантов, оптимальных относительно критерия Вальда (принципа гарантированного результата). Сформулированы необходимые и достаточные условия, при которых существует перестановка, доставляющая минимум строгому приоритето-порождающему функционалу при любых значениях неопределенных параметров. Для приоритето-порождающих функционалов, не являющихся строгими, эти условия являются достаточными.

Список литературы

1. Шафранский, Я.М. Задачи теории расписаний с неопределенными параметрами: направления исследований и некоторые результаты / Я.М. Шафранский // Информатика. – 2005. – № 3. – С. 5–15.
2. Танаев, В.С. Теория расписаний. Одностадийные системы / В.С. Танаев, В.С. Гордон, Я.М. Шафранский. – М. : Наука, 1984. – 384 с.
3. Танаев, В.С. Теория расписаний. Групповые технологии / В.С. Танаев, М.Я. Ковалев, Я.М. Шафранский. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1998. – 290 с.
4. Shafransky, Y.M. Construction of all optimal permutations under precedence constraints / Y.M. Shafransky, A.V. Tuzikov // Тр. Института математики. – 2001. – Т. 8. – С. 106–113.
5. Егорова, Н.Г. Минимизация суммы взвешенных моментов завершения обслуживания требований с интервальными длительностями / Н.Г. Егорова, Ю.Н. Сотсков // Информатика. – 2008. – № 3. – С. 5–116.
6. Leshchenko, N.M. Realization of an optimal schedule for the two-machine flow-shop with interval job processing times / N.M. Leshchenko, Yu.N. Sotskov // Information Theories and Applications. – 2007. – Vol. 14, № 2. – P. 182–189.
7. Shafransky, Y. Scheduling jobs with uncertain parameters: analysis of research directions / Y. Shafransky // Operations Research Proceedings / Eds.: H.-D. Haasis, H. Kopfer, J. Schoenberger. – Springer, 2006. – P. 709–714.

Поступила 04.12.08

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: shafr@newman.bas-net.by

Y.M. Shafransky

SCHEDULING PROBLEMS WITH UNCERTAIN PARAMETERS: PRIORITY-GENERATING FUNCTIONALS

The paper considers the problem of scheduling jobs under the assumption that values of some job parameters are unknown, only sets of their possible values are given and the parameters are uncontrollable. An extension for the uncertainty situation of methods that had been developed for deterministic problems with priority-generating objective functionals is discussed. Application of these methods for enhancing the quality of variants generated by minimax principle is proposed.