ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 519.711

Поступила 30.08.2018
Received 30.08.2018

Ю. В. Поттосин

*Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД МНОГОБЛОЧНОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Описывается эвристический метод многоблочной параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций, минимизирующий число функций, которые составляют искомую суперпозицию. При этом накладывается ограничение на число аргументов получаемых функций. Метод предполагает задание функций в интервальной форме, т. е. в виде пары троичных матриц. Одна из матриц представляет интервалы булева пространства аргументов (матрица интервалов), другая матрица – значения функций на этих интервалах (матрица функций). Рассматриваются графы ортогональности строк указанных матриц, и задача декомпозиции функций сводится к задаче о кратчайшем покрытии множества ребер графа ортогональности строк матрицы функций полными двудольными подграфами (бикликами) графа ортогональности строк матрицы интервалов. Каждой биклике приписывается определенным образом дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), и рассматриваются только те биклики, у которых соответствующие ДНФ имеют элементарные конъюнкции ранга, не превышающего границы числа аргументов получаемых функций. Биклики, составляющие искомое покрытие, и само покрытие формируются последовательно по определенным правилам. По каждой из этих биклик строится функция, аргументами которой являются переменные из элементарной конъюнкции минимального ранга соответствующей ДНФ. Получаемые функции представляются также в интервальной форме.

Ключевые слова: система булевых функций, декомпозиция булевых функций, интервальное задание булевых функций, задача о покрытии, полный двудольный подграф графа

Для цитирования. Поттосин, Ю. В. Эвристический метод многоблочной параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 109–116.

Yu. V. Pottosin

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

A HEURISTIC METHOD FOR MULTI-BLOCK PARALLEL DECOMPOSITION OF A SYSTEM OF PARTIAL BOOLEAN FUNCTIONS

Abstract. A heuristic method for multi-block parallel decomposition of a system of partial Boolean functions is described. The method minimizes the number of functions forming the required superposition. The restriction on the number of arguments of the obtained functions is imposed. The method involves the specification of functions by interval form i. e. in the form of a pair of ternary matrices. One of the matrices represents intervals of Boolean space of the arguments (matrix of intervals), the other one represents the values of the functions at these intervals (matrix of functions). The graphs of rows orthogonality of those matrices are considered. The problem of functions decomposition is reduced to covering the edge set of the rows orthogonality graph of the matrix of functions by complete bipartite subgraphs (bicliques) of the row orthogonality graph of the matrix of intervals. Every biclique is assigned with a disjunctive normal form (DNF) by a certain way, and only those bicliques are taken into consideration whose DNFs have terms with the ranks not more than the bounds of the number of arguments of the obtained functions. The bicliques that form the desired cover and the cover itself are constructed sequentially by certain rules. Every biclique is used to construct the function whose arguments are the variables from the term of minimum rank from the corresponding DNF. The obtained functions are given also in interval form.

Key words: system of Boolean functions, Boolean function decomposition, interval representation of Boolean functions, cover problem, complete bipartite subgraph

For citation. Pottosin Yu. V. A heuristic method for multi-block parallel decomposition of a system of partial Boolean functions. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 109–116 (in Russian).

Введение. Задача декомпозиции системы булевых функций состоит в том, чтобы представить заданную систему функций в виде суперпозиции более простых функций. Фактически реализация булевой функции схемой из логических элементов, или синтез комбинационной схемы, сводится к задаче декомпозиции, когда получаемая суперпозиция должна содержать функции, реализуемые отдельными логическими элементами. Задача декомпозиции булевых функций, успешное решение которой непосредственно влияет на качество и стоимость проектируемых цифровых устройств, является одной из важных и сложных задач области логического проектирования. Декомпозиция системы булевых функций, описывающей поведение некоторого дискретного устройства, ведет к разбиению его на отдельные блоки, что облегчает дальнейшую процедуру логического синтеза. В настоящей статье данная задача рассматривается в следующей постановке.

Задана система частичных (не полностью определенных) булевых функций в виде векторной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), ..., f_m(\boldsymbol{x}))$, где компонентами вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ являются булевы переменные, составляющие множество X. Требуется найти суперпозицию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{\varphi}(g_1(\boldsymbol{z}_1), g_2(\boldsymbol{z}_2), \ldots, g_k(\boldsymbol{z}_k))$, где $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \ldots, \boldsymbol{z}_k$ – векторные переменные, компонентами которых служат переменные из подмножеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ (возможно, пересекающихся) множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а символ $\leq$ обозначает отношение реализации, т. е. значения компонент $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ векторной функции $\boldsymbol{\varphi}$ совпадают со значениями компонент функции $\boldsymbol{f}$ везде, где эти значения определены. При этом мощность $|Z_i|$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) должна быть ограничена некоторой заданной величиной p, а число k должно быть минимальным и меньшим, чем n.

Указанная декомпозиция определяет структуру логической схемы (рис. 1), где блоки реализуют функции, составляющие искомую суперпозицию. Величина p может определяться, например, ограничением на число входных полюсов блоков, реализующих функции $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Такой вид декомпозиции назван *многоблочной параллельной декомпозицией* [1].

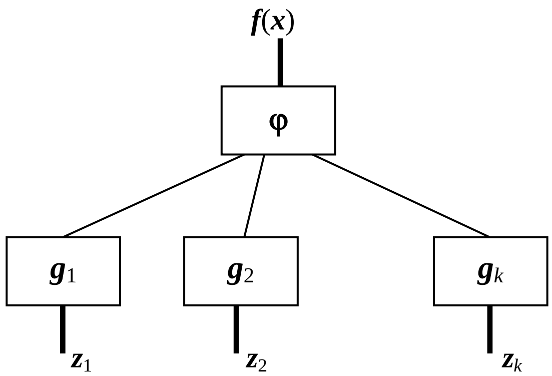

Рис. 1. Структура логической схемы

Задача декомпозиции в различных постановках решалась при заданных совокупностях множеств $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ [1–3]. В статье [4] предложен метод, не требующий конкретного задания этих множеств. Он дает точное решение данной задачи, но не всегда гарантирует получение этого решения за приемлемое время. Здесь предлагается эвристический метод решения данной задачи декомпозиции, выполняемый за более короткое время.

Используемый подход. Предлагаемый метод решения рассматриваемой задачи требует интервального задания системы частичных булевых функций [3] в виде пары троичных матриц $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F}$ размерности $l \times n$ и $l \times m$. Столбцы матрицы $\boldsymbol{X}$ соответствуют переменным $x_1, x_2, ..., x_n$, а столбцы матрицы $\boldsymbol{F}$ – функциям $f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), ..., f_m(\boldsymbol{x})$. Строка матрицы $\boldsymbol{X}$ представляет интервал булева пространства, а соответствующая ей строка матрицы $\boldsymbol{F}$ – значения функций на этом интервале. Символ «–» в i-й строке и j-м столбце матрицы $\boldsymbol{F}$ означает, что i-й интервал не используется для задания функции $f_j(x)$. Значения всех функций заданной системы не определены на той части булева пространства, которая не охвачена интервалами, представленными строками матрицы $\boldsymbol{X}$. Строки матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{F}$ имеют общую естественную нумерацию.

Рассмотрим графы $G_X = (V, E_X)$ и $G_F = (V, E_F)$, где множество вершин V является множеством общих номеров строк матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{F}$, а множества ребер E_X и E_F – множествами пар номеров ортогональных строк матриц $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{F}$ соответственно. Две строки троичной матрицы ортогональны, если имеется столбец, в котором в одной из этих строк расположен нуль, а в другой – единица [1]. Система функций задана корректно, если $E_F \subseteq E_X$, т. е. G_F является остовным подграфом графа G_X.

Замечание. Любая пара матриц $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{F})$ указанного вида может рассматриваться как представление некоторой системы частичных булевых функций, если граф G_F является остовным подграфом графа G_X.

Каждому ребру из множества E_X приписано множество переменных из множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, по которым соответствующие строки ортогональны. Полному двудольному подграфу, или биклике, графа G_X припишем множество переменных из X, взятых по одной из каждого ребра, принадлежащего данной биклике. Биклику назовем полезной, если число приписанных ей переменных не превышает p и она содержит хотя бы одно ребро из множества E_F.

Множество переменных, приписываемых биклике, определяется следующим образом. Пусть $\{x_i, x_j, ..., x_k\}$ – множество переменных, по которым ортогональны две строки, соответствующие ребру из множества E_X. Образуем элементарную дизъюнкцию $x_i \vee x_j \vee ... \vee x_k$ из этих переменных. Получим конъюнктивную нормальную форму (КНФ), членами которой будут указанные дизъюнкции, взятые по всем ребрам, входящим в рассматриваемую биклику. После удаления возможных поглощаемых элементарных дизъюнкций преобразуем эту КНФ, раскрыв скобки, в ДНФ. Из полученной таким образом ДНФ выбирается любая элементарная конъюнкция минимального ранга, и составляющие ее переменные приписываются рассматриваемой биклике.

Утверждение. *Для системы частичных булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, заданной троичными матрицами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{F}$, существует реализующая ее суперпозиция $\boldsymbol{\varphi}(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), ..., g_k(\mathbf{z}_k))$, если существует покрытие множества E_F полезными бикликами графа G_X, число которых k.*

Пусть получено указанное покрытие бикликами $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Каждая биклика B_i может быть задана неупорядоченной парой множеств вершин $\langle V_i^1, V_i^2 \rangle$, поскольку каждая вершина из V_i^1 связана в биклике ребрами со всеми вершинами из V_i^2. Каждая функция $g_i(\mathbf{z}_i)$ задается матрицами $\boldsymbol{X}_i$ и $\boldsymbol{F}_i$. Матрица $\boldsymbol{X}_i$ является минором матрицы $\boldsymbol{X}$, образованным столбцами, которые соответствуют переменным, приписанным биклике B_i. Матрица $\boldsymbol{F}_i$ состоит из одного столбца, где в строке с номером, соответствующим вершине из V_i^1, находится нуль, в строке с номером, соответствующим вершине из V_i^2, – единица (или наоборот), а в строке, которой не соответствует ни одна из вершин множеств V_i^1 и V_i^2, находится символ «–». Векторная функция $\boldsymbol{\varphi}$ задается матрицами $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{\Phi}$. Матрица $\boldsymbol{U}$ состоит из столбцов, представляющих матрицы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k$, а матрица $\boldsymbol{\Phi}$ совпадает с матрицей $\boldsymbol{F}$. Действительно, согласно приведенному выше замечанию пара матриц $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Phi})$ может рассматриваться как представление системы частичных булевых функций. Видно, что для любого значения вектора $\boldsymbol{x}$, произвольно взятого из области определения любой функции f_i заданной системы, значения функций φ_i и f_i будут совпадать. Следовательно, пары матриц $(\boldsymbol{X}_1\ \boldsymbol{F}_1), (\boldsymbol{X}_2\ \boldsymbol{F}_2), \ldots, (\boldsymbol{X}_k\ \boldsymbol{F}_k)$ и $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Phi})$ представляют искомую суперпозицию. Это представление обладает избыточностью в виде поглощаемых и совпадающих строк матриц $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_k$, которую легко устранить.

Предлагаемый подход представлен в работе [5], а метод, который его использует, описан в статье [4]. Данный метод сводится к тому, что сначала в графе G_X находятся все максимальные полезные биклики, а потом получается кратчайшее покрытие ими ребер графа G_F. Такие действия не всегда приводят к решению задач практической размерности за приемлемое время. Верхней границей числа всех максимальных биклик в графе служит $2^{n-1} - 1$, где n – число вершин графа. Эта граница достигается, когда граф G_X полный. Кроме того, задача кратчайшего покрытия относится к числу NP-трудных задач, т. е. является задачей неполиномиальной сложности. Как сказано в статье [4], такой метод следует считать основой для разработки эвристических методов решения данной задачи. Описание одного из них представлено далее.

Описание метода. Метод заключается в последовательном выполнении следующих этапов, в результате чего получаются функции $g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), \ldots, g_k(\mathbf{z}_k)$ и $\boldsymbol{\varphi}$, заданные в интервальной форме:

Этап 1. Определение нижней границы числа биклик, которые могут составить искомое покрытие, и формирование начального множества биклик в виде отдельных ребер графа G_F. В полном графе K_n мощность покрытия бикликами ребер графа не меньше чем $\lceil \log_2 n \rceil$, где $\lceil a \rceil$ – целое число, ближайшее сверху к a. Если взять раскраску вершин графа G_F и заменить каждое множество одноцветных вершин одной вершиной, сохранив все ребра, то получим полный граф, скажем K_m. Выделим $\lceil \log_2 m \rceil = k$ изолированных ребер и объявим их начальной совокупностью биклик $B_1, B_2, \ldots, B_k$. (Поскольку метод не претендует на получение точного решения, можно воспользоваться последовательной раскраской графа, не гарантирующей минимума числа цветов.)

Этап 2. Расширение биклик за счет внесения вершин, не охваченных начальным множеством биклик, в множества V_i^1 и V_i^2. На этом этапе перебираются вершины v_j из множества V, не вошедшие ни в одну из имеющихся биклик. Выбирается пара (v_j, V_i^1) или (v_j, V_i^2), с тем чтобы заменить множество V_i^1 на $\{v_j\} \cup V_i^1$ или V_i^2 на $\{v_j\} \cup V_i^2$ соответственно. При этом в первом случае вершина v_j должна быть связана ребрами со всеми вершинами из V_i^2, а во втором случае – со всеми вершинами из V_i^1. Так вносятся новые ребра в биклику $B_i = \langle V_i^1, V_i^2 \rangle$. Внесение вершины v_j в множество V_i^t $(t = 1, 2)$ сопровождается добавлением в КНФ, соответствующую биклике B_i, элементарных дизъюнкций, связанных с вносимыми ребрами. Разумеется, надо учитывать закон поглощения $(a \vee b)\ a = a$. Кроме того, необходимо, чтобы изменяемая биклика оставалась полезной, т. е. ДНФ, получаемая раскрытием скобок в КНФ, должна содержать хотя бы одну элементарную конъюнкцию ранга, не превышающего заданного p. Выбор пары (v_j, V_i^t) осуществляется последовательно согласно следующим критериям:

1) минимуму ребер графа G_F, которые не сможет покрыть биклика B_i. Такое ребро связывает пару вершин, присутствующую в той или другой доле биклики B_i;

2) максимуму новых покрываемых ребер из множества E_F, вводимых в биклику B_i вместе с вершиной v_j;

3) наименьшему минимальному рангу элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ;

4) максимуму числа элементарных конъюнкций минимального ранга в соответствующей ДНФ. Минимум определяется по всем ДНФ.

Выполнение этапа 2 заканчивается, когда каждая вершина из множества V окажется в какой-нибудь из имеющихся биклик.

Этап 3. Формирование покрытия множества E_F бикликами графа G_X за счет последовательного внесения новых ребер в имеющиеся биклики. Здесь так же, как и на этапе 2, выполняется последовательность шагов, на каждом из которых выбирается пара (v_i, V_j^s), $v_i \notin V_j^1$, $v_i \notin V_j^2$, $s = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, k$, и вершина v_i связана ребрами из множества E_X со всеми вершинами из множества V_j^s. Вершина v_i вносится в множество V_j^t $(t \neq s)$, и таким образом вносятся новые ребра в биклику $B_j = \langle V_j^1, V_j^2 \rangle$. Такое действие имеет смысл, когда среди этих ребер имеется хотя бы одно из ребер графа G_F, не присутствующее ни в одной из имеющихся биклик. Внесение вершины v_i в множество V_j^t также сопровождается добавлением в КНФ, соответствующую биклике B_j, элементарных дизъюнкций, связанных с вносимыми ребрами. При этом необходимо, чтобы изменяемая биклика оставалась полезной. Выбор пары (v_i, V_j^s) осуществляется по тем же критериям, которые применяются на этапе 2.

Если указанной пары найти не удается, в искомую совокупность вносится новая биклика в виде одного ребра из E_F, не принадлежащего ни одной из имеющихся биклик. Процесс заканчивается, когда каждое ребро из E_F окажется хотя бы в одной из биклик $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Этап 4. Определение булевых функций $g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), \ldots, g_k(\mathbf{z}_k)$ и векторной функции $\boldsymbol{\varphi}$. Выполнение этого этапа дано в описании используемого подхода.

Пример. Пусть система частичных булевых функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана троичными матрицами

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & - & - & 0 & 1 & - \\ 1 & - & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{array}{c} \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ - & 1 & 1 \\ 0 & - & 0 \\ 1 & 1 & - \\ - & 0 & 1 \\ 1 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}.$$

Требуется получить суперпозицию $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \leq \varphi(g_1(\mathbf{z}_1), g_2(\mathbf{z}_2), \ldots, g_k(\mathbf{z}_k))$ при минимальном k и числе p компонент каждого из векторов $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$, не превышающем 3.

Граф $G_X = (V, E_X)$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ представим в виде перечня ребер. В табл. 1 приведены эти ребра и приписанные им переменные. Граф $G_F = (V, E_F)$ имеет то же множество вершин, а его множество ребер E_F отличается от E_X только тем, что в нем отсутствуют ребра v_2v_4 и v_5v_6, которые соответствуют парам неортогональных строк матрицы $\boldsymbol{F}$.

Таблица 1

v_1v_2	v_1v_3	v_1v_4	v_1v_6	v_2v_3	v_2v_4	v_2v_5	v_2v_6	v_3v_4	v_3v_5	v_3v_6	v_4v_5	v_4v_6	v_5v_6
x_1	$x_4x_5x_6$	$x_1x_2x_3x_4x_6$	x_1x_4	$x_1x_4x_5$	x_4	x_1	x_4	$x_1x_3x_5$	x_5x_6	x_1x_5	$x_1x_3x_6$	x_2	x_1

Для рассматриваемого примера перечисленные этапы выполняются следующим образом:

Этап 1. Хроматическое число графа G_F равно 4, следовательно, за начальную совокупность биклик возьмем два ребра с максимальным количеством приписанных переменных. Эти биклики с одноэлементными долями и соответствующие элементарные дизъюнкции имеют следующий вид:

$$\langle\{v_1\}, \{v_4\}\rangle - (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6),$$
$$\langle\{v_2\}, \{v_3\}\rangle - (x_1 \vee x_4 \vee x_5).$$

Этап 2. Пара $(v_5, \{v_4\})$ для варианта формирования биклики $\langle\{v_1, v_5\}, \{v_4\}\rangle$ оценивается по приведенным критериям как одна из лучших. Действительно, ребро v_1v_5 отсутствует в графе G_F. Число новых покрываемых ребер во всех случаях равно единице. Соответствующая КНФ имеет вид $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_6)(x_1 \vee x_3 \vee x_6)$ и после преобразования по закону поглощения совпадает с ДНФ $x_1 \vee x_3 \vee x_6$, имеющей три элементарные конъюнкции ранга 1.

На следующем шаге из вариантов

$$\langle\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_4\}\rangle - x_2\,(x_1 \vee x_3 \vee x_6),$$
$$\langle\{v_1, v_5\}, \{v_4, v_6\}\rangle - (x_1),$$
$$\langle\{v_2, v_6\}, \{v_3\}\rangle - (x_1 \vee x_5),$$
$$\langle\{v_2\}, \{v_3, v_6\}\rangle - (x_4)$$

выбирается вариант $\langle\{v_2, v_6\}, \{v_3\}\rangle$. В одну из долей каждой биклики попадает пара вершин, связанных ребром из множества E_F, т. е. по первому критерию все варианты равнозначны. По второму критерию они также равнозначны, так как во всех вариантах вносится по одному новому ребру. По третьему критерию выигрывает вариант $\langle\{v_2, v_6\}, \{v_3\}\rangle$, так как в соответствующей ДНФ присутствуют две элементарные конъюнкции ранга 1. Это максимум среди всех вариантов.

Таким образом, исходными данными для этапа 3 являются биклики $\langle\{v_1, v_5\}, \{v_4\}\rangle$ и $\langle\{v_2, v_6\}, \{v_3\}\rangle$.

Этап 3. На первом шаге рассматриваются варианты, представленные в табл. 2. В правом крайнем столбце показаны величины, по которым делается выбор. Ясно, что первый вариант имеет преимущество по сравнению с остальными вариантами. Результатом выполнения этого шага являются биклики $\langle\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}\rangle$ и $\langle\{v_2, v_6\}, \{v_3\}\rangle$.

Таблица 2

Биклика	ДНФ	Критерии
$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}$	x_1	0, 2, 1, 1
$\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_4\}$	$x_1 \vee x_3 \vee x_5x_6$	2, 1, 1, 2
$\{v_1, v_5\}, \{v_3, v_4\}$	$x_1x_5 \vee x_3x_5 \vee x_6$	1, 2, 1, 1
$\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_4\}$	$x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_2x_6$	1, 1, 2, 0
$\{v_1, v_5\}, \{v_4, v_6\}$	x_1	1, 2, 1, 1
$\{v_1, v_2, v_6\}, \{v_3\}$	$x_1x_4 \vee x_1x_6 \vee x_5$	3, 1, 1, 1

Окончание табл. 2

Биклика	ДНФ	Критерии
$\{v_2, v_6\}, \{v_1, v_3\}$	x_1	2, 2, 1, 1
$\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_3\}$	$x_1 \vee x_5$	2, 1, 1, 2
$\{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}$	$x_1\, x_2\, x_4 \vee x_2\, x_4\, x_5$	2, 1, 3, 0
$\{v_2, v_5, v_6\}, \{v_3\}$	$x_5 \vee x_1\, x_6$	2, 1, 1, 1
$\{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}$	x_1	2, 1, 1, 1

Варианты, рассматриваемые на следующем шаге, представлены в табл. 3. Некоторые из них рассматриваются повторно, поскольку ребра, внесенные в биклику, следует исключить из непокрываемых и подлежащих покрытию. Применение критериев в установленном порядке приводит к выбору варианта биклики $\langle\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\rangle$.

Таблица 3

Биклика	ДНФ	Критерии
$\{v_1, v_2, v_6\}, \{v_3\}$	$x_1 x_4 \vee x_1\, x_6 \vee x_5$	2, 1, 1, 1
$\{v_2, v_6\}, \{v_1, v_3\}$	x_1	2, 1, 1, 1
$\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_3\}$	$x_1 \vee x_5$	2, 1, 1, 2
$\{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}$	$x_1\, x_2\, x_4 \vee x_2\, x_4\, x_5$	2, 1, 3, 0
$\{v_2, v_5, v_6\}, \{v_3\}$	$x_5 \vee x_1\, x_6$	1, 1, 1, 1
$\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4\}$	x_1	2, 1, 1, 1
$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}$	$x_1 x_5 \vee x_1\, x_6$	1, 2, 2, 0
$\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_2, v_4\}$	$x_1\, x_2\, x_4$	1, 2, 3, 0
$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\}$	x_1	2, 1, 1, 1

В табл. 4 представлены варианты, рассматриваемые на очередном шаге. Биклика предпоследнего варианта не является полезной, поскольку минимальный ранг элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ равен 4, т. е. превышает заданную величину $p = 3$. В данном случае выигрывает первый вариант – биклика $\langle\{v_2, v_6\}, \{v_1, v_3\}\rangle$.

Таблица 4

Биклика	ДНФ	Критерии
$\{v_2, v_6\}, \{v_1, v_3\}$	x_1	1, 1, 1, 1
$\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_3\}$	$x_1 \vee x_5$	2, 1, 1, 2
$\{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}$	$x_1\, x_2\, x_4 \vee x_2\, x_4\, x_5$	2, 1, 3, 0
$\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_2, v_3, v_4\}$	$x_1 x_2\, x_4 x_5 \vee x_1\, x_2\, x_4 x_6$	неполезная
$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4, v_6\}$	$x_1 x_5 \vee x_1\, x_6$	3, 1, 2, 0

На следующем шаге рассматриваются только два варианта – биклика $\langle\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_1, v_3\}\rangle$ с элементарной конъюнкцией x_1 ранга 1 и биклика $\langle\{v_2, v_6\}, \{v_1, v_3, v_4\}\rangle$ с элементарной конъюнкцией $x_1\, x_2\, x_4$ ранга 3. Каждая из них содержит по одному новому покрываемому ребру и по две пары вершин, связанных ребром, в одной из долей. Выбирается биклика $\langle\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_1, v_3\}\rangle$ с элементарной конъюнкцией меньшего ранга.

В ходе решения возникла ситуация, когда сформированы биклики $\langle\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\rangle$ и $\langle\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_1, v_3\}\rangle$ с соответствующими ДНФ $x_1 x_5 \vee x_1\, x_6$ и x_1 и остались непокрытыми ребра $v_2 v_6$ и $v_4 x_6$. Ребро $v_2 v_6$ находится в одной из долей биклики $\langle\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_1, v_3\}\rangle$, а расширение биклики $\langle\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\rangle$ до $\langle\{v_1, v_5, v_6\}, \{v_2, v_3, v_4\}\rangle$ приводит к неполезной биклике. Поэтому необходимо ввести новую биклику $\langle\{v_2\}, \{v_6\}\rangle$, покрывающую ребро $v_2 v_6$. В эту биклику введем оставшееся непокрытым ребро $v_4 x_6$. Таким образом, получено следующее покрытие бикликами графа G_X множества ребер E_F графа G_F:

$$\langle\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}\rangle - x_1x_5 \vee x_1\, x_6,$$

$$\langle\{v_2, v_4, v_6\}, \{v_1, v_3\}\rangle - x_1,$$

$$\langle\{v_2, v_4\}, \{v_6\}\rangle - x_2\, x_4.$$

Этап 4. Представленные ниже матрицы задают искомую суперпозицию:

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \boldsymbol{F}_1 = \begin{array}{c} g_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ - \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}; \quad \boldsymbol{X}_2 = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \boldsymbol{F}_2 = \begin{array}{c} g_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}; \quad \boldsymbol{X}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ - & 0 \\ - & 1 \\ 1 & 1 \\ - & - \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \boldsymbol{F}_3 = \begin{array}{c} g_3 \\ \begin{bmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 0 \\ - \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array};$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & - \\ - & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ - & 1 & 1 \\ 0 & - & 0 \\ 1 & 1 & - \\ - & 0 & 1 \\ 1 & 0 & - \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}.$$

В результате минимизации получим две системы ДНФ в матричном представлении:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & - & - & 1 \\ 1 & - & - & - \\ - & 0 & 1 & - \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g_1 & g_2 & g_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 0 & - \\ 1 & - & 0 \\ 0 & - & - \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Заключение. Описанный метод, в отличие от метода, представленного в статье [4], не гарантирует получения минимального числа блоков в структурной реализации заданной системы булевых функций, но позволяет решать задачу за значительно более короткое время. Метод из статьи [4] не предполагает упрощения получаемых функций, составляющих искомую суперпозицию. Тогда получение такой суперпозиции сводилось бы к задаче о взвешенном покрытии, что усложнило бы и без того трудоемкую задачу. Весом биклики в этом случае следовало бы считать минимум ранга элементарной конъюнкции в соответствующей ДНФ. Применение критерия 3 незначительно усложняет эвристический метод, приводит к упрощению получаемых функций. Если довести решение рассматриваемого примера до получения минимальной системы ДНФ, что и сделано в настоящей статье, то нетрудно заметить, что представленный эвристический метод получил решение по качеству даже лучшее, чем решение в статье [4].

Список использованных источников

1. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М. : Физматлит, 2007. – 592 с.

2. Бибило, П. Н. Синтез комбинационных схем методом функциональной декомпозиции / П. Н. Бибило, С. В. Енин. – Минск : Наука и техника, 1987. – 189 с.

3. Поттосин, Ю. В. Табличные методы декомпозиции систем полностью определенных булевых функций / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков. – Минск : Беларуская навука, 2006. – 327 с.

4. Поттосин, Ю. В. Метод многоблочной параллельной декомпозиции системы частичных булевых функций / Ю. В. Поттосин // Информатика. – 2017. – № 3(55). – С. 92–98.

5. Поттосин, Ю. В. Декомпозиция системы частичных булевых функций с помощью покрытия графа полными двудольными подграфами / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур : докл. Второй Всерос. конф., Екатеринбург, 1998. – Екатеринбург : УрО РАН, 1998. – С. 185–189.

References

1. Zakrevskij A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisinova L. D. Logicheskie osnovy proektirovanija diskretnyh ustrojstv. *Logical Fundamentals for Design of Discrete Devices*. Moscow, Fismatlit Publ., 2007, 592 p. (in Russian).

2. Bibilo P. N., Enin S. V. Sintez kombinacionnyh shem metodom funkcional'noj dekompozicii. *Synthesis of Combinational Circuits by Functional Decomposition Method*. Minsk, Nauka i tehnika Publ., 1987, 189 p. (in Russian).

3. Pottosin Yu. V., Shestakov E. A. Tablichnye metody dekompozicii system polnost'ju opredelennyh bulevyh funkcij. *Table Methods for Decomposition of Systems of Completely Specified Boolean Functions*. Minsk, Belaruskaja navuka Publ., 2006, 327 p. (in Russian).

4. Pottosin Yu. V. Metod mnogoblochnoj parallel'noj dekompozicii sistemy chastichnyh bulevyh funkcij [A method for parallel multi-block decomposition of a system of partial Boolean functions]. Informatika [*Informatics*], 2017, no. 3(55), pp. 92–98 (in Russian).

5. PottosinYu. V., Shestakov E. A. Dekompozicija sistemy chastichnyh bulevyh funkcij s pomoshh'ju pokrytij grafa polnymi dvudol'nymi podgrafami [Decomposition of a system of partial Boolean functions using covering graph with bipartite complete subgraphs]. Doklady Vtoroj Vserossijskoj konferencii "Novye informacionnye tehnologii v issledovanii diskretnyh struktur", Ekaterinburg, 1998 [*Proceedings of the Second All-Russian Conference "Novel Information Technologies in the Research of Discrete Structures", Ekaterinburg, 1998*]. Ekaterinburg, Ural'skoe otdelenie Rossijskoj akademii nauk, 1998, pp. 185–189 (in Russian).

Информация об авторе

Поттосин Ю. В. – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: pott@newman.bas-net.by

Information about the author

Yuri V. Pottosin – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganova Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pott@newman.bas-net.by