ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 51-7

Поступила в редакцию 11.09.2018
Received 11.09.2018

Принята к публикации 15.01.2019
Accepted 15.01.2019

Оценивание методом рейтинга

В. М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь
E-mail: Romanchak@bntu.by

Аннотация. Приводится классическое определение рейтинга и с его помощью уточняется математическая модель нахождения значений величины объектов. Рейтинг позволяет с единых позиций рассматривать как объективные, так и субъективные измерения. Если предположить, что некоторая последовательность объектов упорядочена по величине и эта величина изменяется равномерно, то для такой последовательности в качестве рейтинга можно выбрать номер объекта.
Аксиоматическое определение рейтинга опирается на математическую модель измерения. Формализация процесса измерения произвольной величины начинается с уточнения понятия измерения. В ходе измерения сравниваются размеры объектов, аксиоматически определяется матрица парных сравнений, на основании которой находится рейтинг. Зная рейтинг, можно найти значения величины. Далее с помощью рейтинга анализируются законы Фехнера и Стивенса. Эквивалентность законов Фехнера и Стивенса является подтверждением алгоритма определения значений измеряемой величины на основании рейтинга.
Субъективный метод нахождения рейтинга требует особого способа проверки надежности получаемой информации. Проверку надежности субъективного измерения предлагается выполнять методом альтернатив. В методе альтернатив каждый объект сравнивают с двумя альтернативными объектами. Критерием надежности субъективного измерения выступает статистическое совпадение значений рейтингов, полученных альтернативными способами сравнения.

Ключевые слова: экспертные оценки, рейтинг, закон Фехнера, закон Стивенса, функция полезности

Для цитирования. Романчак, В. М. Оценивание методом рейтинга / В. М. Романчак // Информатика. – 2019. − Т. 16, № 2. – С. 52–61.

Measurement by the method of rating

Vasily M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus
E-mail: Romanchak@bntu.by

Abstract. The definition of rating is given and mathematical model of finding the values of object quantity by means of rating is specified. With the help of the rating it is possible to consider both objective and subjective measurements from a single point of view. If, as example, some sequence of objects is sorted by a varying uniformly magnitude an object number in the sequence could be considered as the rating.
The axiomatic definition of the rating is based on a mathematical model of measurement. The formalization of the process of measuring an arbitrary value begins with a clarification of the concept of measurement. During the measurement, the sizes of objects are compared, the matrix of paired comparisons is axiomatically determined, on the basis of this matrix the rating is located. Knowing the rating you can find the value. Then by means of a rating the laws of Fechner and Stevens are analyzed. The equivalence of Fechner and Stevens laws is a confirmation of the algorithm for determining the values of the measured value based on the rating.
The subjective method of finding the rating requires a special method of checking the reliability of the information received. Verification of the reliability of the subjective measurement is proposed to perform the method of alternatives. In the alternatives method, each object is compared twice, and different objects are

selected as the object for comparison. The criterion of reliability of subjective measurement is the statistical coincidence of rating values obtained by alternative methods of comparison.

Keywords: expert estimates, rating, Fechner's law, Stevens law, utility function

For citation. Romanchak V. M. Measurement by the method of rating. *Informatics*, 2019, vol. 16, no 2, pp. 52–61.

Введение. В классической теории измерений множество объектов эмпирической системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отображается с помощью функции $q_i = q(A_i)$ на множество значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ числовой системы таким образом, что отношения между числами предопределяют отношения между объектами. При этом выбор типа шкалы зависит от вида и свойств функции q [1]. В настоящей работе рассматривается рейтинговая модель измерения [2, 3]. Это означает, что функция отображения q строится как композиция двух функций: $q_i = q(r(A_i))$. Вначале объекты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отображаются на промежуточное множество числовых значений (значения рейтинга) функцией $r_i = r(A_i)$ с сохранением отношения между самими объектами. Шкала значений рейтинга r фиксирована. Далее множество значений рейтинга $r_1, r_2, \ldots, r_n$ отображается на множество числовых значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ функцией $q_i = q(r_i) = q(r(A_i))$. При этом вид шкалы числовых значений определяется видом и свойствами функции $q(r)$. Введение рейтинга позволяет отделить процесс измерения величины от выбора шкалы измерения. В статье уточняется математическая модель измерения методом рейтинга [2, 3] и рассматривается метод альтернатив [4], который позволяет проверить надежность рейтинговых оценок.

Классическое определение рейтинга. Чтобы подчеркнуть особенность рейтинговой модели, обратимся к теории вероятностей.

В определении классической вероятности аксиоматически определяются понятия события и равновозможных событий. Например, при подбрасывании кубика эксперт может интуитивно считать, что грани кубика достаточно симметричны и будут выпадать с одинаковой вероятностью. Для того чтобы измерить произвольную величину, введем аксиоматически понятия пар объектов и равных по величине пар объектов. Будем считать, что величина объектов изменяется равномерно, если последовательные пары объектов одинаковы по величине. Величина последовательных пар объектов может быть определена как объективными, так и субъективными методами парных сравнений. Приведем примеры последовательностей таких объектов:

1. Положим на левую чашу равноплечных весов груз m_1 и груз с неизвестной массой M и уравновесим грузом m_2 на правой чаше. Далее груз m_2 положим на левую чашу весов вместо груза m_1, уравновесим грузом m_3 и т. д. Абсолютное изменение массы объектов $m_1, m_2, m_3, \ldots$ будет равномерным: $m_2 - m_1 = m_3 - m_2 = \ldots$.

2. С помощью разноплечных весов построим последовательность объектов. Для этого положим на левую чашу разноплечных весов груз m_1 и уравновесим грузом m_2, далее положим груз m_2 на левую чашу весов вместо груза m_1, уравновесим грузом m_3 и т. д. Относительное изменение массы объектов $m_1, m_2, m_3, \ldots$ будет равномерным: $(m_2 - m_1)/m_1 = (m_3 - m_2)/m_2 = \ldots$.

3. Подберем объекты $m_1, m_2, m_3, \ldots$, субъективное изменение веса которых равномерно, с точки зрения эксперта.

Первые две последовательности получены с помощью объективного сравнения последовательных пар, третья последовательность получена субъективным оцениванием.

Предполагается, что можно построить последовательность объектов, величина которых изменяется равномерно. Порядковый номер объекта в такой последовательности будем называть рейтингом. Сравнение размеров опытным путем является единственным способом получения измерительной информации. Основных способов численного сравнения размеров всего два: разность размеров и отношение размеров величины [5]. Используется либо первый либо второй способ. Отметим, что здесь речь идет о размере величины как объективной характеристике. Значения величины появляются уже после измерения в результате обработки результатов измерения. Пусть для объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ величина Q принимает значения q_i, $q_i = q(A_i)$. Можно предположить, что если величина Q для последовательности объектов изменяется равномерно, то разности (или отношения) последовательных значений величины постоянны. Для определенности считаем, что значения величины Q расположены в порядке возрастания. Это означает, что будут выполняться равенства:

– для первого способа сравнения

$$q_{i+1} - q_i = \lambda,\ \ q_i,\ \ q_{i+1} \in R,\ \ \lambda > 0;$$

– для второго способа сравнения

$$\ln(q_{i+1}/q_i) = \lambda,\ \ q_i,\ \ q_{i+1} \in R^+,\ \ \lambda > 0,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n - 1$; λ – неизвестная постоянная; R – множество всех действительных чисел; R^+ – множество всех положительных чисел.

Следовательно, если выбран первый способ сравнения, то верно выражение

$$q_i - q_j = d_{ij},\ \ q_i,\ \ q_j \in R,\ \ \lambda > 0, \tag{1}$$

если выбран второй способ, то выражение

$$\ln(q_i/q_j) = d_{ij},\ \ q_i,\ \ q_j \in R^+,\ \ \lambda > 0, \tag{2}$$

где $d_{ij} = \lambda(r_i - r_j)$, $r_i = i$, $r_j = j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$; λ – неизвестная постоянная.

Значение $d_{i,j}$ будем называть элементом матрицы парных сравнений D, функцию $r_i = r(A_i)$ – рейтингом, r_i – рейтингом объекта A_i, в рассматриваемом случае $r_i = i$. Можно сформулировать обратную задачу: найти значения величины Q, если на основании наблюдений известна матрица парных сравнений и не определен способ сравнения (либо первый (1) либо второй (2)).

Определение 1. Пусть величина объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ изменяется равномерно. Выполняется равенство (1) или (2), где $d_{ij} = \lambda(r_i - r_j)$, $r_i = i$, $r_j = j$, $\lambda > 0$, λ – неизвестная постоянная, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $q_i = q(A_i)$ – значения величины Q; d_{ij} – матрица парных сравнений. Тогда отображение $r_i = r(A_i) = i$ будем называть рейтингом объекта.

Последовательность значений q_i, $i=1, 2, \ldots, n$, является в первом случае арифметической, а во втором случае геометрической прогрессией.

Таким образом, сформулировано классическое определение рейтинга и дано определение двух способов нахождения значений величины. Чтобы перейти к аксиоматическому определению рейтинга, необходимо определить модель получения измерительной информации.

Аксиоматическое определение рейтинга. Существуют два основных варианта численного сравнения размеров: сравнивают или отношения или разности размеров [5]. Измерить величину можно любым из них. Выберем разность размеров в качестве единственного способа получения измерительной информации. Будем считать, что на множестве пар объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можно определить действительную функцию парного сравнения $d_{ij} = d(A_i, A_j)$, для которой выполняется условие

$$d_{ij} = d_{ik} - d_{jk}, \tag{3}$$

где d_{ij} – элемент матрицы парных сравнений D, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Если определена матрица парных сравнений d_{ij}, которая удовлетворяет условию (3), то существует решение системы уравнений

$$\lambda d_{ij} = r_i - r_j, \tag{4}$$

где $\lambda > 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, в качестве решения можно выбрать $r_i = d_{i1} = \lambda d(x_i, x_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Назовем функцию $r(A_i)$ рейтингом, а значение функции $r_i = r(A_i)$ – значениями рейтинга. Рейтинг определен с точностью до линейного преобразования, он характеризует размер объекта в шкале интервалов.

Определение 2. Если величина объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ изменяется равномерно, то верно выражение

$$d(A_1, A_2) = d(A_2, A_3) = \ldots = d(A_{n-1}, A_n) = \alpha, \tag{5}$$

причем $\alpha \neq 0$. Если величина объектов не изменяется, то в выражении (5) $\alpha = 0$.

Определение измерения в виде (3) позволяет отделить процесс измерения от процесса выбора шкалы измерения.

Значения величины. В качестве значения величины объекта A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, если определен рейтинг, возьмем значение рейтинга $r_i = r(A_i)$. Тогда можно сравнивать значения величин любых двух объектов как разность двух рейтингов $r(A_i)$, и это не единственный способ сравнения значений. Например, можно сравнить разницу в массе двух грузов m_1 и m_2 или, после замены переменных $m_1 = \ln(q_1)$ и $m_2 = \ln(q_2)$, перейти от разности m_1 и m_2 к отношению значений q_1 и q_2: $m_1 - m_2 = \ln(q_1 / q_2)$. Отношение значений q_1 и q_2 является вторым способом сравнения массы тела. Переход ко второму способу сравнения возможен благодаря изоморфизму $\ln(x)$, который существует между множеством всех вещественных чисел с заданной операцией вычитания и множеством положительных чисел с операцией деления. Согласно теории алгебры изоморфные группы имеют одни и те же свойства и их можно не различать. Это означает, что можно выбрать субъективно более привычный способ сравнения, но нельзя выбрать объективно лучший способ. Следовательно, при объективном измерении величины нет приоритета при выборе способа сравнения. Непосредственно значения величины при субъективном методе измерения обычно получить нельзя, способ сравнения в этом случае не определен. Поэтому будем считать, что при любом способе измерения значения величины определены с точностью до изоморфизма и следует рассматривать один из двух способов нахождения значений величины Q: либо $q(A) = r(A)$, $q(A) \in R$, либо $q(A) = \exp(r(A))$, $q(A) \in R^+$.

Определение 3. Пусть определен рейтинг объектов A_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Значения величины – это числовая функция $q_i = q(A_i)$, определенная на множестве объектов A_i, $i=1, 2, \ldots, n$, для которой в зависимости от способа сравнения выполняется или разница

$$q_i - q_j = d_{ij} \tag{6}$$

или отношение

$$\ln(q_i / q_j) = d_{ij}, \tag{7}$$

где $\lambda d_{ij} = r(A_i) - r(A_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, λ – неизвестная постоянная. При этом способ сравнения выбирается априори.

Итак, если найден рейтинг величины объекта, то можно произвольно выбрать способ сравнения и найти значения величины с помощью выражения (6) или (7). В определении 3 отражена особенность измерения величины с помощью рейтинга. Первичным является рейтинг, значения величины определяются как функция рейтинга. Таким образом отделяется процесс измерения величины от выбора шкалы измерения, как это делает человек, вначале отсчитывая количество делений на шкале прибора, а потом переводя количество делений в значение измеряемой величины.

Пример 1. Пусть для множества объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ величина Q изменяется равномерно: $r(A_{i+1}) - r(A_i) = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, $q_{i+1} - q_i = \lambda$ или $\ln(q_{i+1} / q_i) = \lambda$ для $i = 1, \ldots, n-1$, λ – неизвестные постоянные.

Выполняется следующий порядок действий:

1) составляется матрица парных сравнений;
2) определяется рейтинг;
3) априори выбирается способ сравнения;
4) определяются значения величины.

При этом рейтинг величины может быть найден на основании парных сравнений. Парные сравнения можно проводить объективным или субъективным методом. Для физической величины способ вычисления ее значений определяется так, что массу тела принято считать аддитивной, а не мультипликативной величиной.

Если величина объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ изменяется равномерно, то ее рейтинг $r_i = i$, а последовательность значений величины будет арифметической или геометрической. Этот случай соответствует классической схеме определения рейтинга. Определение рейтинга применимо к психофизическим законам Фехнера и Стивенса [1].

Законы Фехнера и Стивенса. Пусть для объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ объективно получены значения величины $u_i = u(A_i)$, $u_i > 0$. Экспериментальный закон Фехнера связывает значения величины u_i, $i=1, 2, \ldots, n$, полученные объективно, и значения величины $q_i = q(A_i)$, полученные субъективно. Закон Фехнера можно записать в виде

$$q_i - q_j = h\ln(u_i / u_j), \ q_i, q_j \in R, \ h > 0, \tag{8}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; h – известная постоянная, экспериментально определяемая для каждой физической величины; u_i – объективные значения величины Q; q_i – субъективные значения величины Q. Закон Фехнера соответствует способу сравнения (1), если для формирования матрицы парных сравнений d_{ij} применяется формула

$$d_{ij} = h\ln(u_i / u_j). \tag{9}$$

Закон Стивенса имеет вид

$$\ln(q_i / q_j) = h\ln(u_i / u_j), \ q_i, q_j \in R^+, \ h > 0, \tag{10}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$; h – известная постоянная. Закону Стивенса соответствует способ сравнения (2), если d_{ij} – матрица парных сравнений (9). Используя закон Фехнера (8) и равенство (6), получим зависимость

$$\lambda(r_i - r_j) = \ln(u_i / u_j), \lambda > 0, \tag{11}$$

где $r_i = r(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $r_j = r(A_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$; λ – неизвестная постоянная. С другой стороны, если использовать закон Стивенса (10) и зависимость (7), получим это же соотношение (11). Следовательно, если эксперт правильно оценил рейтинг, будет выполняться соотношение (11) и, выбрав способ сравнения (6) или (7), можно найти значения величины Q. Данный результат соответствует алгоритму получения значений величины на основании рейтинга. Проиллюстрируем алгоритм измерения упрощенным примером. Выберем объекты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, чтобы их величина изменялась равномерно с точки зрения эксперта. Пусть исследователь просит эксперта оценить, на сколько второй объект больше первого. Эксперт отвечает: «На условную единицу». Аналогично сравним третий объект со вторым. Поскольку величина объектов A_1, A_2, A_3 изменяется равномерно, эксперт должен ответить, что третий объект так же, как и первый, на условную единицу больше второго. Следовательно, выполняется $q_2 - q_1 = 1$ и $q_3 - q_2 = 1$. Продолжив сравнивать объекты, получим $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$, …, $q_n = n$ с точностью до константы. Допустим, что исследователь спрашивает эксперта: «Во сколько раз второй объект больше первого?» Эксперт отвечает: «В два раза». (Здесь эксперт может назвать любое другое число.) Это означает, что для выбранного исследователем способа сравнения выполняется $q_2/q_1 = 2$. Если исследователь попросит сравнить второй и третий объекты, то окажется, что $q_3/q_2 = 2$, поскольку величина объектов A_1, A_2, A_3, с точки зрения эксперта, изменяется равномерно. Продолжая сравнивать, получим $q_1 = 2^1$, $q_2 = 2^2$, $q_3 = 2^3$, …, $q_n = 2^n$ с точностью до постоянного множителя. При этом независимо от вопроса исследователя рейтинг объекта оценивается одинаково: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, …, $r_n = n$. Таким образом, эксперт действительно оценивает рейтинг, а исследователь на основании рейтинга находит значения величины (в полном соответствии с алгоритмом нахождения значений величины по рейтингу). В первом случае исследователь получит, на сколько единиц больше оцениваемое значение, а во втором случае – на сколько порядков больше.

Надежность оценивания рейтинга. Надежностью называют один из критериев качества теста, его устойчивость по отношению к погрешностям измерения. Различают два вида надежности экспертных оценок: надежность как устойчивость и надежность как внутренняя согласованность [6]. Устойчивость экспертных оценок – это возможность получения одинаковых ответов эксперта при повторном проведении тестирования. Внутренняя согласованность определяется связью каждого конкретного элемента теста с общим результатом. В данной работе ограничимся оценкой устойчивости результатов теста к повторному тестированию.

При экспертном опросе бывает сложно определить, надежно ли предлагаемое измерение, поскольку значения переменных, которые необходимо найти, могут с течением времени изменяться под влиянием опыта или настроения эксперта. Когда ответы меняются, сложно отличить случайную ошибку от реального изменения мнения. Принято считать, что тестирование надежности следует проводить через максимально короткие промежутки времени. На первый взгляд, достаточно через короткий промежуток времени задать один и тот же вопрос и, если ответы эксперта не изменятся, измерение можно считать надежным. Однако субъективное измерение имеет свои особенности. Если промежуток времени небольшой и эксперт вспомнит свое предыдущее заключение, то, чтобы не выглядеть некомпетентным, он повторит свои ответы. Пытаясь избежать такого эффекта, можно повторить опрос через значительный промежуток времени. В этом случае имеют место организационные трудности, связанные с проведением повторного тестирования. Кроме того, мнение эксперта может измениться и тогда непонятно, как отличить устойчивое изменение мнения от случайной ошибки. Указанная проблема привела к созданию теста на надежность, который иногда называют методом альтернативной формы [6]. В соответствии с данным методом разные формы вопросов применяются к одной и той же группе объектов. В этом случае вопросы не повторяются, а задаются по-разному. В связи с тем что измерения не отделены друг от друга большим промежутком времени, их результаты заслуживают большего доверия. Отмечается, что успех такого подхода зависит от того, насколько хорошо сопоставимы друг с другом результаты, полученные с помощью альтернативных форм [6]. Если результаты измерений сопоставимы и близки, то появляется основание считать такое измерение надежным. Предлагается надежность нахождения рейтинга проверять с помощью варианта метода альтернативных форм, который назовем методом альтернатив. Частный случай метода альтернатив рассматривается в работе [4].

Особенности метода альтернатив:

1. Объекты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ сравниваются попарно по величине и находятся некоторые элементы матрицы парных сравнений d_{ij}.

2. Парные сравнения проводятся последовательно: новый объект (из числа тех, что еще не выбирались) сравнивается с одним из двух объектов, которые участвовали в предыдущем сравнении.

3. Парные сравнения группируются в две альтернативные формы.

4. На основании альтернативных форм составляются две альтернативные системы линейных уравнений.

5. Решаются альтернативные системы уравнений и находятся рейтинги r_{1i} и r_{2i}, $i = 1, \ldots, n$.

6. Сопоставляются значения рейтинга r_{1i} и r_{2i}, $i = 1, \ldots, n$, и принимается или отвергается гипотеза о надежности измерения.

Возможны различные варианты реализации метода альтернатив, так как новый объект в каждой паре может выбираться произвольно. Чтобы сформулировать метод альтернатив в общем виде, понадобится определение альтернативной системы линейных уравнений.

Альтернативные системы. Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений вида

$$M(x) = B, \tag{12}$$

где M – матрица коэффициентов системы линейных уравнений, x – вектор неизвестных, а вектор-столбец B − некоторый заданный вектор.

Определение 4. Выберем в системе линейных уравнений (12) строки, которые содержат базисный минор. Такую подсистему линейных уравнений будем называть альтернативной системой.

Число различных альтернативных систем в общем случае конечно. Рассмотрим для системы (12) все альтернативные системы $M_i(x) = B_i$, где M_i – матрица коэффициентов альтернативной системы линейных уравнений; x – вектор неизвестных; B_i – заданный вектор альтернативной системы, $i = 1, \ldots, m$, m – число различных альтернативных систем системы (12). Множество альтернативных систем линейных уравнений образует систему линейных уравнений

$$\begin{cases} M_1(x) = B_1, \\ M_2(x) = B_2, \\ \ldots \\ M_m(x) = B_m, \end{cases} \tag{13}$$

которая эквивалентна системе линейных уравнений (12). Если некоторые пары альтернативных систем неэквиваленты, то решения системы линейных уравнений (13) не существует. Если любые две альтернативные системы эквивалентны, то система (13) совместна. В отличие от исходной системы линейных уравнений (12) решение альтернативной системы всегда существует.

Теорема. *Система линейных уравнений (12) эквивалентна системе (13) тогда и только тогда, когда все альтернативные системы эквивалентны.*

Поскольку системы (12) и (13) эквиваленты, то теорема доказана. Вместо того чтобы рассматривать все альтернативные системы, можно выбрать только две из них и проверить эквивалентность. Если системы эквивалентны, то можно предположить, что это неслучайно.

Метод альтернатив. Рассмотрим систему линейных уравнений (4), где r_i , r_j – неизвестные значения рейтинга, подлежащие определению, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$; λ – произвольная постоянная, $\lambda > 0$; d_{ij} – известный вектор правых частей. Докажем, что система уравнений

$$d_{i+1,i} = \lambda(r_{i+1} - r_i), \ \ i = 1, 2, \ldots, n - 1, \tag{14}$$

является альтернативной по отношению к системе уравнений (4). Действительно, система линейных уравнений (14) является подсистемой системы уравнений (4) и любое уравнение системы (4) будет линейной комбинацией строк системы уравнений (14), так как

$$r_i - r_j = (r_i - r_{i-1}) + (r_{i-1} - r_{i-2}) + \ldots + (r_2 - r_1) - (r_j - r_{j-1}) - (r_{j-1} - r_{j-2}) - \ldots - (r_2 - r_1)$$

и

$$\lambda(r_{i+1} - r_i) = d_{i,i-1} + d_{i-1,i-1} + \ldots + d_{2,1} - d_{j,j-1} - d_{j-1,j-2} - \ldots - d_{2,1} = d_{i,1} - d_{j,1} = d_{i,j}.$$

Таким образом доказано, что система линейных уравнений (14) является альтернативной к системе уравнений (4). Также можно показать, что система уравнений

$$d_{i+1,1} = \lambda(r_{i+1} - r_1), \ \ i = 1, 2, \ldots, n - 1, \tag{15}$$

является подсистемой системы уравнений (4), альтернативной к системе уравнений (4). Аналогично можно рассматривать и другие альтернативные системы. Чтобы составить систему уравнений (4) и получить все альтернативные системы, необходимо найти все элементы матрицы парных сравнений d_{ij}. Для этого следует провести $n(n–1)/2$ парных сравнений. С целью минимизации объема экспериментальной работы будем рассматривать только альтернативные системы M_1 и M_2. В этом случае достаточно провести $2(n–1)$ парных сравнений.

Сформулируем эмпирический критерий K_1 надежности оценок рейтинга, используя альтернативные системы. Оценки рейтинга надежны, если решения альтернативных систем M_1 и M_2 связаны статистически значимой адекватной возрастающей линейной зависимостью:

$$r_{i2} = a_1 r_{i1} + a_0 + \varepsilon_i,$$

где $i = 1, \ldots, n$; a_1, a_0 – неизвестные постоянные, $a_1 \neq 0$; ε_i – случайные ошибки, независимые, нормально распределенные случайные величины с математическим ожиданием $E(\varepsilon_i)=0$ и постоянной дисперсией; r_{i1} *и* r_{i2} – значения рейтинга (решения первой и второй альтернативных систем).

В дальнейшем второй индекс в обозначении значений рейтинга r_{i1} и r_{i2} будем пропускать, если это не создает трудности для понимания. В качестве альтернативных систем M_1 и M_2 можно рассматривать системы уравнений (14) и (15), причем константа λ для каждой из систем выбирается произвольно.

Чтобы найти рейтинг, можно использовать готовые результаты парных сравнений метода анализа иерархий [7]. Рассмотрим пример из работы [8] и применим метод альтернатив для анализа надежности оценок рейтинга.

Пример 2. Построим функцию принадлежности нечеткого множества «высокий мужчина» на универсальном множестве M = {170, 175, 180, 185, 190, 195}. Парные сравнения представим в виде матрицы H_i/H_j [8]

	170	**175**	**180**	**185**	**190**	**195**
170	1	1/2	1/4	1/6	1/8	1/9
175	2	1	1/3	1/5	1/7	1/8
180	4	3	1	1/4	1/4	1/5
185	6	5	4	1	1/3	1/3
190	8	7	4	3	1	1
195	9	8	5	3	1	1

Функцией принадлежности называется функция, которая позволяет вычислить степень принадлежности произвольного элемента универсального множества к нечеткому множеству. Исходной информацией для построения функций принадлежности являются экспертные парные сравнения. Для каждой пары элементов универсального множества эксперт оценивает преимущество одного элемента над другим. Поэтому можно построить вместо функции принадлежности рейтинг элементов универсального множества. Рейтинг, в отличие от функции принадлежности, определен с точностью до линейного преобразования. Элементы матрицы парных сравнений h_{ij} (h_{ij} − уровень преимущества элемента H_i над H_j по девятибалльной шкале Саати [8]) представлены в таблице. Например, элемент 195 в последней строке матрицы соответствует мужчине с ростом 195 см, элемент 170 во втором столбце таблицы – мужчине с ростом 170 см. Если h_{61} = 9, то рейтинг мужчины с ростом 195 см относится к рейтингу мужчины с ростом 170 см как 9 к 1. Соответственно, запись h_{61} = 1/9 означает, что рейтинг мужчины с ростом 170 см относится к рейтингу мужчины с ростом 195 см как 1 к 9. Выберем две альтернативные формы парных сравнений (14) и (15) и на основании матрицы парных сравнений составим таблицу. В третьем и четвертом столбцах таблицы находятся две альтернативные системы линейных уравнений, для которых определены разности значений рейтингов. Например, если в матрице стоит отношение значений рейтингов 9/1, то в таблице находится разность значений 9 − 1.

Проверка надежности рейтинговых оценок

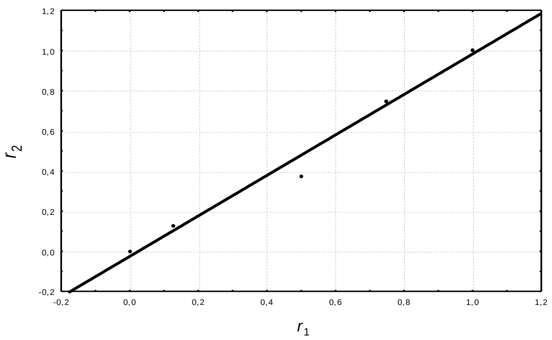
Значение i	Рост, H_i	Альтернативные системы		Рейтинги систем		Нормализованные рейтинги систем	
		M_1, $r_6 - r_i$	M_2, $r_{i+1} - r_i$	M_1, r_i	M_2, r_i	M_1, r_i	M_2, r_i
1	170	9 − 1	2 − 1	0	0	0,00	0,00
2	175	8 − 1	3 − 1	1	1	0,13	0,13
3	180	5 − 1	4 − 1	4	3	0,50	0,38
4	185	3 − 1	3 − 1	6	6	0,75	0,75
5	190	1 − 1	1 − 1	8	8	1,00	1,00
6	195	0	−	8	8	1,00	1,00

Получим следующие разности значений рейтингов альтернативных систем M_1 и M_2 соответственно:

$$r_6 - r_1 = 8,\ r_6 - r_2 = 7,\ r_6 - r_3 = 4,\ r_6 - r_4 = 2,\ r_6 - r_5 = 0;$$

$$r_2 - r_1 = 1,\ r_3 - r_2 = 2,\ r_4 - r_3 = 3,\ r_5 - r_4 = 2,\ r_6 - r_5 = 0.$$

Частные решения альтернативных систем при дополнительном условии $r_1 = 0$ расположены в пятом и шестом столбцах таблицы. При решении альтернативных систем можно предполагать, что $r_1 = 0$ и $r_6 = 1$, поскольку рейтинг определен с точностью до линейного преобразования. Константа λ в каждой из систем выбирается произвольно, хотя в данном случае константы совпали. С учетом преобразования получены нормализованные значения рейтингов r_1 и r_2, которые находятся в седьмом и восьмом столбцах таблицы (рисунок).



Зависимость рейтинга r_2 от рейтинга r_1

Визуальный анализ графика показывает, что данные сгруппированы вблизи прямой $r_2 = -0{,}0256 + 1{,}008r_1$, причем значения статистики Фишера $F(1{,}4) = 291{,}89$ с p-уровнем 0,00007 подтверждают гипотезу об адекватности модели. Кроме того, коэффициент детерминации R^2 показывает, что на 98,6 % линейная регрессия объясняет зависимость между рейтингами r_2 и r_1. Отсюда следует вывод, что измерение рейтинга надежно.

Заключение. В работе представлены аксиоматическая модель рейтинга и последовательность нахождения значений величины по ее рейтингу. Обоснован метод проверки надежности рейтинговых оценок – метод альтернатив. Математическую модель рейтинга и метод альтернатив можно использовать в задачах принятия решений, распознавания образов и управления качеством.

Список использованных источников

1. Гусев, А. Н. Психологические измерения. Теория. Методы / А. Н. Гусев, И. С. Уточкин. – М. : Аспект Пресс, 2011. – 317 с.

2. Романчак, В. М. Измерение нефизической величины / В. М. Романчак // Системный анализ и прикладная информатика. – 2017. – № 4. – С. 39–44.

3. Романчак, В. М. Субъективное оценивание вероятности / В. М. Романчак // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 74–82.

4. Методы менеджмента качества. Методология управления риском стандартизации / П. С. Серенков [и др.]. – Минск : Новое знание; М. : ИНФРА-М, 2014. – 256 с.

5. Шишкин, И. Ф. Теоретическая метрология : учебник для вузов : в 2 ч. / И. Ф. Шишкин. – Ч. 1 : Общая теория измерений. – СПб. : Питер, 2010. – 192 с.

6. Мангейм, Дж. Б. Политология. Методы исследования : пер. с англ. / Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич. – М. : Весь Мир, 1997. – 544 с.

7. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий : пер. с англ. / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.

8. Штовба, С. Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику / С. Д. Штовба. – Винница : Континент-Прим, 2003. – 198 с.

References

1. Gusev A. N., Utochkin I. S. Psikhologicheskie izmereniia. Teorija. Metody. *Psychological Measurements. Theory. Methods*. Moscow, Aspekt Press, 2011, 317 p. (in Russian).

2. Romanchak V. M. Izmerenie nefizicheskoj velichiny [Model of rating of non physical quantity]. Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika [*System Analysis and Applied Informatics*], 2017, no. 4, pp. 39–44 (in Russian).

3. Romanchak V. M. Subjektivnoe ocenivanie verojatnosti [The measurement of subjective probability]. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 2, pp. 74–82 (in Russian).

4. Serenkov P. S., Gurevich V. L., Romanchak V. M., Janushkevich A. V. Metody menedzhmenta kachestva. Metodologija upravlenija riskom standartizacii. *Quality Management Methods. Methodology of Management of Risk of Standartization*. Minsk, Novoe znanie, Moscow, INFRA-M, 2014, 256 p. (in Russian).

5. Shishkin I. F. Teoreticheskaia metrologiia. Chast' 1. Obshhaja teorija izmerenij [*Theoretical Metrology. Part 1. General Theory of Measurements*]. Saint Petersburg, Piter, 2010, 192 p. (in Russian).

6. Manheim J. B., Rich R. C. *Empirical Political Analysis.* London, Longman, 1995, 162 p.

7. Saaty T. L. The Analytic Hierarchy Process. New York, McGraw Hill, 1980.

8. Shtovba S. D. Vvedenie v teoriju nechetkih mnozhestv i nechetkuju logiku. *Introduction to Fuzzy Set Theory and Fuzzy Logic*. Vinnitsa, Kontinent-Prim, 2003, 198 p. (in Russian).

Информация об авторе

Романчак Василий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной математики, Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь.
E-mail: Romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof. of the Department of Engineering Mathematics, Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus.
E-mail: Romanchak@ bntu.by