ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)
УДК 510.5

Поступила в редакцию 22.06.2018
Received 22.06.2018

В. Г. Найденко

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КЛАССА СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ, РАЗРЕШИМЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ АЛГОРИТМАМИ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ

Аннотация. Рассмотрена проблема описания класса вычислительной сложности BPP (от англ. bounded-error probablistic polynomial time) в терминах логического языка. BPP представляет собой класс вычислительных проблем в распознавательной постановке, которые эффективно решаются с помощью вероятностных машин Тьюринга за полиномиальное время. Класс BPP имеет важное прикладное значение, поскольку включает в себя самый широкий спектр практических проблем, которые могут быть быстро решены на современных компьютерах. В то же время до сих пор считалось, что BPP невозможно логически охарактеризовать ввиду семантических ограничений, наложенных на вероятностные машины Тьюринга, которые распознают языки в BPP. Используя новый метод характеристических множеств, в работе впервые получена логическая характеризация класса BPP в виде разрешимого фрагмента логики второго порядка.

Ключевые слова: теория моделей, вычислительная сложность, дескриптивная сложность, логическая характеризация, метод характеристических множеств

Для цитирования: Найденко, В. Г. Логическая характеризация класса сложности задач, разрешимых вероятностными алгоритмами за полиномиальное время / В. Г. Найденко // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 99–101.

V. G. Naidenko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

LOGICAL CHARACTERIZATION OF COMPLEXITY CLASS OF PROBLEMS SOLVABLE BY PROBABLISTIC ALGORITHMS IN POLYNOMIAL TIME

Abstract. A problem to describe the complexity class BPP in terms of a logical language is considered. BPP (abbreviation for bounded-error probablistic polynomial time) represents the class of computational decision problems that are efficiently solvable in polynomial time. The class BPP has an important practical significance since as it includes the largest spectrum of applied problems. At the same time till now, it was supposed that BPP cannot be characterized because of semantic constraints imposed on Turing machines recognizing languages in BPP. Using a new method of characteristical sets we are the first to provide a logical characterization of the class BPP as a decidable fragment of the second-order logic.

Keywords: model theory, computational complexity, descriptive complexity, logical characterization, method of characteristic sets

For citation: Naidenko V. G. Logical characterization of complexity class of problems solvable by probablistic algorithms in polynomial time. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 99–101 (in Russian).

Введение. Класс сложности BPP играет важную роль в теории вычислительной сложности, поскольку задачи из этого класса могут быть эффективно решены с помощью вероятностных алгоритмов.

Начиная с 1974 г. активно развивается теория дескриптивной сложности, в рамках которой вычислительная сложность характеризуется в терминах логических языков. R. Fagin первым показал, что класс сложности NP совпадет с множеством проблем, описываемых экзистенциональной логикой второго порядка [1]. L. Stockmeyer расширил этот результат на полиномиальную иерархию PH, охарактеризовав ее с помощью логики второго порядка [2]. Дальнейшие исследования выявили логические характеризации для многих классов сложности [3].

Между тем имеются классы сложности, например BPP, для которых до сих пор не было найдено никакой логической характеризации. Целью настоящей работы является установление логической характеризации для класса сложности BPP.

Основные результаты. Для удобства и без потери общности рассматриваются языки в алфавите $\{0,\ 1\}$. Напомним, что класс BPP можно определить как такое множество языков, что $L \in \text{BPP}$ тогда и только тогда, когда существует недетерминированная полиномиальная машина Тьюринга M, распознающая язык $L \subseteq \{0,\ 1\}^*$ таким образом, что для любого входа x длиной n выполняются два условия:

1) если x не принадлежит L, то существует не более 1/3 путей вычислений машины M, которые бы достигли допускающего состояния;

2) если x принадлежит L, то по меньшей мере 2/3 путей вычислений машины M достигают допускающего состояния.

Для построения логической характеризации класса BPP воспользуемся методом характеристических множеств [3], с помощью которого впервые были получены логические характеризации полных проблем в классах сложности NL, P, coNP, NP и PSPACE, а также логика для $\text{NP} \cap \text{coNP}$.

Пусть $L_1,\ L_2,\ \ldots$ – перечисление всех языков в полиномиальной иерархии, а $M_1,\ M_2,\ \ldots$ – перечисление всех недетерминированных полиномиальных машин Тьюринга. Тогда каждой паре (L_i, M_j) можно сопоставить характеристическое множество $\chi(L_i, M_j)$, определяемое следующим образом: слово $x \in \{0,\ 1\}^*$ длиной n принадлежит $\chi(L_i, M_j)$ в том и только в том случае, если любое слово $y \in \{0,\ 1\}^*$ длиной не больше $\log_2\log_2 n$ принадлежит L_i тогда и только тогда, когда на входе y по меньшей мере 2/3 путей вычислений машины M_j достигают допускающего состояния.

Из определения характеристического множества следует, что либо $\chi(L_i, M_j) = \{0,\ 1\}^*$, либо $\chi(L_i, M_j)$ – конечное множество, состоящее из всех слов, длина которых не превышает некоторого числа n_0. Действительно, если для какого-то слова x длиной $n_0 + 1$ найдется слово y, не принадлежащее L_i, то это же слово y не позволит включить в $\chi(L_i, M_j)$ и все более длинные слова из $\{0,\ 1\}^*$.

Покажем, что $\{\chi(L_i, M_j) \cap L_i \mid i, j = 1,\ 2,\ \ldots\}$ – перечисление всех языков в классе BPP. Пусть L_i – произвольный язык из BPP (отметим, что полиномиальная иерархия включает в себя весь класс BPP). Тогда найдется полиномиальная машина Тьюринга M_j, распознающая L_i в упомянутом выше смысле. В этом случае характеристическое множество $\chi(L_i, M_j)$ совпадает с множеством $\{0,\ 1\}^*$, т. е. $\chi(L_i, M_j) \cap L_i = L_i$ и $\chi(L_i, M_j) \cap L_i$ принадлежит классу BPP. Теперь допустим, что L_i не принадлежит классу BPP. Тогда для любой полиномиальной машины Тьюринга M_j характеристическое множество $\chi(L_i, M_j)$ будет конечным. Следовательно, язык $\chi(L_i, M_j) \cap L_i$ тоже будет конечным. Так как класс BPP включает в себя все конечные языки, то и в этом случае $\chi(L_i, M_j) \cap L_i$ будет принадлежать BPP.

Отметим, что для каждого языка $\chi(L_i, M_j)$ можно найти полиномиальный алгоритм его распознавания. Следовательно, для $\chi(L_i, M_j)$ можно построить формулу логики второго порядка (см. метод построения такой формулы в [4, с. 117, следствие 7.10]). Пусть $\Phi(L)$ обозначает формулу логики второго порядка, описывающую язык L. Тогда множество формул $\{\Phi(\chi(L_i, M_j)) \wedge \Phi(L_i) \mid i, j = 1, 2,\ \ldots\}$ представляет собой фрагмент логики второго порядка, описывающий все языки в BPP .

Заключение. В работе впервые представлена логическая характеризация класса сложности BPP, которая дает возможность по-новому исследовать данный класс задач. Полученный результат имеет важное практическое значение. Например, если какую-либо прикладную задачу можно сформулировать в рамках описанной выше логики, то для нее обязательно найдется эффективный метод решения.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция–2020».

Список использованных источников

1. Fagin, R. Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets / R. Fagin // Complexity of Computation, SIAM-AMS Proceedings. – 1974. – Vol. 7. – P. 27–41.
2. Stockmeyer, L. The polynomial-time hierarchy / L. Stockmeyer // Theoretical Computer Science. – 1977. – Vol. 3. – P. 1–22.
3. Naidenko, V. Logics for complexity classes / V. Naidenko // Logic Journal of the IGPL. – 2014. – Vol. 22, no. 6. – P. 1075–1093.
4. Immerman, N. Descriptive Complexity / N. Immerman. – Springer, 1998. – 250 p.

References

1. Fagin R. Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets. *Complexity of Computation, SIAM-AMS Proceedings*, 1974, vol. 7, pp. 27–41.
2. Stockmeyer L. The polynomial-time hierarchy. *Theoretical Computer Science*, 1977, vol. 3, pp. 1–22.
3. Naidenko V. Logics for complexity classes. *Logic Journal of the IGPL*, 2014, vol. 22, no 6, pp. 1075–1093.
4. Immerman N. *Descriptive Complexity*. Springer, 1998, 250 p.

Информация об авторе

Найденко Владимир Григорьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела комбинаторных моделей и алгоритмов, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir G. Naidenko – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher of the Department of Combinatorial Models and Algorithms, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganova Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naidenko@im.bas-net.by