

ISSN 1816-0301 (Print)  
ISSN 2617-6963 (Online)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
*MATHEMATICAL MODELING*

УДК 536.75

Поступила в редакцию 31.07.2018  
Received 31.07.2018

Принята к публикации 14.11.2018  
Accepted 14.11.2018

**Спектральный анализ хаотических колебаний  
в имитационной модели схемы Чжуа, разработанной  
на основе матричной декомпозиции**

**А. М. Крот, В. А. Сычев**✉

*Объединенный институт проблем информатики  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
✉E-mail: vsychyov@robotics.by*

**Аннотация.** Метод матричной декомпозиции А. М. Крота, предназначенный для анализа аттракторов сложных нелинейных динамических систем на основе матричного ряда в пространстве состояний, использован для нелинейного анализа такого генератора хаотических сигналов, как цепь Чжуа с кубическим полиномом в качестве нелинейной функции. Показано, что оператор системы дифференциальных уравнений Чжуа может быть представлен посредством линейного, квадратичного и кубического членов матричного ряда. Полученные члены ряда положены в основу имитационной модели, использованной для проведения вычислительных экспериментов. По результатам экспериментов определены значения управляющих параметров, при которых возникает хаотический режим, проведены бифуркационный и спектральный анализы генерируемых сигналов, позволяющие обосновать переход к хаосу через серию бифуркаций. Проведенные исследования позволили сделать вывод о том, что процесс возникновения хаотических колебаний в электрической схеме Чжуа соответствует модели начальной турбулентности Л. Д. Ландау и находится в полном согласии с теорией Рюэля – Такенса. Исследована корректность применения матричного разложения векторной функции в зависимости от величины возмущений (приращений) переменных в пространстве состояний.

**Ключевые слова:** нелинейная динамическая система, цепь Чжуа, хаотический аттрактор, метод матричной декомпозиции в пространстве состояний, имитационная модель схемы Чжуа, спектральный анализ хаотических колебаний, теория Рюэля – Такенса

**Благодарности.** Работа выполнена частично в рамках предоставленного гранта Президента Республики Беларусь в науке на 2019 г., а также при поддержке гранта БРФФИ № Ф18Р-229 «Исследование и разработка концепции мехатронных бортовых вычислительных и исполнительных систем групповых микро-роботов».

**Для цитирования.** Крот, А. М. Спектральный анализ хаотических колебаний в имитационной модели схемы Чжуа, разработанной на основе матричной декомпозиции / А. М. Крот, В. А. Сычев // Информатика. – 2019. – Т. 16, № 1. – С. 7–23.

## A spectral analysis of chaotic oscillations in simulation model of Chua's circuit developed with use of matrix decomposition

Alexander M. Krot, Uladzislau A. Sychou<sup>✉</sup>

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>✉</sup>E-mail: vsychoyov@robotics.by

**Abstract.** The A. M. Krot's matrix decomposition method developed for analysis of complex nonlinear dynamical system attractors based on matrix series in the state space has been used for nonlinear analysis of Chua's circuit with cube non-linearity. It is shown that the operator of the system of Chua's differential equations can be represented through the linear, quadratic and cubic terms of the matrix series. The obtained terms are the basis of the simulation model used for carrying out computational experiments. Using the results of the experiments, the values of the control parameters, leading to the chaotic regime, are determined, as well as bifurcation and spectral analysis of the generated signals are carried out. It allows to prove the transition to chaos through a series of bifurcations. The research allowed to draw a conclusion that the process of occurrence of chaotic oscillations in the Chua's circuit corresponds to the L. D. Landau's model of initial turbulence in full accordance with the theory of Ruelle – Takens. The correctness of application of the matrix expansion of a vector function depending on values of the perturbations (increments) of variables in the state space is investigated.

**Keywords:** nonlinear dynamical system, Chua's circuit, chaotic attractor, matrix decomposition method in the state-space, Chua's circuit computational model, spectral analysis of chaotic oscillations, the theory of Ruelle – Takens

**Acknowledgements.** This work has been supported partially by the grant of President of Republic of Belarus in science (2019) and the BRFFR grant № F18R-229 "Research and development of the mechatronic onboard computational and actuator systems concept for group-microbots".

**For citation.** Krot A. M., Sychou U. A. A spectral analysis of chaotic oscillations in simulation model of Chua's circuit developed with use of matrix decomposition. *Informatics*, 2019, vol. 16, no. 1, pp. 7–23 (in Russian).

**Введение.** В работах [1–3] представлен общий метод анализа сложных нелинейных динамических систем на основе матричного ряда в пространстве состояний. Применение указанного метода для анализа нелинейных динамических систем, демонстрирующих хаотическую динамику в пространстве состояний, которая описывается аттракторами Лоренца, Энона, Ресслера и Фитц-Хью, рассмотрено на примерах в публикациях [4–9]. В статье [10] показано применение данного метода для анализа нейронной сети Хопфилда, а в работе [11] проведен анализ методом матричной декомпозиции электронной схемы Чжуа [12] с гладкой нелинейностью, представляемой полиномом  $p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$  [13–18]. Исходная система уравнений, описывающая схему Чжуа [12], выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \alpha u_2 - A\alpha u_1^3 - C\alpha u_1, \\ \dot{u}_2 = u_1 - u_2 + u_3, \\ \dot{u}_3 = -\beta u_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta$  – управляющие параметры;  $u_1, u_2, u_3$  – переменные в пространстве состояний схемы Чжуа.

Для применения метода матричной декомпозиции А. М. Крота [1–3, 6] к анализу системы уравнений (1) данную систему запишем посредством матричных обозначений:

$$\dot{\vec{u}} = \vec{f}(\vec{u}, \alpha, \beta, A, C), \quad (2)$$



Вычисления с использованием матричной декомпозиции (5)–(8) показывают:

$$\Delta \vec{f} = \begin{bmatrix} -(3A\alpha u_1^{*2} + C\alpha)v_1 + \alpha v_2 \\ v_1 - v_2 + v_3 \\ -\beta v_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6A\alpha u_1^* v_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6A\alpha v_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Как видно из выражения (9), переменными системы являются  $v_1, v_2, v_3$ , а в качестве параметров выступают как величины  $\alpha, \beta, A, C$ , так и  $u_1^*$  – выбранное стационарное значение первой переменной  $u_1$ .

**Синтез и исследование имитационной модели электронной схемы Чжуа, полученной методом матричной декомпозиции.** В работе исследуется модель (рис. 1), реализующая систему уравнений (9), которая была получена методом матричной декомпозиции. Данная модель создана в среде компьютерного моделирования Simulink.

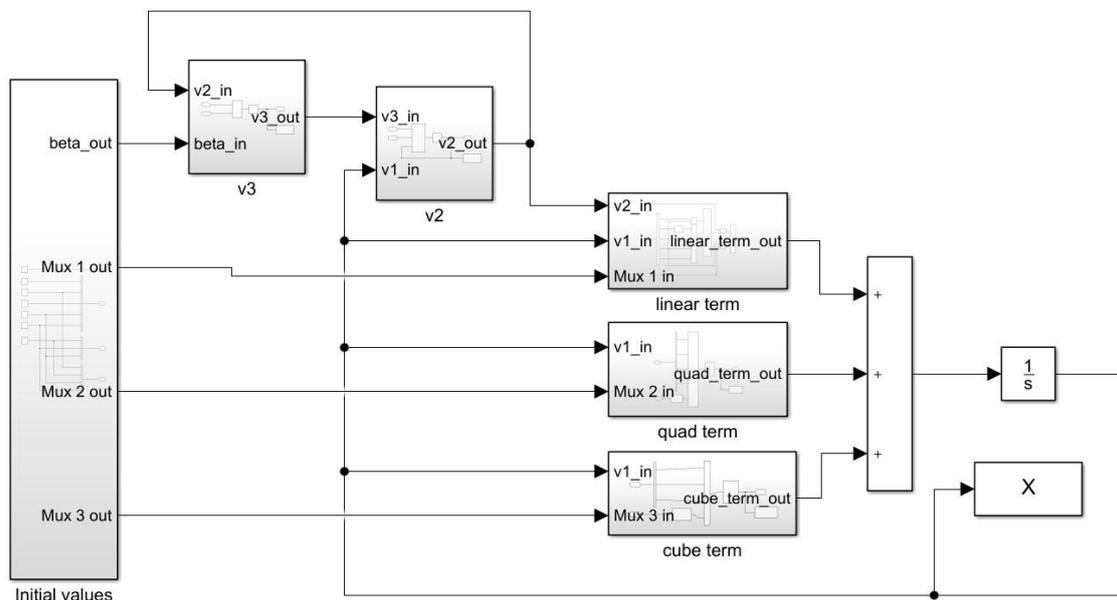


Рис. 1. Simulink-модель системы уравнений (9)

Модель содержит блок задания начальных значений (initial values), блоки вычисления значений линейного, квадратичного и кубического матричных ядер (linear term, quad term и cube term), а также типовые блоки и блоки обмена данными со средой Matlab, в которой получены все представленные далее графики и частью которой является Simulink.

Моделирование проводилось для двух значений:  $u_1^* = -1,5$  и  $u_1^* = -0,75$ . Первому варианту соответствовали коэффициенты полинома  $A = 0,1240$  и  $C = -0,3243$ , второму –  $A = 0,5131$  и  $C = -0,2955$ . Характерный для данной схемы хаотический аттрактор типа «двойной завиток» наблюдался в пространстве состояний в обоих случаях (рис. 2), а также при общих для обоих значений  $u_1^*$  коэффициентах полинома  $A = 0,002$  и  $C = -1,3$ . Компьютерное моделирование показало значительное влияние величины  $u_1^*$  на динамику описываемого варианта схемы Чжуа, реализованной посредством матричной декомпозиции.

Таким образом, применение метода матричной декомпозиции к нелинейным электронным схемам типа схемы Чжуа позволяет получать новые данные об их динамике, оценивать степень влияния нелинейностей высших порядков на хаотический режим функционирования схем, а также разрабатывать новые модификации электронных схем с хаотическими режимами рабо-

ты. Основное предназначение метода матричной декомпозиции состоит в реализации нелинейного анализа для оценки влияния ядер  $L_{N \times N}^{(1)}$ ,  $L_{N \times N^2}^{(2)}$ ,  $L_{N \times N^3}^{(3)}$ , ... на динамику функционирования самой схемы.

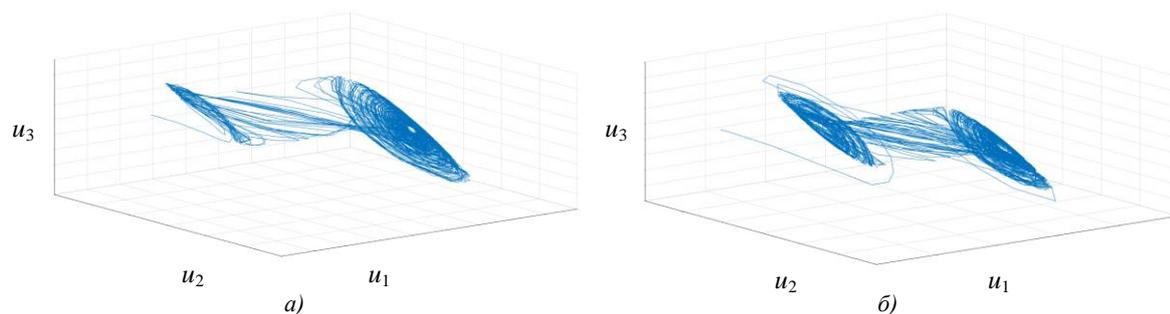


Рис. 2. Варианты хаотического аттрактора, реконструированные для  $u_1^* = -1,5$  (а) и  $u_1^* = -0,75$  (б)

**Спектральный анализ хаотических колебаний в электронной схеме Чжуа с точки зрения модели Ландау начальной турбулентности и теории Рюэля – Такенса.** Как было отмечено в статье [11], конечные незатухающие хаотические колебания наблюдаются лишь при определенных соотношениях между вкладом линейного  $L_{N \times N}^{(1)}$ , квадратичного  $L_{N \times N^2}^{(2)}$  и кубического  $L_{N \times N^3}^{(3)}$  ядер в общую динамику системы. Действительно, воспользовавшись матричной декомпозицией (5)–(9) с учетом (2) и (2а) запишем уравнение для приращения первой компоненты  $u_1$  векторной переменной  $\vec{u}$  пространства состояний схемы Чжуа в следующих обозначениях:

$$\Delta \dot{v}_1 = c(v_2) + \gamma_L v_1 - \alpha_L v_1^2 - \beta_L v_1^3, \quad (10)$$

где коэффициенты соответственно определяются выражениями

$$c(v_2) = \alpha v_2, \quad \gamma_L = -C\alpha - 3A\alpha u_1^{*2}, \quad \alpha_L = 3A\alpha u_1^*, \quad \beta_L = 3A\alpha. \quad (10a)$$

Параметры рассматриваемой схемы Чжуа выбирались равными  $A = 0,002$ ,  $C = -1,3$ ,  $\beta = 28$ ,  $\alpha = 15,6$  и  $u_1^* = -1,5$ , откуда следует

$$\gamma_L = -\alpha(3A u_1^{*2} + C) > 0; \quad (11)$$

$$\alpha_L = 3A\alpha u_1^* < 0; \quad (12)$$

$$\beta_L = A\alpha > 0. \quad (13)$$

Таким образом, полученные условия (11)–(13) полностью соответствуют «условиям жесткого самовозбуждения системы» в рамках модели начальной турбулентности Л. Д. Ландау [19, 20], т. е. после срыва стационарного режима течения жидкости с точностью до членов третьего порядка справедливо аналогичное уравнение (11), в котором  $\gamma_L$  – коэффициент затухания,  $\alpha_L$  – постоянная Ландау,  $\beta_L$  – положительная или отрицательная постоянная. Согласно модели начальной турбулентности Ландау [20], предложенной еще в 1944 г., при скачкообразном переходе от стационарного режима нелинейной системы к нестационарному возникают две дополнительные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , определяющие два цикла (типа «двойной завиток») в пространстве состояний схемы Чжуа, что и было подтверждено вычислительными экспериментами<sup>1</sup>, результаты которых показаны на рис. 2.

<sup>1</sup>Заметим, что уравнение (10) является более общим, чем модель Ландау [20]. Это позволяет наблюдать хаотическую динамику и в случае  $\gamma_L < 0$  (например, для параметров  $A = 0,5131$ ,  $C = -0,2955$ ,  $\beta = 28$ ,  $\alpha = 15,6$  и  $u_1^* = -1,5$ ).

Полученный результат находит свое объяснение и с точки зрения теории Рюэля – Такенса [21] (далее – теория РТН). Эта теория, выдвинутая в 1971 г. и затем развитая в 1978 г. Рюэлем, Такенсом и Ньюхаусом [22], имеет большое историческое значение, поскольку она впервые достаточно обоснованно поставила под сомнение механизм турбулентности, предложенный Ландау [20], согласно которому для возникновения турбулентности требуется бесконечное число бифуркаций Хопфа [23]. Выдвинув эту идею, Рюэль и Такенс пошли на эпистемологический разрыв с традиционным представлением: оказалось, что «для генерации хаотического режима достаточно очень небольшого числа бифуркаций» [23]. Согласно доказанной ими теореме [22] опишем подход теории РТН схематически.

Рассмотрим динамическую систему в стационарном состоянии, например ламинарное течение вязкой жидкости, как и в модели начальной турбулентности Ландау. Предположим, что при возрастании управляющего параметра системы (числа Рейнольдса в случае вязкой жидкости) стационарный режим утрачивает свою устойчивость и переходит в колебательный – периодический режим с частотой  $\omega_1$ , которому соответствует предельный цикл в пространстве состояний системы (рис. 3). Предположим, что такой же процесс повторяется еще два раза, в результате чего происходят три последовательные бифуркации Хопфа, порождающие три независимые частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , т. е. в системе реализуется квазипериодический режим с тремя частотами.

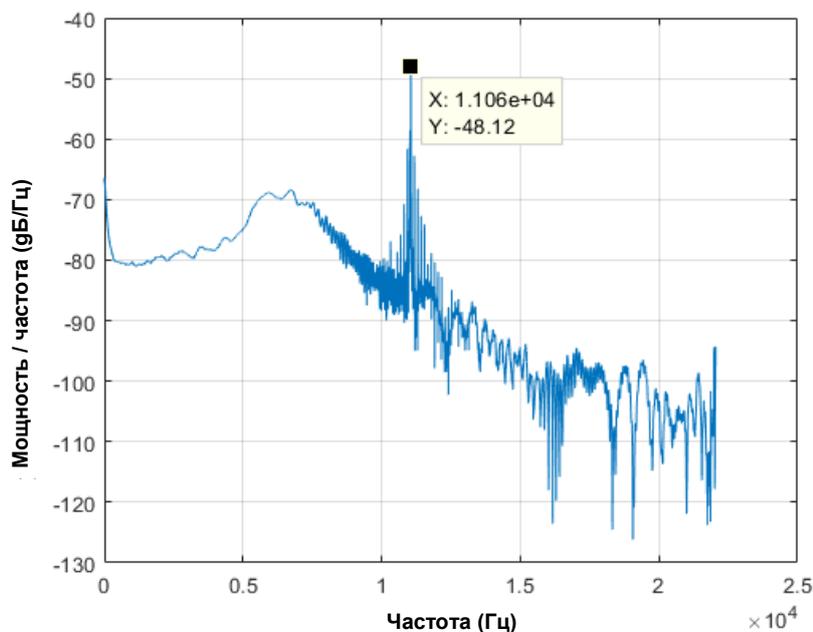


Рис. 3. Спектр сигнала  $v_1$ , оцененный по 5000 итераций моделирования (пик соответствует частоте 11 060 Гц)

Как и в модели начальной турбулентности Ландау [20], в пространстве состояний системы квазипериодическому режиму с двумя частотами соответствует двухмерный аттрактор тор  $T^2$ , а квазипериодическому режиму с тремя частотами – трехмерный аттрактор тор  $T^3$  [22]. Рюэль, Такенс и Ньюхаус показали, что в отличие от модели Ландау начальной турбулентности некоторые возмущения могут разрушить тор  $T^3$  и преобразовать его в хаотический (странный) аттрактор. Это означает, что нестационарное поведение системы, описываемое квазипериодическим режимом с тремя частотами, перестает быть устойчивым и становится явно хаотическим. Вместе с тем в отличие от тора  $T^3$  хаотический аттрактор обладает устойчивостью по отношению к действующим на систему возмущениям [22, 23].

Итак, согласно теории РТН спектр мощности динамической системы (схемы Чжуа) как функция управляющего параметра  $\alpha$  (рис. 4) будет эволюционировать следующим образом. Спектр мощности после первой бифуркации Хопфа будет содержать сначала одну частоту ( $\omega_1$ ), после второй бифуркации Хопфа – две частоты ( $\omega_1, \omega_2$ ), а затем, возможно, и три частоты ( $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3$ ), если имела место третья бифуркация Хопфа. Как только в спектре мощности появляется  $\omega_3$ , то возникает характерная для хаоса шумовая компонента. Однако третья частота может и не обнаруживаться перед тем, как в схеме идентифицируется хаос [23].

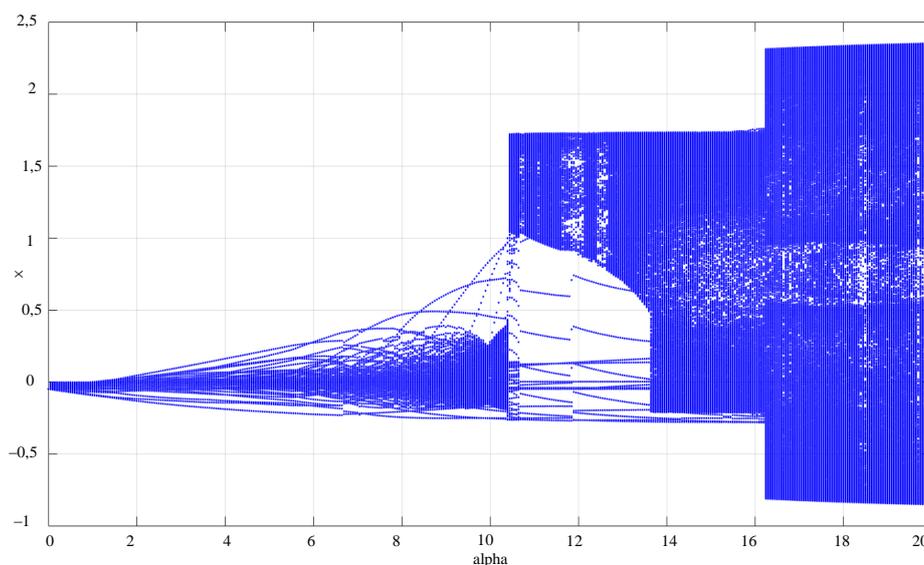


Рис. 4. Зависимость величины  $\Delta v_1$  от управляющего параметра  $\alpha$

Рассмотрим вышеизложенное на вычислительных экспериментах, реализующих спектральный анализ хаотических колебаний в электронной схеме Чжуа. На рис. 4 представлена бифуркационная диаграмма – зависимость величины  $\Delta v_1$  от управляющего параметра  $\alpha$ . В работе [12], где дается вывод системы уравнений (1), для определения величин  $\alpha$  и  $\beta$  использованы соотношения емкостей и индуктивностей схемы Чжуа, при которых экспериментально наблюдается хаотический режим. Исходя из этих соотношений, величина  $\alpha$  может быть взята равной 15,6. В [12] указано допустимое отклонение  $\alpha$  и  $\beta$  на 10%. Компьютерное моделирование на основе метода матричной декомпозиции показало возможность уточнения данной величины. В частности, «двойной завиток», определяющий два цикла с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , наблюдается в схеме Чжуа примерно с  $\alpha = 13,8$  и завершается при  $\alpha = 16,2$ . На рис. 5 представлены спектры мощности одной из переменных пространства состояний  $v_1$  в зависимости от управляющего параметра  $\alpha$ . В таблице размещены данные по величине и частоте возникающих спектральных мод (пиков) в зависимости от различных значений  $\alpha$ . В колонках под номером 1 приведена частота в герцах, под номером 2 – амплитуда в децибелах.

Аттракторы в пространстве состояний схемы Чжуа, соответствующие графикам спектров на рис. 5, показаны на рис. 6.

Как было отмечено выше, первая бифуркация ведет к переходу от начального стационарного состояния (неподвижной точки) к периодическому состоянию (предельному циклу) в фазовом пространстве состояний схемы Чжуа, а вторая бифуркация Хопфа преобразует периодический режим (с частотой  $\omega_1$ ) в квазипериодический режим (с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ).

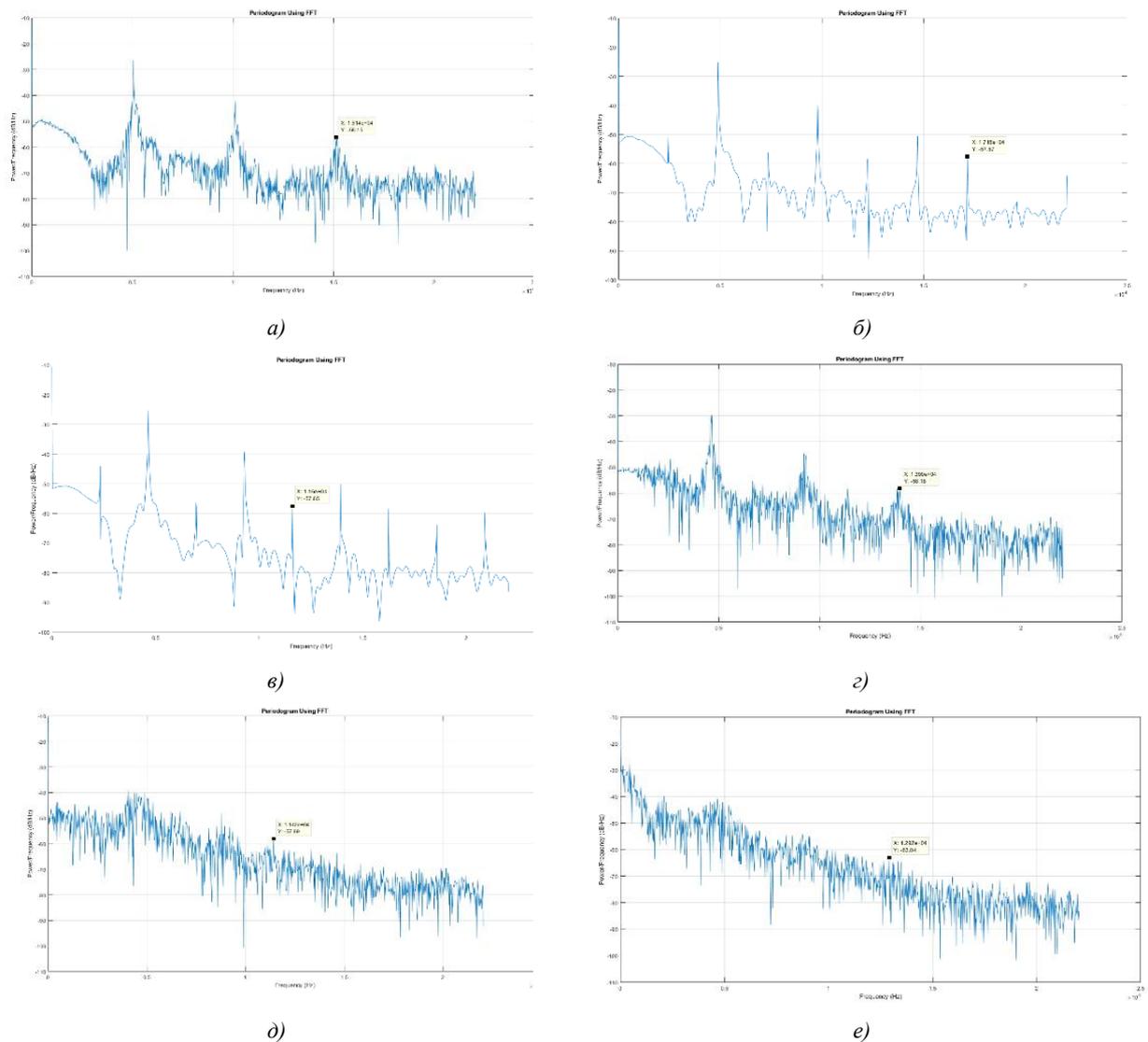


Рис. 5. Графики спектров сигнала  $v_1$  при  $u_1^* = -0,75$ : а) для  $\alpha = 11,5$ ; б)  $\alpha = 12$ ; в)  $\alpha = 12,5$ ; г)  $\alpha = 13$ ; д)  $\alpha = 13,5$ ; е)  $\alpha = 14$

Данные по величине и частоте возникающих спектральных мод (пиков), полученные по 300 итерациям при  $u_1^* = -0,75$  для различных значений  $\alpha$

$\alpha = 11,5$ (рис. 5, а)		$\alpha = 12$ (рис. 5, б)		$\alpha = 12,5$ (рис. 5, в)		$\alpha = 13$ (рис. 5, г)		$\alpha = 13,5$ (рис. 5, д)		$\alpha = 14$ (рис. 5, е)	
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
5050	-26,35	2447	-50,58	2324	-44,07	1394	-48,59	4049	-39,07	4665	-40,86
10110	-42,09	4895	-25,17	4649	-25,34	2615	-46,84	8776	-48,3	8741	-54,05
15140	-56,18	7342	-56,23	6952	-56,27	3595	-52,8	11420	-57,99	12920	-63,04
		9790	-40,05	9276	-39,29	4663	-29,73				
		12 240	-58,4	11 600	-57,65	5861	-59,04				
		14 710	-50,51	13 930	-50,2	6689	-55,42				
		17 160	-57,57	16 250	-58,5	8519	-56,74				
				18 570	-63,9	9217	-44,69				
				20 900	-57,71	10 280	-60,52				
						11 400	-58,41				
						12 400	-63,25				
						13 990	-58,19				
						14 380	-64,38				

Известно [23], что функция  $x$ , зависящая от  $r$  независимых переменных  $t_1, t_2, \dots, t_r$ , называется *периодической* с периодом  $2\pi$  по каждому из своих аргументов, если ее значение не изменяется при увеличении любой из переменных на  $2\pi$ :

$$x(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_r) = x(t_1, t_2, \dots, t_j + 2\pi, \dots, t_r), j = 1, 2, \dots, r. \quad (14)$$

Такая функция называется *квазипериодической* по времени, если все ее  $r$  переменных пропорциональны времени  $t$ :

$$t_j = \omega_j t, j = 1, \dots, r. \quad (15)$$

Квазипериодическая функция имеет  $r$  основных частот  $\omega_j$  и, соответственно,  $r$  периодов:  $T_j = 2\pi / \omega_j, j = 1, \dots, r$  (рис. 5, e).

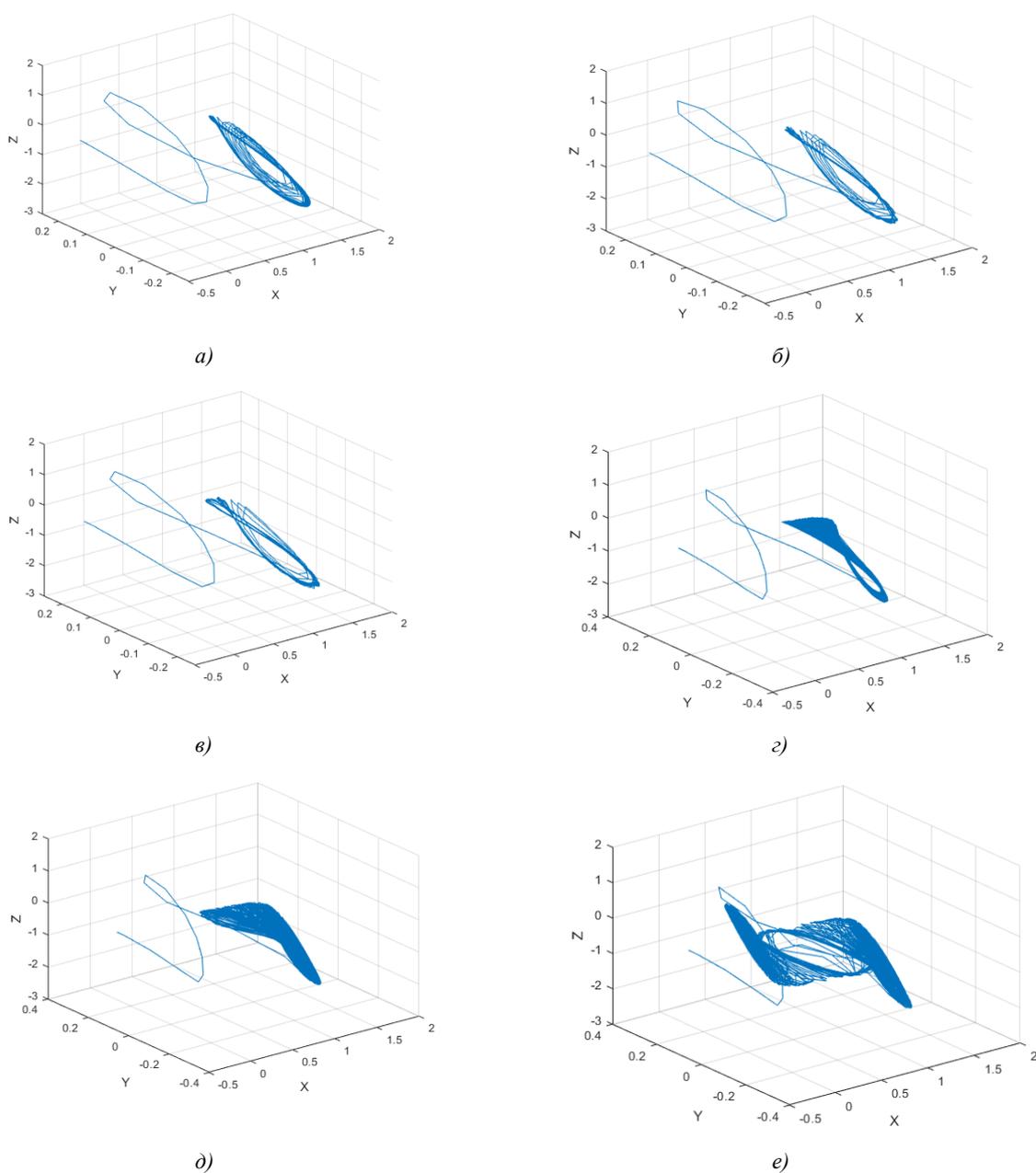


Рис. 6. Аттракторы сигналов  $v_1, v_2$  и  $v_3$  для различных значений  $\alpha$  при  $u_1^* = -0,75, A = 0,5131$  и  $C = -0,2955$ : а)  $\alpha = 11,5$ ; б)  $\alpha = 12$ ; в)  $\alpha = 12,5$ ; г)  $\alpha = 13$ ; д)  $\alpha = 13,5$ ; е)  $\alpha = 14$

Выше уже упоминалось, что для  $r = 2$  и 3 фазовая траектория, соответствующая квазипериодической функции, определена на торе размерностью  $r$ , обозначаемом символом  $T^r$ . Хотя спектр квазипериодической по времени функции Фурье, вообще говоря, имеет достаточно сложный вид (см., например, рис. 5, *e*), но в простейшем случае, когда квазипериодический сигнал представляет собой сумму периодических функций:

$$x(\omega_1 t, \dots, \omega_r t) = \sum_{i=1}^r x_i(\omega_i t), \quad (16)$$

спектр мощности есть сумма  $r$  спектров каждой из периодических составляющих  $x_i(\omega_i t)$  в силу линейности соотношения (16). Следовательно, он состоит из множества пиков на частотах  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$  и их гармониках:

$$m_1 \omega_1, m_2 \omega_2, \dots, m_r \omega_r,$$

где  $m_1, \dots, m_r$  – положительные целые числа. Более того, если квазипериодический сигнал включает произведения периодических (в частности, гармонических) функций  $x_i(\omega_i t)x_j(\omega_j t)$ , то его спектр Фурье содержит спектральные компоненты с основными частотами  $|\omega_i - \omega_j|$  и  $|\omega_i + \omega_j|$  и их гармониками. Обобщая этот результат, в общем случае можно утверждать, что спектр Фурье квазипериодической функции, нелинейно зависящей от периодических функций переменных  $\omega_i t, i = 1, \dots, r$ , содержит компоненты со всеми частотами вида

$$|m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_r \omega_r|, \quad (17)$$

где  $m_1, \dots, m_r$  – произвольные целые числа. Кроме того, отношение частот  $\omega_i / \omega_j$  может быть либо рациональным, либо иррациональным числом. В случае иррационального отношения из теории чисел известно, что суммы вида  $|m_i \omega_i + m_j \omega_j|$  образуют на положительной вещественной полуоси всюду плотное множество [23].

Принимая во внимание положения теории РТН [21], заключаем, что в простейшем случае  $r = 2$  при иррациональном отношении  $\omega_1 / \omega_2$  любое вещественное число сколь угодно близко к одной из сумм  $|m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2|$ . Следовательно, спектр мощности квазипериодического сигнала с двумя периодами (соответствующий ему аттрактор – двухмерный тор  $T^2$  в рамках теории РТН) также всюду плотен. Между тем данный факт вовсе не означает, что спектр можно представить с помощью непрерывной функции, поскольку это соответствовало бы случаю аperiodического сигнала. Действительно, два пика, довольно близких друг к другу на оси частот, отнюдь не обязательно должны иметь близкие амплитуды (см. рис. 5).

Для выяснения всех особенностей спектра мощности квазипериодического сигнала с двумя частотами  $\omega_1, \omega_2$  воспользуемся результатами вычислительных экспериментов, представленными в таблице, по реализации спектрального анализа электрических колебаний в схеме Чжуа. Обычно на практике спектр мощности такого квазипериодического сигнала идентифицируют, пытаясь найти две основные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые позволили бы представить частоты мод с большой амплитудой в виде простых комбинаций  $|m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2|$ , где  $m_1$  и  $m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (см. рис. 5, *a*). Как видно из первой колонки таблицы, соответствующей рис. 5, *a*, спектральные пики на частотах 5050, 10 110 и 15 140 Гц, скорее всего, являются модами с кратными гармониками по основной частоте  $\omega_1 = 5050$  Гц (кратностью  $m_1 = 2$  и  $m_2 = 3$ ), а спектральные «впадины» на частотах 4730, 9321, 14 100 и 18 200 Гц соответствуют «отсутствующим модам» на кратных гармониках по основной частоте 4730 Гц, т. е. при значении управляющего пара-

метра  $\alpha = 11,5$  спектр мощности является линейчатым. Из второй колонки таблицы, соответствующей рис. 5, б, отчетливо просматривается большое семейство пиков на частотах, кратных (с кратными множителями  $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 4, m_4 = 5, m_5 = 6$  и  $m_6 = 7$ ) первой основной частоте  $\omega_1 = 2447$  Гц ( $\alpha = 12$ ). Таким образом, при увеличении значения управляющего параметра от  $\alpha = 11,5$  до  $\alpha = 12$  первая основная частота  $\omega_1 = 5050$  Гц, по сути говоря, делится пополам, становясь равной  $\omega_1 = 2447$  Гц, что полностью соответствует известному сценарию удвоения периода [24]:  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \rightarrow 2T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1/2}$ .

При дальнейшем увеличении управляющего параметра до  $\alpha = 12,5$  спектральных пиков становится на треть больше (см. рис. 5, в), причем их частоты кратны (с кратными множителями  $m_1 = 2, m_2 = 3, \dots, m_8 = 7$ ) по основной частоте  $\omega_1 = 2324$  Гц, которая слегка уменьшается по величине на 5 % по сравнению с предыдущим случаем ( $\alpha = 12$ ).

Наконец, при достижении управляющим параметром величины  $\alpha = 13$  первая основная частота  $\omega_1 = 2615$  Гц снова делится пополам, становясь равной  $\omega_1 = 1394$  Гц, причем относительная высота прежних спектральных пиков (на частотах, кратных частоте 2615 Гц) уменьшается по сравнению с общим фоном спектра мощности (см. рис. 5, г), поскольку рядом с ними появляются новые моды с кратными гармониками по второй основной частоте  $\omega_2 = 3595$  Гц (например, с кратным множителем  $m_1 = 4$ , соответствующим новой частоте 14 380 Гц). Итак, для случая  $\alpha = 13$  характерно перераспределение энергии в спектре мощности квазипериодического сигнала с двумя периодами – отток энергии от спектральных мод с кратными гармониками по первой основной частоте  $\omega_1 = 1394$  Гц («бывшей первой»  $\omega_1 = 2615$  Гц), приводящий к уменьшению их амплитуд (см. рис. 5, г), за счет притока энергии к спектральным модам с кратными гармониками по второй основной частоте  $\omega_2 = 3595$  Гц. Как уже отмечалось, при иррациональном отношении  $\omega_2 / \omega_1 = 2,578\ 909\ 612\ 625\dots$  спектр мощности такого квазипериодического сигнала ( $\alpha = 13$ ) становится достаточно плотным, но не непрерывным.

Последующее увеличение управляющего параметра до  $\alpha = 13,5$  приводит к постепенному выравниванию по амплитуде уже имеющихся спектральных мод за счет появления новых мод, кратных возникшей в низкочастотной области спектра третьей основной частоте  $\omega_3 = 4019$  Гц (см. рис. 5, д), что соответствует в рамках теории РТН суперкритической третьей бифуркации Хопфа, порождающей переход от квазипериодического режима с двумя частотами к квазипериодическому режиму с тремя частотами [22]. При увеличении значения управляющего параметра до  $\alpha = 14$  происходит усиление мод в низкочастотной области спектра вблизи третьей основной частоты с постепенным подавлением резонансных гармоник (см. рис. 5, е), так что спектр становится похожим на спектр аperiodического сигнала, т. е. почти непрерывным. Это означает, что при  $\alpha > 14$  (в частности, для  $\alpha = 15,6$ ) наблюдается хаотический режим в пространстве состояний схемы Чжуа (см. рис. 4).

Заметим, что при уменьшении управляющего параметра от  $\alpha = 14$  до  $\alpha = 11,5$  происходит обратный процесс постепенного исчезновения гармоник, кратных основным частотам  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , за счет синхронизации (или затягивания) частот  $\omega_1, \omega_2$  и  $\omega_3$  [23]. В этом случае при уменьшении параметра  $\alpha$  частоты  $\omega_2$  и  $\omega_3$  постепенно увеличиваются так, что их отношение, например  $\omega_2 / \omega_3$ , становится рациональным числом, т. е.  $\omega_2 / \omega_3 = n_2 / n_3$ , где  $n_2, n_3$  – целые числа. Тогда квазипериодический сигнал в действительности становится периодическим с периодом  $T_1 = n_2 T_2 = n_3 T_3$ . В самом деле, согласно определению (14) получаем

$$\begin{aligned} x(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t) &= x(\omega_1 t + 2\pi n_1, \omega_2 t + 2\pi n_2, \omega_3 t + 2\pi n_3) = \\ &= x(\omega_1 t + 2\pi n_1, \omega_2 [t + 2\pi n_2 / \omega_2], \omega_3 [t + 2\pi n_3 / \omega_3]). \end{aligned} \quad (18)$$

Когда происходит синхронизация частот  $\omega_2/n_2 = \omega_3/n_3$ , все линии спектра Фурье становятся модами с гармониками низшей частоты

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3} . \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18), видим, что при синхронизации частот квазипериодический сигнал вырождается в периодический:

$$x(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t) = x(\omega_1 t + 2\pi n_1, \omega_1 n_2 t + 2\pi n_2, \omega_1 n_3 t + 2\pi n_3) \equiv \check{x}(\omega_1 t) , \quad (20)$$

так что соседние линии его спектра мощности всегда разделены одинаковым расстоянием  $2\pi/T_1$  (см., например, рис. 5, а).

**Некоторые замечания по реализации имитационной модели электронной схемы Чжуа, полученной методом матричной декомпозиции.** Экспериментальные исследования показывают существенное влияние величины  $u_1^*$  на динамику имитационной модели электронной схемы Чжуа, полученной методом матричной декомпозиции. При параметрах моделирования  $\alpha = 15,6$ ,  $\beta = -28$ ,  $A = 0,513\,0858$ ,  $C = -0,295\,467\,7125$  «псевдобифуркационная диаграмма» для имитационной модели электронной схемы Чжуа, реализованной на основе матричной декомпозиции, представлена на рис. 7. Как и на рис. 4, здесь на первый взгляд незаметен переход к хаосу через удвоение периода, если исследовать зависимость  $v_1$  от  $u_1^*$  (поэтому и использованы кавычки).

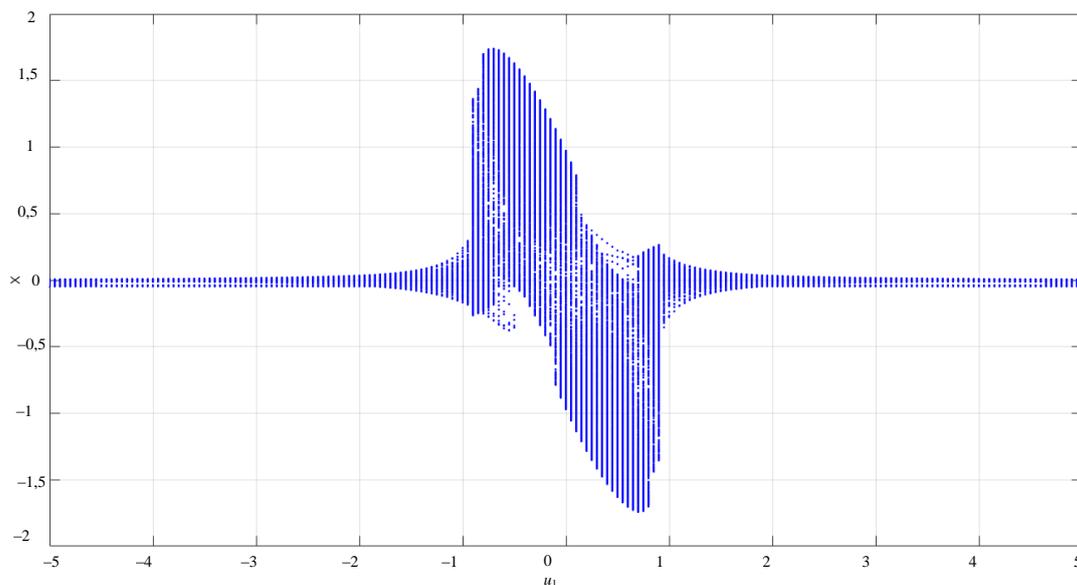
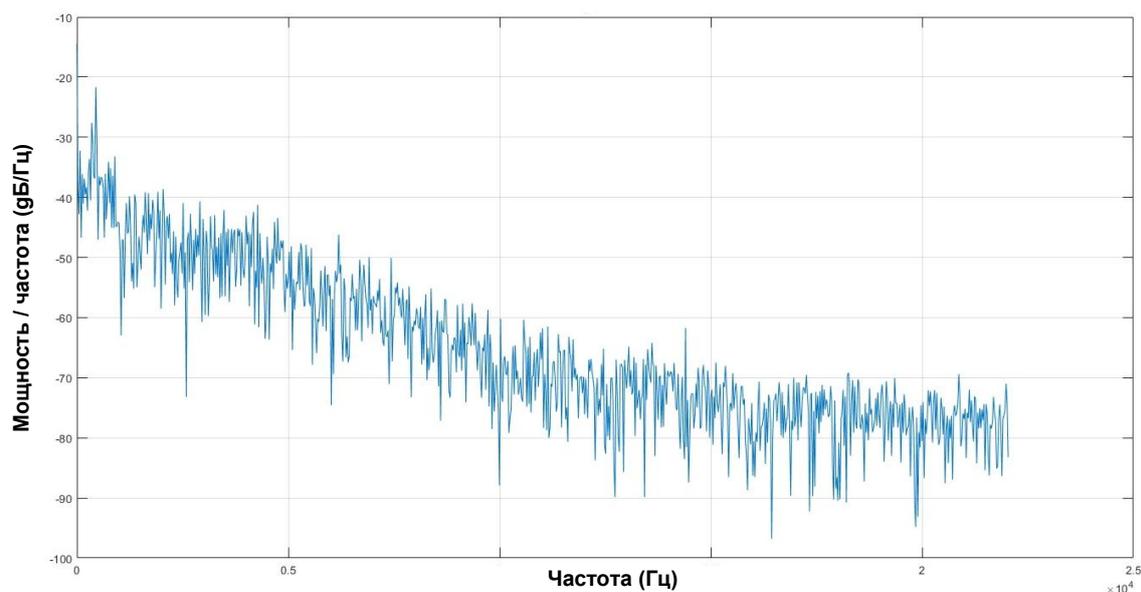
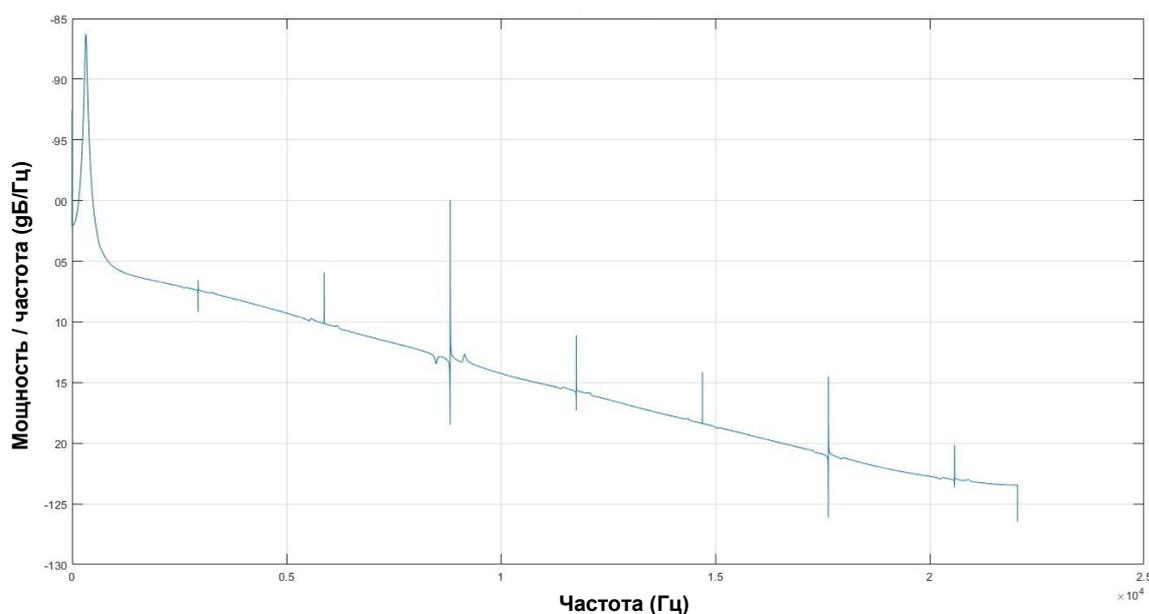


Рис. 7. Зависимость  $v_1$  от  $u_1^*$

Каждая точка графика на рис. 7 – это одно значение  $v_1$ , а в вертикальных столбиках размещены значения  $v_1$ , полученные для определенного  $u_1^*$ . Время моделирования для каждого значения  $u_1^*$  было ограничено 300 с (simulation stop time в настройках модели Simulink). Спектр мощности при  $u_1^* = -0,75$  соответствует спектру мощности хаотического сигнала (рис. 8).

Очевидно, что более простые спектры получаются там, где вертикальный столбик на диаграмме не так велик, как при  $u_1^* = \pm 0,75$ . В частности, если взять  $u_1^* = -4$ , то спектр мощности получится таким, как на графике (рис. 9), для которого  $v_1$  имеет вид обычных затухающих колебаний.

Рис. 8. Спектр мощности сигнала  $v_1$  для  $u_1^* = -0,75$ Рис. 9. Спектр мощности сигнала  $v_1$  для  $u_1^* = -4$ 

Таким образом, воспроизведение сложной хаотической динамики посредством метода матричной декомпозиции требует минимизации вычислительных ошибок при реализации процедур разложения в матричный ряд, члены которого вычисляются посредством ядер  $L_{N \times N}^{(1)}$ ,  $L_{N \times N^2}^{(2)}$ ,  $L_{N \times N^3}^{(3)}$ . Возможное объяснение этому заключается в том, что из-за высокой нерегулярности (осцилляционной изрезанности) хаотического сигнала его воспроизведение на основе матричного ряда накладывает строгие ограничения на переменные  $u_i = u_i^* + v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Использование кратного ряда Тейлора в методе матричной декомпозиции требует безусловной выполнимости условия (3а). В то же время шаг аппроксимации  $v_1$  должен быть очень малым, т. е. если выбрать  $|u_i^*| < 1$ , то тогда  $|v_i| \ll 1$  согласно условию (3а). Действительно, дополнительное условие

$|u_i^*| < 1$  выявляет «псевдобифуркационная диаграмма» на рис. 7. Именно в интервале  $u_i^* \in ]-1, 1[$  в полной мере наблюдаются бифуркационные свойства хаотического процесса, а выход за этот интервал приводит к сглаживанию (фильтрации) генерируемого процесса.

**Заключение.** В настоящей работе описано одно из возможных применений метода матричной декомпозиции А. М. Крота, основанного на разложении векторной функции в кратный ряд Тейлора, для анализа электронной схемы с хаотическим режимом работы. Так, в частности, был проведен анализ генератора хаотических колебаний, известного под названием «цепь Чжуа», или «электрическая схема Чжуа», с использованием указанного метода, который позволил разделить исходный оператор системы дифференциальных уравнений на линейное, квадратичное и кубическое ядра, после чего оценить вклад каждого из ядер в общую динамику схемы Чжуа. Благодаря этому удалось существенно упростить анализ схемы и получить новые данные, которые не могли быть выявлены с использованием традиционной схемы Чжуа [11, 25]. В частности, удалось уточнить интервалы изменения управляющего параметра, приводящего к хаосу в схеме. Комбинируя управляющие параметры, среди которых и стационарное значение переменной  $u_1^*$ , удалось получить аттрактор типа «двойной завиток», характерный для хаотического режима схемы Чжуа. Проведены бифуркационный и спектральный анализы генерируемых сигналов схемы Чжуа, показавшие механизм возникновения хаотического режима работы этой схемы.

Описанные выше результаты показывают, что применение метода матричной декомпозиции к сложным нелинейным динамическим системам позволяет получить новые данные об их динамике и, в частности, оценить степень влияния нелинейностей высших порядков, описываемых ядрами  $L_{N \times N}^{(1)}, L_{N \times N^2}^{(2)}, L_{N \times N^3}^{(3)}$ , на хаотический режим работы схемы Чжуа, когда одно или несколько ядер могут быть исключены из функционирования в схеме [11]. Как было отмечено в [26], именно исследование НДС больших размерностей представляет в настоящее время существенную проблему. В этой связи метод матричной декомпозиции может использоваться для анализа подобных НДС.

Полученные результаты предполагается применить как для теоретического анализа схем с хаотической динамикой, так и для разработки новых устройств, использующих хаотические колебания для решения задач управления, обработки информации и связи.

#### Список использованных источников

1. Krot, A. M. Chaotic dynamic methods based on decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space / A. M. Krot // Melecon 2000 : Proc. 10th Mediterranean Electrotechnical Conf., Lemesos, Cyprus, 29–31 May 2000. – Lemesos, 2000. – Vol. 2. – P. 643–646.
2. Krot, A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system / A. M. Krot // EUSIPCO–2000 : Proc. X European Signal Processing Conf., Tampere, Finland, 4–8 Sept. 2000. – Tampere, 2000. – Vol. 3. – P. 2453–2456.
3. Krot, A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system / A. M. Krot // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2001. – Vol. 4, no. 2. – P. 106–115.
4. Krot, A. M. Application of expansion into matrix to analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems / A. M. Krot // DSP–2002 : Proc. 14th IEEE Intern. Conf. on Digital Signal Processing, Santorini, Greece, 1–3 July 2002. – Santorini, 2002. – P. 959–962.
5. Krot, A. M. Minimal attractor embedding estimation based on matrix decomposition for analysis of dynamical systems / A. M. Krot, H. B. Minervina // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2002. – Vol. 5, no. 2. – P. 161–172.
6. Крот, А. М. Анализ аттракторов сложных нелинейных динамических систем на основе матричных рядов в пространстве состояний / А. М. Крот // Информатика. – 2004. – № 1(1). – С. 7–16.
7. Крот, А. М. Разработка и исследование моделей сложных динамических систем на основе методов вход-выходных представлений и пространства состояний / А. М. Крот // Информатика. – 2004. – № 4(4). – С. 95–108.

8. Krot, A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals / A. M. Krot // DSP-2009 : Proc. 16th IEEE Intern. Conf. on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, 5–7 July 2009. – Santorini, 2009. – P. 5–10.
9. Krot, A. M. Bifurcation analysis of attractors of complex systems based on matrix decomposition theory / A. M. Krot // IEM 2011 : Proc. of IEEE Intern. Conf. on Industrial Engineering and Management, Zhengzhou, China, Aug. 12–14 2011. – Zhengzhou, 2011. – P. 7–13.
10. Krot, A. M. Nonlinear analysis of the Hopfield network dynamical states using matrix decomposition theory / A. M. Krot, R. A. Prakupovich // Chaotic Modeling and Simulation. – 2013. – Vol. 1. – P. 133–146.
11. Крот, А. М. Анализ хаотических режимов функционирования схемы Чжуа с гладкой нелинейностью на основе метода матричной декомпозиции / А. М. Крот, В. А. Сычев // Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2018. – № 4. – С. 501–512.
12. Matsumoto, T. Chaos in electronic circuits / T. Matsumoto // Proceedings of the IEEE. – 1987. – Vol. 75, no. 3. – P. 1033–1057.
13. Ogorzalek, M. Exploring chaos in Chua's circuit via unstable periodic orbits / M. Ogorzalek, Z. Galias, L. Chua // IEEE Intern. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS '93), Chicago, Illinois. – Chicago, 1993. – P. 2608–2611.
14. Zhong, G. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity / G. Zhong // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1994. – Vol. 41, no. 12. – P. 934–941.
15. Galias, Z. Rigorous analysis of Chua's circuit with a smooth nonlinearity / Z. Galias // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. – 2016. – Vol. 63, no. 12. – P. 2304–2312.
16. A fast and simple implementation of Chua's oscillator with "cubic-like" nonlinearity / K. O'Donoghue [et al.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Vol. 15, no. 9. – P. 2959–2971.
17. Srisuchinwong, B. Implementation of Chua's chaotic oscillator using "roughly-cubic-like" nonlinearity / B. Srisuchinwong, W. San-um // 4th Intern. Conf. on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, Chiangrai, Thailand, 9–12 May 2007. – Chiangrai, 2007. – P. 36–37.
18. Galias, Z. On the existence of chaos in the Chua's circuit with a smooth nonlinearity / Z. Galias // IEEE Intern. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS), Montreal, QC, Canada, 22–25 May 2016. – Montreal, 2016. – P. 1106–1109.
19. Ландау, Л. Д. К проблеме турбулентности / Л. Д. Ландау // ДАН СССР. – 1944. – Т. 44, № 8. – С. 339–342.
20. Landau, L. D. Fluid Mechanics / L. D. Landau, E. M. Lifschitz. – Oxford : Pergamon, 1959. – Vol. XIII. – 539 p.
21. Ruelle, D. On the nature of turbulence / D. Ruelle, F. Takens // Communications in Mathematical Physics. – 1971. – No. 21. – P. 167–192.
22. Ruelle, D. Occurrence of strange axiom A attractors near quasi periodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$  / D. Ruelle, F. Takens, S. Newhouse // Communications in Mathematical Physics. – 1978. – No. 64. – P. 35–40.
23. Bergé, P. L'ordre dans le chaos: vers une approche déterministe de la turbulence / P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal. – Paris : Hermann, 1988. – 353 p.
24. Moon, F. Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers / F. Moon. – John Wiley&Son, 2004. – 309 p.
25. Siderskiy, V. Chua's circuit for experimenters using readily available parts from a hobby electronics store / V. Siderskiy, A. Mohammed, V. Kapila // 122nd ASEE Annual Conf. & Exposition. – Seattle : American Society for Engineering Education, 2015. – P. 26.384.1–26.384.15.
26. Galias, Z. The dangers of rounding errors for simulations and analysis of nonlinear circuits and systems – and how to avoid them / Z. Galias // IEEE Circuits and Systems Magazine. – 2013. – Vol. 13, no. 3. – P. 35–52.

## References

1. Krot A. M. Chaotic dynamic methods based on decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space. *Melecon 2000: Proc. 10th Mediterranean Electrotechnical Conference, Lemesos, Cyprus, 29–31 May 2000*. Lemesos, 2000, vol. 2, pp. 643–646.
2. Krot A. M. The decomposition of vector functions in vector-matrix series into state-space of nonlinear dynamic system. *EUSIPCO-2000: Proc. X European Signal Processing Conference, Tampere, Finland, 4–8 September 2000*. Tampere, 2000, vol. 3, pp. 2453–2456.
3. Krot A. M. Matrix decompositions of vector functions and shift operators on the trajectories of a nonlinear dynamical system. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2001, vol. 4, no. 2, pp. 106–115.

4. Krot A. M. Application of expansion into matrix to analysis of attractors of complex nonlinear dynamical systems. *DSP-2002: Proc. 14th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Santorini, Greece, 1–3 July 2002*. Santorini, 2012, pp. 959–962.
5. Krot A. M., Minervina H. B. Minimal attractor embedding estimation based on matrix decomposition for analysis of dynamical systems. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2002, vol. 5, no. 2, pp. 161–172.
6. Krot A. M. Analiz atraktorov slozhnyh nelinejnyh dinamicheskikh sistem na osnove matrichnyh rjadov v prostranstve sostojanij [Analysis of attractors of complex nonlinear dynamic systems based on matrix series in the state space]. *Informatika [Informatics]*, 2004, no. 1(1), pp. 7–16 (in Russian).
7. Krot A. M. Razrabotka i issledovanie modelej slozhnyh dinamicheskikh sistem na osnove metodov vhod-vyhodnyh predstavlenij i prostranstva sostojanij [Development and research of models of complex dynamic systems based on methods of input-output representations and state space]. *Informatika [Informatics]*, 2004, no. 4(4), pp. 95–108 (in Russian).
8. Krot A. M. The development of matrix decomposition theory for nonlinear analysis of chaotic attractors of complex systems and signals. *DSP-2009: Proc. 16th IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Thira, Santorini, Greece, 5–7 July 2009*. Santorini, 2009, pp. 5–10.
9. Krot A. M. Bifurcation analysis of attractors of complex systems based on matrix decomposition theory. *IEM 2011: Proc. of IEEE International Conference on Industrial Engineering and Management, Zhengzhou, China, 12–14 August 2011*. Zhengzhou, 2011, pp. 7–13.
10. Krot A. M., Prakupovich R. A. Nonlinear analysis of the Hopfield network dynamical states using matrix decomposition theory. *Chaotic Modeling and Simulation*, 2013, vol. 1, pp. 133–146.
11. Krot A. M., Sychou U. A. Analiz haoticheskikh rezhimov funkcionirovanija shemy Chzhua s gladkoj nelinejnost'ju na osnove metoda matrichnoj dekompozicii [Analysis of chaotic modes of functioning of the Chua scheme with smooth nonlinearity based on the matrix decomposition method]. *Izvestija Nacional'noj akademii nauk Belarusi. Serija fiziko-tehnicheskikh nauk [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series]*, 2018, no. 4, pp. 501–512 (in Russian).
12. Matsumoto T. Chaos in electronic circuits. *Proceedings of the IEEE*, 1987, vol. 75, no. 3, pp. 1033–1057. <https://doi.org/10.1109/PROC.1987.13848>
13. Ogorzalek M., Galias Z., Chua L. Exploring chaos in Chua's circuit via unstable periodic orbits. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS'93)*. Chicago, Illinois, 1993, pp. 2608–2611.
14. Zhong G. Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 1994, vol. 41, no. 12, pp. 934–941.
15. Galias Z. Rigorous analysis of Chua's circuit with a smooth nonlinearity. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2016, vol. 63, no. 12, pp. 2304–2312.
16. O'Donoghue K., Kennedy M. P., Forbes P., Qu M., Jones S. A fast and simple implementation of Chua's oscillator with "cubic-like" nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. – 2005. – Vol. 15, no. 9. – P. 2959–2971.
17. Srisuchinwong B., San-um W. Implementation of Chua's chaotic oscillator using "roughly-cubic-like" nonlinearity. *4th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology, Chiangrai, Thailand, 9–12 May 2007*. Chiangrai, 2007, pp. 36–37.
18. Galias Z. On the existence of chaos in the Chua's circuit with a smooth nonlinearity. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Montreal, QC, Canada, 22–25 May 2016*. Montreal, 2016, pp. 1106–1109. <http://dx.doi.org/10.1109/ISCAS.2016.7527438>
19. Landau L. D. K probleme turbulentnosti [To the problem of turbulence]. *Doklady Akademii nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of the USSR]*, 1944, vol. 44, no. 8, pp. 339–342 (in Russian).
20. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Fluid Mechanics*. Oxford, Pergamon, 1959, vol. XIII, 539 p.
21. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 1971, no. 21, pp. 167–192.
22. Ruelle D., Takens F., Newhouse S. Occurrence of strange axiom A attractors near quasi periodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$ . *Communications in Mathematical Physics*, 1978, no. 64, pp. 35–40.
23. Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. *L'ordre dans le chaos: vers une approche déterministe de la turbulence*. Paris, Hermann, 1988, 353 p. (in France).
24. Moon F. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley&Son, 2004, 309 p.
25. Siderskiy V., Mohammed A., Kapila V. Chua's circuit for experimenters using readily available parts from a hobby electronics store. *122nd ASEE Annual Conference & Exposition*. Seattle, American Society for Engineering Education, 2015, pp. 26.384.1–26.384.15.
26. Galias Z. The dangers of rounding errors for simulations and analysis of nonlinear circuits and systems – and how to avoid them. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2013, vol. 13, no. 3, pp. 35–52.

**Информация об авторах**

*Крот Александр Михайлович*, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

*Сычев Владислав Анатольевич*, научный сотрудник лаборатории робототехнических систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.

E-mail: vsychyov@robotics.by

**Information about the authors**

*Alexander M. Krot*, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Laboratory of Self-Organization Systems Modeling, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by

*Uladzislau A. Sychou*, Researcher of the Laboratory of Robotic Systems, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus.

E-mail: vsychyov@robotics.by