ИНФОРМАТИКА

2010 январь-март № 1

УДК 618.3:519.2

О.В. Серая

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ В МАРКОВСКИ МЕНЯЮЩЕЙСЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЕ

Формулируется задача анализа системы, параметры которой изменяются под воздействием внешней среды. Рассматривается частный случай, когда параметры марковской системы меняются при марковском изменении условий функционирования.

Введение

Традиционные задачи оценки эффективности систем решаются в предположении, что основные параметры системы в процессе ее функционирования не изменяются. Например, при анализе систем массового обслуживания используется допущение, что число каналов системы и их производительность заданы и фиксированы. При этом в условиях входящего потока заявок на обслуживание заданной интенсивности и с заданным законом распределения интервала между ними для заданных дисциплины обслуживания и характеристик каналов может быть получено замкнутое описание математической модели, определяющей процесс функционирования системы. В частности, особенно простые соотношения имеют место, если считать, что входящий поток заявок пуассоновский и продолжительность обслуживания распределена экспоненциально. Собственно, традиционная теория массового обслуживания целиком укладывается в эту схему. В то же время при решении многих практических задач необходимо учитывать то обстоятельство, что параметры анализируемой системы – не обязательно константы и могут в связи с динамикой состояний внешней среды изменяться, причем во многих случаях даже не детерминированно, а стохастически. Возникающие при этом модели выходят за рамки классической теории и требуют изучения. Понятно, что соответствующие задачи анализа систем вряд ли целесообразно ставить в самой общей постановке ввиду ее недостаточной содержательности. В связи с этим ограничимся рассмотрением марковских систем [1–4]. Отметим, однако, что и в этом случае задача остается сложной. Вместе с тем содержательные результаты могут быть достаточно просто получены, если сузить постановку задачи следующим образом. Будем считать, что и среда и система могут осуществлять переходы только в соседние два состояния, т. е. комплекс «среда – система» функционирует под воздействием случайных процессов типа гибели и размножения. Рассмотрим получаемую при этом задачу.

1. Постановка задачи

Пусть для марковской системы с конечным множеством состояний n задана инфинитезимальная трехдиагональная матрица $\Lambda = \left(\lambda_{ij}\right)$ интенсивностей переходов. Введем вектор-функцию $\mathbf{P}(t) = \left(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)\right)$, компоненты которой определяют законы изменения во времени вероятностей пребывания системы на множестве возможных состояний. Тогда поведение системы, как известно [1, 2], описывается системой дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{j \in E_k^+} \lambda_{jk} p_j(t) - p_k(t) \sum_{j \in E_k^-} \lambda_{kj}, \; k = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где λ_{jk} – интенсивность перехода из j-го состояния в k-е;

$p_j(t)$ – вероятность того, что в момент t система будет находиться в состоянии j;

E_k^+ – множество состояний, из которых возможен переход в состояние k за один шаг;

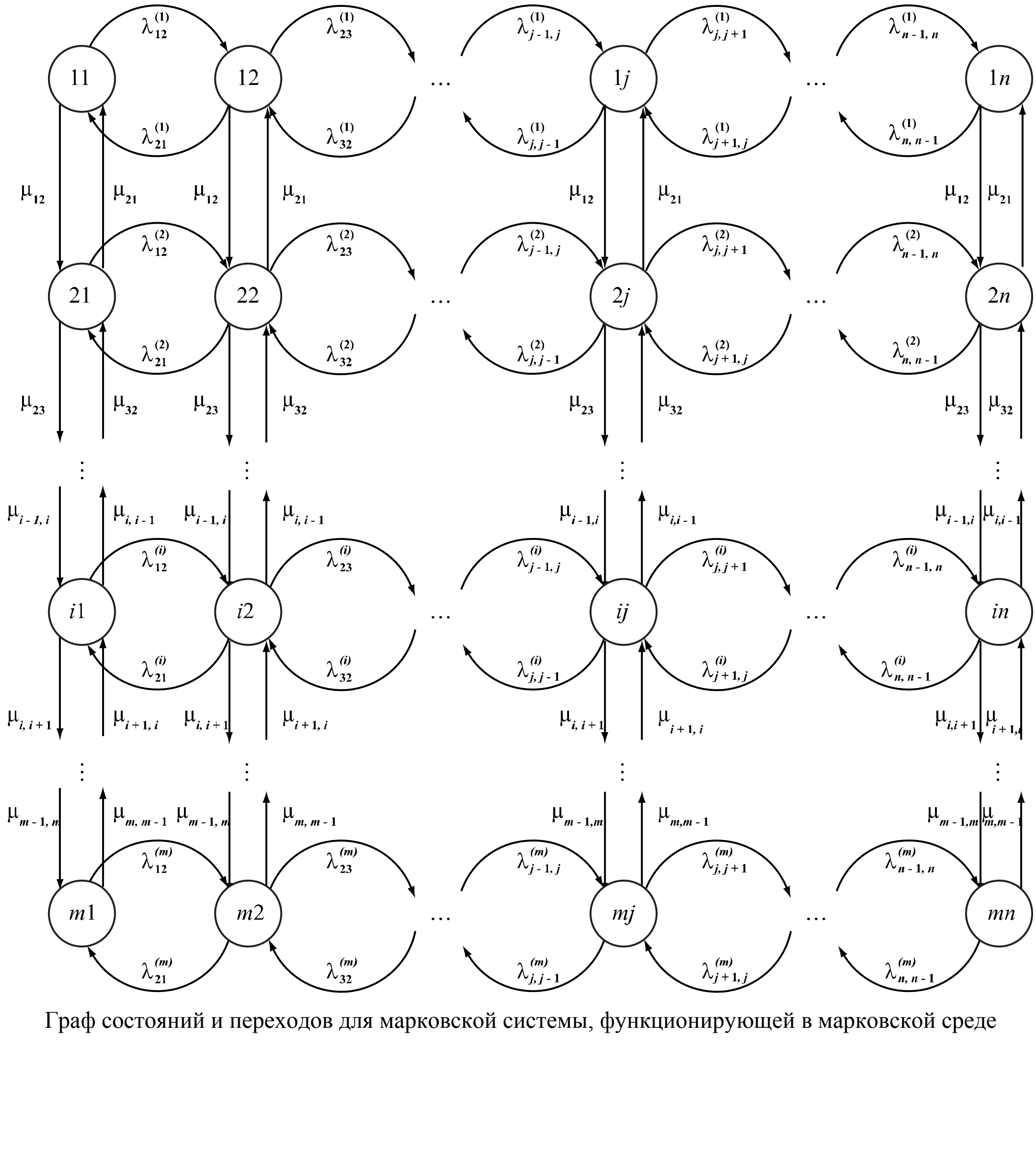
E_k^- – множество состояний, в которые возможен переход из состояния k за один шаг.

Система линейных дифференциальных уравнений (1) при заданных начальных условиях, например $\mathbf{P}(0) = \left(1 \;\; 0 \;\; ... \; 0\right)$, решается известными методами [5, 6]. Если при этом интерес представляет не переходный процесс, а стационарное распределение вероятностей состояний системы, то $\frac{dp_k(t)}{dt} = 0$, $k = 1, 2, ..., n$, и система (1) редуцируется к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j \in E_k^+} \lambda_{jk} p_j - p_k \sum_{j \in E_k^-} \lambda_{kj} = 0, \; k = 1, 2, ..., n, \tag{2}$$

которая решается вместе с условием нормировки $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ и определяет искомое распределение вероятностей состояний.

Будем считать теперь, что параметры системы (число состояний и значения интенсивностей переходов) зависят от условий и режима эксплуатации системы, изменение которых обусловливается внешней средой. Математической моделью функционирования комплекса «среда – система» является двухмерный марковский процесс. Каждое из возможных состояний комплекса описывается парой чисел (i, j), $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, где первое число задает номер состояния среды, а второе – состояние системы. Будем считать, что интенсивности переходов для состояний системы зависят от состояния среды, а изменение состояния среды, напротив, от состояния системы не зависит. Тогда процесс перехода среды из одного состояния в другое может быть описан инфинитезимальной трехдиагональной матрицей $\mathbf{M} = \left(\mu_{i_1 i_2}\right)$. При этом для каждого состояния i среды введем матрицу $\Lambda^{(i)} = \left(\lambda^{(i)}_{j_1 j_2}\right)$ интенсивностей переходов состояний системы, $i = 1, 2, ..., m$. Соответствующий двухмерный граф состояний и переходов для среды и системы приведен на рисунке.



Граф состояний и переходов для марковской системы, функционирующей в марковской среде

Поставим задачу отыскания стационарного распределения вероятностей состояний марковской системы, функционирующей в марковской среде.

2. Основные результаты

Введем набор $\mathbf{P}=\left(p_j^{(i)}\right)$ стационарных вероятностей состояний комплекса «среда – система». Компоненты этого набора удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{21}^{(1)} p_2^{(1)}+\mu_{21} p_1^{(2)}-p_1^{(1)}\left(\lambda_{12}^{(1)}+\mu_{12}\right)=0, \\
&\lambda_{12}^{(1)} p_1^{(1)}+\lambda_{32}^{(1)} p_3^{(1)}+\mu_{21} p_2^{(2)}-p_2^{(1)}\left(\lambda_{21}^{(1)}+\lambda_{23}^{(1)}+\mu_{12}\right)=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{j-1,j}^{(i)} p_{j-1}^{(i)}+\lambda_{j+1,j}^{(i)} p_{j+1}^{(i)}+\mu_{i-1,i} p_j^{(i-1)}+\mu_{i+1,i} p_j^{(i+1)}- \\
&-p_j^{(i)}\left(\lambda_{j,j-1}^{(i)}+\lambda_{j,j+1}^{(i)}+\mu_{i,i-1}+\mu_{i,i+1}\right)=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_{n-1,n}^{(m)} p_{n-1}^{(m)}+\mu_{m-1,m} p_n^{(m-1)}-p_n^{(m)}\left(\lambda_{n,n-1}^{(m)}+\mu_{m,m-1}\right)=0 .
\end{aligned} \tag{3}
$$

Введем вспомогательные переменные:

$$
\begin{aligned}
&u_j^{(i)}=\lambda_{j-1,j}^{(i)} p_{j-1}^{(i)}-\lambda_{j,j-1}^{(i)} p_j^{(i)}, \; j=2,3,\ldots,n; \\
&v_i^{(j)}=\mu_{i-1,i} p_j^{(i-1)}-\mu_{i,i-1} p_j^{(i)}, \; i=2,3,\ldots,m .
\end{aligned} \tag{4}
$$

Тогда система (3) в развернутом виде запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&-u_2^{(1)}-v_2^{(1)}=0, \\
&u_2^{(1)}-u_3^{(1)}-v_2^{(2)}=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_{n-1}^{(1)}-u_n^{(1)}-v_2^{(n)}=0, \\
&u_n^{(1)}-v_2^{(n)}=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-u_2^{(i)}+v_i^{(1)}-v_{i+1}^{(1)}=0, \\
&u_2^{(i)}-u_3^{(i)}+v_i^{(2)}-v_{i+1}^{(2)}=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_{n-1}^{(i)}-u_n^{(i)}+v_i^{(n-1)}-v_{i+1}^{(n-1)}=0, \\
&u_n^{(i)}+v_i^{(n)}-v_{i+1}^{(n)}=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-u_2^{(m)}+v_m^{(1)}=0, \\
&u_2^{(m)}-u_3^{(m)}+v_m^{(2)}=0; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_{n-1}^{(m)}-u_n^{(m)}+v_m^{(n)}=0 .
\end{aligned} \tag{5}
$$

Система (5) недоопределена: содержит mn уравнений и $2(m-1)(n-1)$ неизвестных. Простое ее решение получим, положив $u_2^{(1)}=u_2^{(2)}=\ldots=u_2^{(m)}=v_2^{(1)}=v_2^{(2)}=\ldots=v_2^{(n)}=0$.

Тогда $u_j^{(i)} = v_i^{(j)} = 0$ для всех $i = 2, 3, ..., m$ и $j = 2, 3, ..., n$. Отсюда следуют рекуррентные соотношения

$$p_j^{(i)} = \frac{\lambda_{j-1,j}^{(i)}}{\lambda_{j,j-1}^{(i)}} p_{j-1}^{(i)}, \; j = 2, 3, ..., n;$$

$$p_j^{(i)} = \frac{\mu_{i-1,i}}{\mu_{i,i-1}} p_j^{(i-1)}, \; i = 2, 3, ..., m, \qquad (6)$$

используя которые, получим

$$p_j^{(i)} = p_1^{(i)} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}}, \; j = 2, 3, ..., n; \qquad (7)$$

$$p_j^{(i)} = p_j^{(1)} \prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}}, \; i = 2, 3, ..., m. \qquad (8)$$

Здесь

$$\frac{\lambda_{01}^{(i)}}{\lambda_{10}^{(i)}} = \frac{\mu_{01}}{\mu_{10}} = 1, \; i = 1, 2, ..., m.$$

Введем $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$ – распределение вероятностей состояний среды.

Так как с учетом (8)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_j^{(1)} \prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}} = \sum_{j=1}^{n} p_j^{(1)} \sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}} = \pi_1 \sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}} = 1,$$

то

$$\pi_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}}}.$$

С другой стороны, из (6) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} = \pi_i = \frac{\mu_{i-1,i}}{\mu_{i,i-1}} \sum_{j=1}^{n} p_j^{(i-1)} = \frac{\mu_{i-1,i}}{\mu_{i,i-1}} \pi_{i-1}.$$

Отсюда

$$\pi_i = \pi_1 \prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}}, \; i = 1, 2, ..., m. \qquad (9)$$

Поскольку для совокупности вероятностей состояний среды выполняется условие нормировки, можно записать

$$\pi_i = \frac{\prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}}}{\sum_{s=1}^{m}\prod_{k=1}^{s} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}}}, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (10)$$

Наконец, так как

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^{(i)} = p_1^{(i)} \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}} = \pi_i ,$$

то

$$p_1^{(i)} = \frac{\pi_i}{\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}}}$$

и с учетом (7)

$$p_j^{(i)} = \frac{\pi_i \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}}}{\sum_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}}} ,\ i = 1, 2, ..., m ,\ j = 1, 2, ..., n . \tag{11}$$

Окончательные соотношения получим, подставив (10) в (11). При этом

$$p_j^{(i)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{i} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}} \right) \left(\prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}} \right)}{\left(\sum_{s=1}^{m} \prod_{k=1}^{s} \frac{\mu_{k-1,k}}{\mu_{k,k-1}} \right) \left(\sum_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{r} \frac{\lambda_{k-1,k}^{(i)}}{\lambda_{k,k-1}^{(i)}} \right)} ,\ i = 1, 2, ..., m ,\ j = 1, 2, ..., n . \tag{12}$$

Таким образом, получены формулы для расчета стационарных вероятностей состояний комплекса «среда – система», обладающие своеобразной симметрией относительно координат двухмерного марковского процесса, который описывает поведение этого комплекса. Понятно, что уровень доверия к полученным результатам в каждом конкретном исследовании целиком определяется тем, насколько верны принятые допущения применительно к условиям этого исследования.

Используя соотношения (12), можно рассчитать стационарное распределение вероятностей состояний системы:

$$\mathbf{P} = \left(\sum_{i=1}^{m} \pi_i p_1^{(i)}, \sum_{i=1}^{m} \pi_i p_2^{(i)}, ..., \sum_{i=1}^{m} \pi_i p_n^{(i)} \right) = \left(p_1, p_2, ..., p_n \right) . \tag{13}$$

Если теперь с каждым возможным состоянием системы j связано численное значение показателя эффективности функционирования системы η_j, $j = 1, 2, ..., n$, то с помощью (13) могут быть вычислены среднее значение и дисперсия показателя эффективности системы:

$$M[\eta] = \sum_{j=1}^{n} p_j \eta_j ,\ D[\eta] = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\eta_j - M[\eta] \right)^2 . \tag{14}$$

Предложенная технология оценки эффективности систем, функционирующих в марковски изменяющейся среде, реализуется на практике с учетом конкретных особенностей задачи исследования. Пусть, например, задана n-канальная марковская система массового обслуживания с отказами, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ, а интенсивность обслуживания заявок для каждого из равноэффективных каналов системы равна μ. Состояние такой системы будем определять числом занятых каналов. При этом распределение вероятностей состояний данной системы описывается формулами Эрланга:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{l=0}^{n} \frac{\alpha^l}{l!}}, \ \alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \ k = 0, 1, 2, ..., n .$$

Информативной характеристикой эффективности функционирования системы является вероятность отказа (вероятность того, что очередная заявка поступила в момент, когда все каналы системы заняты), рассчитываемая по формуле

$$P_{OTK} = p_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{l=0}^{n} \frac{\alpha^l}{l!}} . \tag{15}$$

Предположим далее, что каналы системы в условиях воздействия внешней среды отказывают. Будем считать, что каналы равнонадежны, поток отказов пуассоновский с интенсивностью v и каналы отказывают независимо от того, заняты они обслуживанием или нет. Пусть, кроме того, время восстановления каждого из отказавших каналов распределено экспоненциально со средним значением, равным γ^{-1}. Тогда распределение вероятностей числа отказавших каналов имеет вид

$$Q_s = \frac{\frac{\beta^s}{s!}}{\sum_{l=0}^{n} \frac{\beta^l}{l!}}, \ \beta = \frac{v}{\gamma}, \ s = 0, 1, 2, ..., n . \tag{16}$$

Если в системе отказали ровно s каналов, то число работоспособных каналов $c = n - s$. При этом, естественно, вероятность того, что в какой-то момент времени работоспособно $c = n - s$ каналов, равна Q_s. В отношении интенсивности обслуживания заявок работоспособными каналами системы при наличии отказавших могут быть приняты разные предположения. Наиболее простое: интенсивность обслуживания для каждого из каналов не зависит от числа отказавших каналов системы. С другой стороны, на практике многие системы массового обслуживания функционируют таким образом, что в случае отказа некоторого числа обслуживающих агрегатов их нагрузка частично распределяется между работающими. При этом будем считать, что интенсивность обслуживания заявок в условиях, когда s каналов отказало, равна μ_s. Тогда соотношение (15) примет вид

$$P_{OTK}^{(s)} = p_{n-s} = \frac{\frac{\alpha_s^{n-s}}{(n-s)!}}{\sum_{l=0}^{n-s} \frac{\alpha_s^l}{l!}}, \ \alpha_s = \frac{\lambda}{\mu_s} . \tag{17}$$

Данное соотношение задает условную вероятность отказа, полученную в предположении, что s каналов неработоспособны. Теперь с учетом (17) можно рассчитать значение безусловной характеристики функционирования системы:

$$P_{OTK} = \sum_{s=0}^{n} P_{OTK}^{(s)} Q_s = \sum_{s=0}^{n} \frac{\frac{\alpha_s^{n-s}}{(n-s)!}}{\sum_{l=0}^{n-s} \frac{\alpha_s^l}{l!}} \frac{\frac{\beta^s}{s!}}{\sum_{l=0}^{n} \frac{\beta^l}{l!}} .$$

Заключение

Полученные результаты могут быть использованы при решении многих практических задач. Одно из возможных приложений – оценка эффективности систем массового обслуживания с учетом ненадежности каналов. При этом интенсивность потоков отказов системы естественно считать зависящей от условий и режима эксплуатации системы, марковская модель изменения которых вполне реалистична. Еще один вариант использования полученных результатов связан с оценкой пропускной способности компьютерной сети, в которой распределение длин поступающих в систему обработки пакетов индуцируется состоянием марковской внешней среды.

Направление дальнейших исследований связано с изучением поведения полумарковских систем, эксплуатационные характеристики которых изменяются под воздействием внешней среды. При этом наибольший интерес представляет ситуация, когда процесс изменения параметров среды также является полумарковским.

Список литературы

1. Дынкин, Е.Б. Марковские процессы / Е.Б. Дынкин. – М. : Физматгиз, 1963. – 593 с.

2. Баруча-Рид, А.Т. Элементы теории марковских процессов / А.Т. Баруча-Рид ; пер. с англ. – М. : Наука, 1969. – 332 с.

3. Erlang loss queueing system with batch arrivals operating in a random environment / Che Soong Kim [et al.] // Computers & Operations Research. – 2009. – № 36. – P. 674–697.

4. Казаков, В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи / В.А. Казаков. – М. : Сов. радио, 1973. – 232 с.

5. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М. : Наука, 1985. – 432 с.

6. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / пер. с англ. ; под ред. Дж. Холл. – М. : Мир, 1979. – 312 с.

Поступила 19.09.09

Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
Украина, Харьков, ул. Фрунзе, 21
e-mail: Seraya@kpi.kharkov.ua

O.V. Sira

EFFICIENCY ESTIMATION OF MARKOV SYSTEMS FUNCTIONING IN VARYING EXTERNAL ENVIRONMENT

The task of system analysis with the parameters varying under external environment is formulated. The special case, when Markov system parameters vary under changeable operating conditions is considered in details.