ИНФОРМАТИКА

2010 **апрель-июнь** **№ 2**

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.24

И.И. Комаров[1], Х.Л. Чэнь[1, 2]

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХИЛЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ ХВОСТОВОГО ИНДЕКСА УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Проводится компьютерное исследование. Его цель заключается в том, чтобы определить, в каком случае при оценке хвостового индекса α-устойчивой случайной величины оценка Хилла имеет удовлетворительные свойства.

Введение

Важнейшей особенностью современной теории вероятностей является то, что ее методы и результаты находят разнообразные приложения в различных научных дисциплинах, таких, как химия, биология, финансовая математика, экономика и др. Так, например, анализ взаимосвязи экономических данных, представленных в виде временных рядов, является необходимой составной частью современных исследований.

В ряде задач экономики и ее приложениях, где необходимо оценивать лишь хвост распределения, основное внимание направлено на оценивание хвостового индекса, который называют индексом устойчивости. С помощью него можно определить наличие в данных тяжелых хвостов, а также количество конечных моментов.

1. Основные определения

Понятие устойчивой случайной величины ввел Леви, исследуя последовательности нормированных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин. Наиболее простым и удобным способом определения устойчивой случайной величины является задание ее характеристической функции. Известно, что характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ α-устойчивой случайной величины ξ допускает представление

$$\ln \phi_\xi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta sign(t) tg\dfrac{\alpha\pi}{2}) + i\mu t, \alpha \neq 1; \\ -\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 + i\beta sign(t)\ln|t|) + i\mu t, \alpha = 1, \end{cases}$$

где $\alpha \in (0;2]$, $\beta \in [-1;1]$, $\sigma > 0$, $\mu \in R$.

Если случайная величина ξ является устойчивой, этот факт обозначают $\xi \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$. Параметр μ показывает, насколько сдвинуто распределение влево или вправо. Параметр σ определяет сжатие или растяжение распределения около μ. Параметр β означает перекос распределения. Если β отрицательное, распределение скошено влево, если положительное – вправо. Параметр α – хвостовой индекс, или индекс устойчивости.

В ряде задач экономики и ее приложениях основное внимание направлено на оценивание хвостового индекса.

Определение. *Параметр* $\gamma = 1/\alpha$, *где* α *– хвостовой индекс, называется индексом экстремального значения (extreme value index, EVI) и определяет форму хвоста распределения случайной величины* ξ [1].

Известны многочисленные оценки параметра EVI γ, например оценка отношения Goldie [2], UH-оценка Berlinet [3], момент-оценки Dekkers, Einmalh, de Haan [4], оценка Хилла (Hill) [5].

Исследуем поведение оценки Хилла для смоделированных устойчивых случайных величин при различных значениях α, $0<\alpha<2$.

2. Метод Хилла

Предположим, имеется ряд наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за некоторым процессом $\{X_n\}$, $n \in N$. Рассмотрим порядковые статистики

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)}.$$

Оценка Хилла определяется как

$$H_{k,n} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(\ln X_{(n-i+1)} - \ln X_{(n-k)}), \tag{1}$$

где k – сглаживающий параметр [6], $k \in [2; n/2]$, и является состоятельной [7].

Если $\{X_n\}$, $n \in N$, – независимые одинаково распределенные величины, то оценка Хилла $H_{k,n}$ состоятельна для параметра $\gamma = \alpha^{-1}$ в следующем смысле: существует последовательность k,

$$k \to \infty,\ \ k/n \to 0 \ \text{ при } n \to \infty,$$

такая, что

$$H_{k,n} \xrightarrow{p} \gamma\ .$$

На практике точность оценки сильно зависит от выбора k. Один из способов определения k состоит в построении графика $\{H_{k,n}(k): k = 2, ..., \left[\frac{n}{2}\right]\}$, где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Оценка k выбирается из интервала значений $[k_-, k_+]$, на котором функция $\{H_{k,n}(k)\}$ демонстрирует постоянство; k_-, k_+ – соответственно начало и конец данного интервала, на котором функция $\{H_{k,n}(k)\}$ демонстрирует постоянство.

В качестве оценки для γ рассмотрим статистику

$$\overline{H}_n = \frac{1}{k_+ - k_- + 1}\sum_{i=k_-}^{k_+} H_{i,n}\ , \tag{2}$$

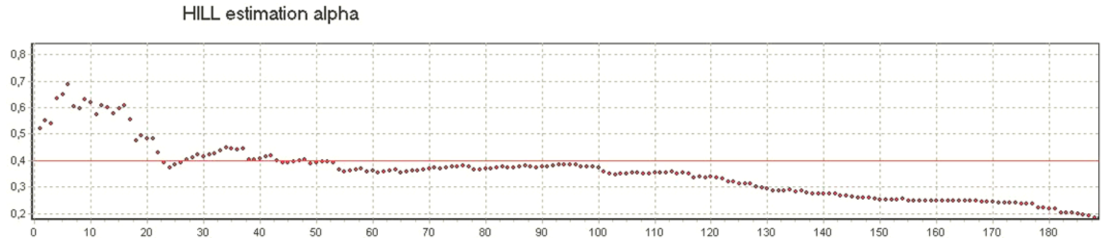
которая несмещенным образом оценивает γ [8], т. е. $E(\overline{H}_n) = \gamma$.

3. Результаты моделирования

Проиллюстрируем описанный метод на смоделированной устойчивой случайной величине. Для оценки хвостового индекса построим график вида

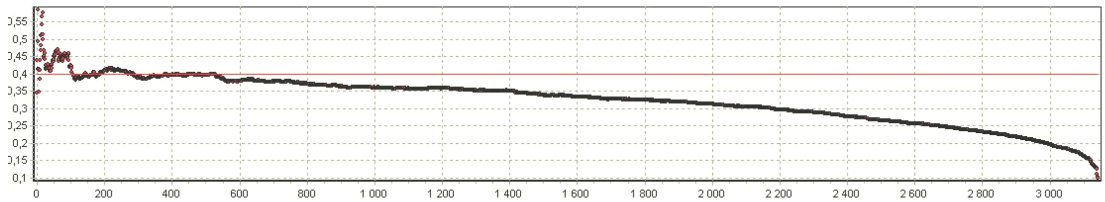
$$\{\hat{\alpha}(k): k = 2, ..., \frac{n}{2}\}.$$

Случаи с различными n и α показаны на рисунке.



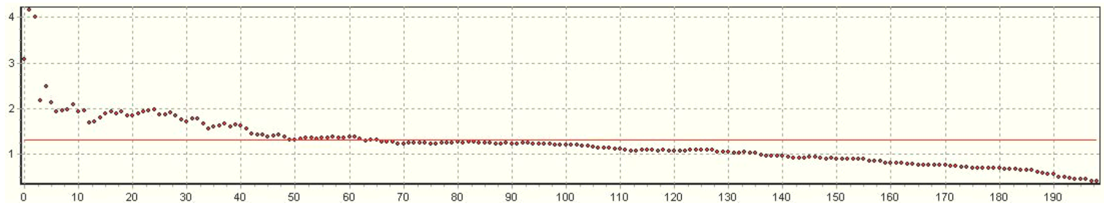
$k_{-} = 23$, $k_{+} = 100$, $\overline{H}_n = 0{,}407$

а)



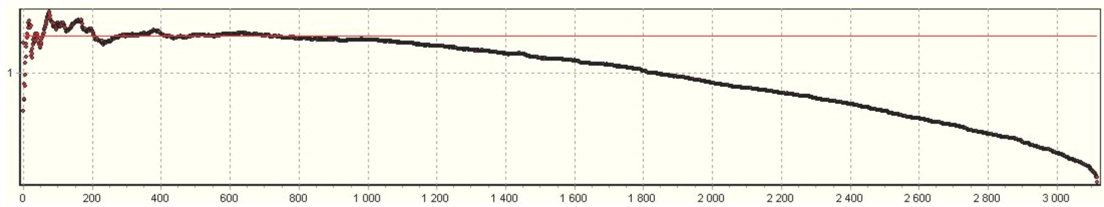
$k_{-} = 150$, $k_{+} = 550$, $\overline{H}_n = 0{,}4093$

б)



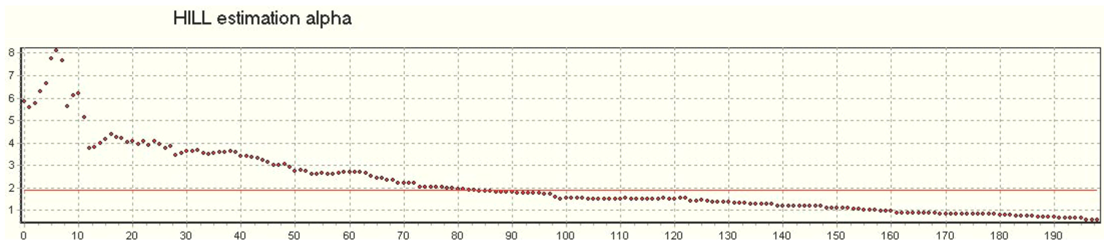
$k_{-} = 45$, $k_{+} = 100$, $\overline{H}_n = 1{,}303$

в)

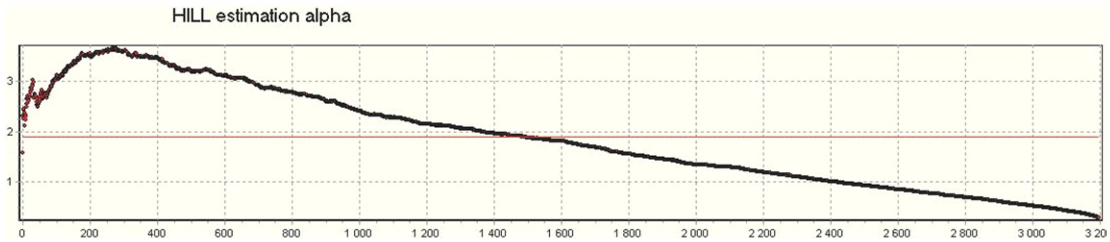


$k_{-} = 280$, $k_{+} = 920$, $\overline{H}_n = 1{,}313$

г)



д)



е)

Поведение оценки Хилла для различных случаев: *а)* $\xi \sim S_{0,4}(0, 1, 0)$ при $n = 400$; *б)* $\xi \sim S_{0,4}(0, 1, 0)$ при $n = 6400$; *в)* $\xi \sim S_{1,3}(0, 1, 0)$ при $n = 400$; *г)* $\xi \sim S_{1,3}(0, 1, 0)$ при $n = 6400$; *д)* $\xi \sim S_{1,9}(0, 1, 0)$ при $n = 400$; *е)* $\xi \sim S_{1,9}(0, 1, 0)$ при $n = 6400$

Заключение

Проанализировав графики, можно сделать следующие выводы:

1. При $0 < \alpha < 1{,}5$ наблюдается достаточно широкий интервал $[k_-, k_+]$, в котором оценка хвостового индекса демонстрирует постоянство; средняя оценка хвостового индекса $\hat{\alpha} = \overline{H}_n^{-1}$ достаточна близка к истинному значению; при увеличении n отношение длины интервала, в котором оценка хвостового индекса демонстрирует постоянство, к длине интервала $[2, n/2]$ стремится к нулю.

2. При $1{,}5 < \alpha < 2$ интервал $[k_-, k_+]$, в котором оценка хвостового индекса демонстрирует постоянство, не так явно выражен и достаточно узок; интервалов вида $[k_-, k_+]$ можно выделить несколько и поэтому оценивать истинное значение хвостового индекса α достаточно затруднительно.

Таким образом, при оценке индекса устойчивости α-устойчивой случайной величины метод Хилла целесообразнее применять в случае, когда значение индекса устойчивости находится в интервале от 0 до 1,5.

Список литературы

1. Ширяев, А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – М. : Наука, 1980. – 576 с.

2. Goldie, C.M. Slow variation with reainder: theory and applications / C.M. Goldie, R.L. Smith // Quart. J. Math. Oxford. – 1987. – № 38. – P. 45–71.

3. Berlinet, A. About tne asymptotic accuracy of Barron density estemates / A. Berlinet, I. Vajda, E.C. van der Maulen // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1998. – № 44. – P. 999–1009.

4. Dekkers, A.L.M. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution / A.L.M. Dekkers, J.H.J. Einmahl, L. de Haan // Annals of Statistics. – 1989. – № 17. – P. 1833–1855.

5. Hill, B.M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution / B.M. Hill // The Annals of Statistics. – 1975. – Vol. 5, № 3. – P. 1011–1029.

6. Маркович, Н.М. Методы оценивания характеристик тяжелохвостовых случайных величин по конечным выборкам : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук : 05.13.01 / Н.М. Маркович ; Рос. экон. акад. – М., 2004. – 206 с.

7. Ле Хонг Шон. Параметрические модели устойчивых случайных процессов : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.05 / Ле Хонг Шон. – Минск, 2009. – 20 с.

8. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики. В 2 т. / А.Н. Ширяев. – М. : ФАЗИС, 1998. – Т. 2. – 1018 с.

Поступила 18.12.09

[1]*Белорусский государственный университет,*
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: tery-80@mail.ru

[2]*Харбинский научно-технический университет,*
Харбин, Сюефулу, 52
e-mail: hrbustchl@mail.ru

I.I. Komarov, H.L. Chen

APPLICATION OF THE HILL METHOD FOR THE TAIL INDEX ESTIMATION OF STABLE RANDOM QUANTITIES

The paper deals with the use of Hill's method for the estimation of stability index by the example of modeled stable random quantities.