

УДК 519.872

А.Н. Дудин, Б. Сунь

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАР/РН/Н С НЕНАДЕЖНЫМИ ПРИБОРАМИ И РАЗЛИЧНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассматривается многоканальная система массового обслуживания с бесконечным буфером. Обслуживание может происходить с ошибками, прибор может выходить из строя, что ведет к потере обслуживаемого запроса и необходимости ремонта этого прибора. Поступление запросов и поломок приборов описывается марковским входным потоком (МАР). Время обслуживания запросов и ремонта приборов имеет распределение фазового типа (РН). Находятся стационарное распределение числа запросов и характеристики производительности системы в системе. Приводятся результаты численных экспериментов.

Введение

При анализе многолинейных систем массового обслуживания стандартным является предположение о том, что каждый запрос обслуживается ровно одним прибором. Относительно недавно начато исследование систем, в которых для обслуживания запроса может понадобиться случайное число приборов, и систем, в которых предполагалось, что запросы являются неоднородными и тип запроса определяет число приборов, необходимых для обслуживания запроса [1]. Мотивацией этих работ явилось наличие так называемого неэластичного трафика в телекоммуникационных сетях [2, 3].

Отметим наличие дисциплин, при которых все запросы, находящиеся в системе, получают обслуживание одновременно со скоростью, обратно пропорциональной числу запросов, находящихся в системе. Эти дисциплины с равномерным или неравномерным разделением процессора получили широкое распространение для однолинейных систем массового обслуживания [4]. Техническая реализация таких дисциплин в случае многолинейных систем массового обслуживания вызывает вопросы.

Недавно в рассмотрение введены модели, в которых поступивший запрос обслуживается всеми приборами, свободными в момент его поступления [5–7]. Такую дисциплину будем называть ВС (Broadcasting with Copying). Отметим одно из важных ее достоинств. Если приборы рассматриваемой системы не являются абсолютно надежными и обслуживание запроса может осуществляться с ошибками, параллельное обслуживание запроса всеми доступными приборами, очевидно, ведет к увеличению вероятности того, что запрос будет обслужен без ошибки (считается, что запрос обслужен без ошибки, если без ошибки обслужена хотя бы одна его копия). Этот факт был показан численно в работах авторов [8, 9]. Анализ ненадежной многолинейной системы с дисциплиной ВС был проведен в них в предположении, что приборы не выходят из строя. Просто с определенной вероятностью запрос будет обслужен с ошибкой. Такая ситуация достаточно широко встречается при анализе реальных телекоммуникационных систем. В настоящей работе рассматривается случай, когда прибор может выходить из строя, что ведет к потере обслуживаемого запроса и необходимости ремонта этого прибора. Анализ проведен при почти максимально общих предположениях о характере потоков запросов и поломок, процессов обслуживания и ремонта, для которых возможно аналитическое исследование системы.

1. Математическая модель

Имеется система обслуживания типа МАР/РН/Н. Эта система имеет N идентичных обслуживающих приборов и буфер бесконечной емкости. На вход системы поступает МАР (Markov Arrival Process)-поток запросов. Поступление запросов в этом потоке возможно только в моменты скачков некоторой неприводимой цепи Маркова v_t , $t \geq 0$, с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$, которая называется управляющим процес-

сом МАР-потока. Интенсивности переходов процесса $v_t, t \geq 0$, сопровождающиеся поступлением запросов (не сопровождающиеся поступлением запросов), задаются элементами матриц D_1 (недиагональными элементами матрицы D_0) или производящей функцией $D(z) = D_0 + D_1 z$, $|z| \leq 1$. При этом матрица $D(1)$ является неприводимым генератором цепи $v_t, t \geq 0$. Вектор-строка q стационарного распределения этого процесса является решением системы уравнений $qD(1) = 0, qe = 1$, где e – вектор-столбец, состоящий из единиц. Средняя интенсивность λ поступления заявок в МАР-потоке имеет вид $\lambda = qD_1 e$. Более подробное описание МАР-потока, его свойств и частных случаев, а также информацию о его полезности (в силу возможной коррелированности и взрывного характера) при моделировании телекоммуникационных сетей можно найти, например, в [10, 11].

Предполагаем, что время обслуживания запроса прибором имеет распределение фазового типа с неприводимым представлением (b, S) , где b – стохастический вектор-строка размера M , а матрица S – субгенератор размера M , который имеет отрицательные диагональные элементы $S_{m,m}$ и неотрицательные недиагональные элементы $S_{m,m'}, m' \neq m, m = \overline{1, M}$. При этом предполагается, что $\sum_{m'=1}^M S_{m,m'} \leq 0$ для любого m и как минимум для одного из m данная сумма строго меньше нуля. Случайная величина, имеющая распределение фазового типа, определяется следующим образом. Пусть имеется цепь Маркова с непрерывным временем $\eta_t, t \geq 0$. Эта цепь Маркова имеет пространство состояний $\{1, \dots, M, M+1\}$, причем состояние $M+1$ является единственным поглощающим состоянием. Распределение вероятностей процесса $\eta_t, t \geq 0$, в начальный момент времени $t = 0$ задается вектором b . Время пребывания процесса $\eta_t, t \geq 0$, в состоянии m имеет показательное распределение с параметром $(-S)_{m,m}$. Затем с интенсивностью $S_{m,m'}$ процесс переходит в состояние $m', m' \in \{1, \dots, M\}, m' \neq m$. При этом величина $-\sum_{m'=1, m' \neq m}^M S_{m,m'}$ является интенсивностью перехода процесса η_t из состояния m в поглощающее состояние $M+1$. В момент попадания процесса $\eta_t, t \geq 0$, в поглощающее состояние истекает длительность случайной величины ξ , имеющей распределение фазового типа. Обозначим $S_0 = -Se$. Вектор S_0 неотрицателен и имеет как минимум одну положительную компоненту, $(S_0)_m$ – m -я компонента вектора S_0 , которая задает интенсивность перехода в поглощающее состояние из состояния $m, m \in \{1, \dots, M\}$.

В систему поступает МАР-поток поломок приборов. Этот поток задается по аналогии с МАР-потоком запросов. Он управляется процессом $\mu_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\overline{0, K}$ и задается матрицами H_0 и H_1 . Поступившая поломка с равной вероятностью выбирает любой прибор, занятый обслуживанием запроса, и выводит его из строя. Запрос, обслуживаемый на этом приборе, покидает систему без обслуживания (теряется). Если все приборы в момент поступления поломки либо свободны, либо находятся на ремонте, поломка просто игнорируется. Предполагаем, что сломанный прибор немедленно начинает ремонтироваться. Время ремонта имеет распределение фазового типа, заданное цепью Маркова с непрерывным временем $n_t, t \geq 0$, с пространством состояний $\overline{1, L}$, и определяется неприводимым представлением (g, Γ) . После завершения ремонта прибор готов к обслуживанию запросов.

Если поступивший в систему запрос застает все приборы занятыми, он становится в очередь, из которой будет позднее выбран в соответствии с правилом «первым пришел – первым обслужен». Если запрос застал свободным один прибор, он немедленно начинает обслуживаться. Если же он застал сразу несколько свободных приборов, запрос копируется и копии этого запроса начинают обслуживаться на всех приборах. Каждая из них обслуживается и рассматривается как самостоятельный запрос.

Исследуем поведение этой системы.

2. Распределение числа запросов в системе

Введем следующие обозначения:

$i_t, i_t \geq 0$, – число запросов в системе;

$r_t, r_t = \overline{0, N}$, – число ремонтируемых приборов;

$v_t, v_t = \overline{0, W}$, – состояние управляющего процесса МАР-потока поступления запросов;

$\mu_t, \mu_t = \overline{0, K}$, – состояние управляющего процесса МАР-потока поступления поломок;

$m_t^{(j)}, m_t^{(j)} = \overline{1, M}$, – состояние процесса, управляющего обслуживанием в j -м приборе,

$0 \leq j \leq \min\{i_t, N - r_t\}$;

$n_t^{(l)}, n_t^{(l)} = \overline{1, L}$, – состояние процесса, управляющего ремонтом l -го прибора, $0 \leq l \leq r_t$, в момент времени t , $t \geq 0$.

Отметим, что работающие и ремонтируемые приборы нумеруются в следующем порядке. В начале обслуживания или ремонта прибор получает номер, на единицу больший, чем прибор, который начал обслуживание или ремонт перед ним. По завершении обслуживания или ремонта соответствующий прибор теряет номер, а все остальные приборы соответственно перенумеровываются. Если после завершения ремонта очередь пуста, прибор простаивает в ожидании прихода запроса. В противном случае он немедленно начинает обслуживание первого запроса из очереди.

Нетрудно видеть, что многомерный процесс

$$\xi_t = \{i_t, r_t, v_t, \mu_t, \{m_t^{(j)}\}, 0 \leq j \leq \min\{i_t, N - r_t\}, \{n_t^{(l)}\}, 0 \leq l \leq r_t\}, t \geq 0,$$

является цепью Маркова с непрерывным временем, описывающей функционирование рассматриваемой ненадежной системы МАР/РН/Н с широкополосным обслуживанием.

Обозначим его стационарные вероятности как

$$\begin{aligned} p(i, r, v, \mu, \{m^{(j)}\}, j = \overline{0, \min\{i, N - r\}}, \{n^{(l)}\}, l = \overline{0, r}) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} P(i_t = i, r_t = r, v_t = v, \mu_t = \mu, \{m_t^{(j)} = m^{(j)}\}, j = \overline{0, \min\{i, N - r\}}, \{n_t^{(l)} = n^{(l)}\}, l = \overline{0, r}). \end{aligned}$$

Перенумеруем состояния цепи Маркова ξ_t в лексикографическом порядке и сформируем вектор-строки p_i из стационарных вероятностей $p(i, r, v, \mu, \{m^{(j)}\}, j = \overline{0, \min\{i, N - r\}}, \{n^{(l)}\}, l = \overline{0, r})$ состояний цепи, имеющих значение i первой компоненты, $i \geq 0$. Размерность этих векторов $F_i = \overline{W} \overline{K} \sum_{r=0}^N M^{\min\{i, N-r\}} L^r$ для $i = \overline{0, N}$ и $F = \overline{W} \overline{K} \sum_{r=0}^N M^{(N-r)} L^r$ для $i > N$. Здесь $\overline{W} = W + 1$, $\overline{K} = K + 1$.

Далее будем использовать следующие обозначения:

I – тождественная матрица. Если ее размерность неясна из контекста, она указывается как нижний индекс;

O – нулевая квадратная матрица, $O_{a,b}$ – нулевая матрица размерности $a \times b$;

\otimes и \oplus – символы произведения Кронекера и суммы матриц;

$$\beta^{\otimes l} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\beta \otimes \dots \otimes \beta}_l, S^{\oplus l} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{S \oplus \dots \oplus S}_l, l \geq 1, S_0^{\oplus l} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{l-1} I_{M^N} \otimes S_0 \otimes I_{M^{l-m-1}}, l \geq 0.$$

Лемма 1. Инфинитезимальный генератор цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & K_{0,1} & K_{0,2} & \cdots & K_{0,N-1} & K_{0,N} & O & O & \cdots \\ M_1 & A_1 & K_{1,2} & \cdots & K_{1,N-1} & K_{1,N} & O & O & \cdots \\ O & M_2 & A_2 & \cdots & K_{2,N-1} & K_{2,N} & O & O & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{N-1} & K_{N-1,N} & O & O & \cdots \\ O & O & O & \cdots & M_N & A_N & K_N & O & \cdots \\ O & O & O & \cdots & O & M_{N+1} & A_N & K_N & \cdots \\ O & O & O & \cdots & O & O & M_{N+1} & A_N & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где блоки M_i задают интенсивности перехода цепи Маркова из состояний, имеющих значение i первой компоненты, в состояния, имеющие значение этой компоненты $i-1$, $i = \overline{0, N+1}$; недиагональные элементы блоков A_i задают интенсивности перехода цепи Маркова без изменения значения i первой компоненты, а диагональные – интенсивности выхода из соответствующих состояний (взяты с обратным знаком), $i > 0$; блоки $K_{i,j}$ задают интенсивности перехода цепи Маркова из состояний, имеющих значение i первой компоненты, в состояния, имеющие значение этой компоненты j , $j = \overline{i+1, N}$, $i = \overline{0, N-1}$; блок K_N задает интенсивности перехода цепи Маркова из состояний, имеющих значение i первой компоненты, в состояния, имеющие значение $i+1$ этой компоненты, $i \geq N$.

Данные блоки, в свою очередь, являются блочными матрицами, определенными следующим образом.

Матрица M_i имеет нулевые блоки $(M_i)_{r,r'}$, $r = \overline{0, N}$, за исключением блоков на блочной диагонали и блочной наддиагонали, которые задаются выражением

$$(M_i)_{r,r'} = \begin{cases} I_{\bar{w}} \otimes I_{\bar{k}} \otimes S_0^{\oplus \min\{i, N-r\}} \otimes \mathbf{b}(i, r) \otimes I_{L'}, & r' = r, \quad r = \overline{0, N-1}; \\ I_{\bar{w}} \otimes H_1 \otimes \frac{1}{\min\{i, N-r\}} \mathbf{e}_M^{\oplus \min\{i, N-r\}} \otimes I_{L'} \otimes \mathbf{g}, & r' = r+1, \quad r = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

где $\mathbf{b}(i, r)$ равно вектору \mathbf{b} , если $i > N-r$, и скаляру 1 в противном случае.

Матрица A_i имеет ненулевые блоки $(A_i)_{r,r'}$, $r = \overline{0, N}$, только по блочной диагонали и блочной поддиагонали. Эти блоки имеют вид

$$(A_0)_{r,r'} = \begin{cases} D_0 \oplus (H_0 + H_1) \oplus \Gamma^{\oplus r}, & r' = r, \quad r = \overline{0, N}; \\ I_{\bar{w}} \otimes I_{\bar{k}} \otimes \mathbf{G}_0^{\oplus r}, & r' = r-1, \quad r = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$(A_i)_{r,r'} = \begin{cases} D_0 \oplus H_0 \oplus S^{\oplus \min\{i, N-r\}} \oplus \Gamma^{\oplus r}, & r' = r, \quad r = \overline{0, N-1}; \\ D_0 \oplus (H_0 + H_1) \oplus \Gamma^{\oplus N}, & r' = r = N; \\ I_{\bar{w}} \otimes I_{\bar{k}} \otimes I_{M^{\min\{i, N-r\}}} \otimes \mathbf{b}(i, r) \otimes \mathbf{G}_0^{\oplus r}, & r' = r-1, \quad r = \overline{1, N}, \end{cases}$$

где $\mathbf{G}_0 = -\Gamma \mathbf{e}$.

Матрица $K_{i,j}$, $j = \overline{i+2, N}$, $i = \overline{0, N-1}$, имеет только один ненулевой блок

$$(K_{i,j})_{N-j, N-j} = D_1 \otimes I_{\bar{K}} \otimes I_{M^i} \otimes \mathbf{b}^{\otimes(j-i)} \otimes I_{L^{N-j}}.$$

Матрица $K_{i,j}$, $j = i+1$, $i = \overline{0, N-1}$, имеет ненулевые блоки

$$(K_{i,j})_{r,r} = D_1 \otimes I_{\bar{K}} \otimes I_{M^{\min(i, N-r)}} \otimes \mathbf{a}(j, r) \otimes I_{L^r}, \quad r = \overline{N-j, N},$$

где $\mathbf{a}(j, r)$ равно вектору \mathbf{b} , если $j = N-r$, или скаляру 1, если $j > N-r$.

Матрица K_N задается ненулевыми диагональными блоками

$$(K_N)_{r,r} = D_1 \otimes I_{\bar{K}} \otimes I_{M^{N-r}} \otimes I_{L^r}, \quad r = \overline{0, N}.$$

Доказательство леммы проводится путем анализа возможных переходов цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, за бесконечно малый интервал времени.

Анализ вида (1) генератора Q позволяет сделать заключение, что цепь Маркова ξ_t , $t \geq 0$, является квазипроцессом гибели и размножения со сложными граничными условиями. Поэтому для анализа условия эргодичности этой цепи можно использовать результаты М. Ньюта [12]. Согласно [12] стационарное (эргодическое) распределение вероятностей числа запросов в рассматриваемой системе существует, если выполняется неравенство

$$\mathbf{y}M_{N+1}\mathbf{e} > \mathbf{y}K_N\mathbf{e}, \quad (2)$$

где вектор \mathbf{y} является решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{y}(M_{N+1} + A_N + K_N) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}\mathbf{e} = 1. \quad (3)$$

Условие (2), (3) легко проверяется на компьютере. Кроме того, очевидно, что условие эргодичности в рассматриваемой системе совпадает с условием эргодичности для ненадежной системы МАР/РН/Н с классической дисциплиной обслуживания, которое, в свою очередь, совпадает с условием для аналогичной системы с повторными вызовами, приведенным в [13]. Далее считаем, что параметры системы выбраны так, что стационарное распределение вероятностей состояний рассматриваемой системы существует.

Теорема 1. Векторы \mathbf{p}_i , $i \geq 0$, вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{N+1}\mathbf{B}_i, \quad i = \overline{0, N}; \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{N+1}\mathbf{R}^{i-N-1}, \quad i \geq N+1, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{B}_i = \Phi_N \times \dots \times \Phi_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad (6)$$

матрицы Φ_i вычисляются рекуррентно:

$$\Phi_0 = -M_1A_0^{-1}, \quad \Phi_i = -M_{i+1}\left(A_i + \sum_{l=0}^{i-1} K_{l,i} \prod_{j=l}^{i-1} \Phi_j\right)^{-1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (7)$$

матрица \mathbf{R} является минимальным неотрицательным решением уравнения

$$\mathbf{R}^2 \mathbf{M}_{N+1} + \mathbf{R} \mathbf{A}_N + \mathbf{K}_N = \mathbf{O}, \quad (8)$$

а вектор \mathbf{p}_{N+1} является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{p}_{N+1} [\mathbf{A}_N + \mathbf{R} \mathbf{M}_{N+1} + \Phi_N \mathbf{K}_N] = \mathbf{0}; \quad (9)$$

$$\mathbf{p}_{N+1} \left[(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{e} + \sum_{i=0}^N \mathbf{B}_i \mathbf{e} \right] = 1. \quad (10)$$

Отметим, что все обратные матрицы в приведенных формулах существуют, поскольку соответствующие матрицы являются субгенераторами.

Доказательство. Известно, что векторы \mathbf{p}_i , $i \geq 0$, удовлетворяют уравнениям Чепмена – Колмогорова:

$$(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots) \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Для вывода соотношений (4)–(10) будем шаг за шагом решать систему (11) с генератором \mathbf{Q} вида (1).

Первый блочный столбец генератора \mathbf{Q} содержит только два ненулевых элемента и первое уравнение системы (11) имеет вид

$$\mathbf{p}_0 \mathbf{A}_0 + \mathbf{p}_1 \mathbf{M}_1 = \mathbf{0}.$$

Блочные столбцы генератора \mathbf{Q} со второго по $(j+1)$ -й содержат по $j+2$ ненулевых элемента. Поэтому следующая группа уравнений системы (11) имеет вид

$$\sum_{i=0}^l \mathbf{p}_i \mathbf{K}_{i,l+1} + \mathbf{p}_{l+1} \mathbf{A}_{l+1} + \mathbf{p}_{l+2} \mathbf{M}_{l+2} = \mathbf{0}, \quad l = \overline{0, N-1}. \quad (12)$$

Поскольку матрица \mathbf{A}_i является субгенератором, обратная к ней матрица существует и из (12) получаем, что

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_{j+1} \Phi_j, \quad \Phi_j = -\mathbf{M}_{j+1} (\mathbf{A}_j + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{K}_{i,j} \prod_{m=i}^{j-1} \Phi_m)^{-1}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \Phi_0 = -\mathbf{M}_1 \mathbf{A}_0^{-1}.$$

Отсюда следует, что векторы \mathbf{p}_i , $i = \overline{0, N}$, могут быть представлены в форме

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{N+1} \mathbf{B}_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad (13)$$

где матрицы \mathbf{B}_i задаются формулой (6).

Далее i -й, $i \geq N+1$, блочный столбец генератора \mathbf{Q} порождает уравнения

$$\mathbf{p}_{i-1} \mathbf{K}_N + \mathbf{p}_i \mathbf{A}_N + \mathbf{p}_{i+1} \mathbf{M}_{N+1} = \mathbf{0}, \quad i \geq N+1. \quad (14)$$

Согласно [10] после прямой подстановки вероятностей в виде (5) в систему (14) видно, что система удовлетворяется при условии, если матрица \mathbf{R} удовлетворяет уравнению (8).

Уравнение (9) для ключевого вектора \mathbf{p}_{N+1} , в терминах которого оказались выражены все остальные векторы \mathbf{p}_i , получено с использованием $(N+1)$ -го блочного столбца генератора Q , учитывая выражение (5) для вектора \mathbf{p}_{N+2} .

Уравнение (10) для вектора \mathbf{p}_{N+1} следует из условия нормировки $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{p}_i \mathbf{e} = 1$ и формул (4), (5). Теорема доказана.

Доказанная теорема задает алгоритм для вычисления векторов \mathbf{p}_i , $i \geq 0$, хорошо приспособленный для реализации на компьютере.

Следствие 1. Среднее число запросов L в системе в произвольный момент времени вычисляется как

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbf{p}_i \mathbf{e} = \sum_{i=1}^N i \mathbf{p}_i \mathbf{e} + \mathbf{p}_{N+1} [(N+1)(I-R)^{-1} + R(I-R)^{-2}] \mathbf{e}.$$

Следствие 2. Среднее число неисправных приборов вычисляется как

$$R_b = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=1}^N r \mathbf{p}(i, r) \mathbf{e} = \sum_{i=0}^N \sum_{r=1}^N r \mathbf{p}(i, r) \mathbf{e} + \sum_{r=1}^N r [\mathbf{p}_{N+1} (I-R)^{-1}]_r \mathbf{e}.$$

Здесь $\mathbf{p}(i, r)$, $r = \overline{0, N}$, – составные части вектора $\mathbf{p}_i = (\mathbf{p}(i, 0), \dots, \mathbf{p}(i, N))$.

Следствие 3. Среднее число приборов, обслуживающих произвольный запрос, вычисляется как

$$\Psi = \sum_{m=1}^N m \sum_{i=0}^{N-m} \mathbf{p}(i, N-i-m) \frac{D_1 \mathbf{e}}{\lambda} \otimes \mathbf{e} + \sum_{i=0}^N \sum_{r=N-i}^N \mathbf{p}(i, r) \frac{D_1 \mathbf{e}}{\lambda} \otimes \mathbf{e} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{r=0}^N \mathbf{p}(i, r) \frac{D_1 \mathbf{e}}{\lambda} \otimes \mathbf{e}.$$

Среднее число запросов, поступающих на обслуживание (с учетом копий запросов), $\tilde{\lambda} = \lambda \Psi$.

Следствие 4. Вероятность того, что во время обслуживания произвольного запроса (включая копии запросов) произойдет поломка прибора, вычисляется как

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} \mathbf{p}(i, r) (I_{\bar{w}} \otimes H_1 \otimes I) \mathbf{e}}{\tilde{\lambda}}.$$

Следствие 5. Вероятность того, что произвольный запрос будет благополучно обслужен (поломки произойдут не во всех каналах, обслуживающих копии этого запроса), вычисляется как

$$P_{\text{successful}} = 1 - \sum_{m=1}^N \gamma^m \sum_{i=0}^{N-m} \mathbf{p}(i, N-i-m) \frac{D_1 \mathbf{e}}{\lambda} \otimes \mathbf{e} + \gamma \left(\sum_{i=0}^N \sum_{r=N-i}^N \mathbf{p}(i, r) \frac{D_1 \mathbf{e}}{\lambda} \otimes \mathbf{e} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{r=0}^N \mathbf{p}(i, r) \frac{D_1 \mathbf{e}}{\lambda} \otimes \mathbf{e} \right).$$

3. Система МАР/РН/Н с классической дисциплиной обслуживания

При анализе многолинейных систем массового обслуживания стандартным является предположение о том, что каждый запрос обслуживается ровно одним прибором. При такой дисциплине справедливы следующие результаты.

Лемма 2. Инфинитезимальный генератор цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & K_{0,1} & O & \dots & O & O & O & \dots \\ M_1 & A_1 & K_{1,2} & \dots & O & O & O & \dots \\ O & M_2 & A_2 & \dots & O & O & O & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & A_{N-1} & K_{N-1,N} & O & \dots \\ O & O & O & \dots & M_N & A_N & K_N & \dots \\ O & O & O & \dots & O & M_{N+1} & A_N & \dots \\ O & O & O & \dots & O & O & M_{N+1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где ненулевые блоки матрицы $K_{i,j}$, $j = i+1$, $i = \overline{0, N-1}$, заданы формулами

$$(K_{i,j})_{r,r} = D_1 \otimes I_{\bar{K}} \otimes I_{M^{\min\{i, N-r\}}} \otimes \mathbf{a}(j, r) \otimes I_{L^r}, \quad r = \overline{0, N}.$$

Другие обозначения такие же, как в генераторе (1) из разд. 2.

Доказательство леммы проводится путем анализа возможных переходов цепи Маркова ξ_t , $t \geq 0$, за бесконечно малый интервал времени.

Теорема 2. Векторы p_i , $i \geq 0$, вычисляются следующим образом:

$$p_i = p_{N+1} G_i, \quad i = \overline{0, N}; \quad (16)$$

$$p_i = p_{N+1} R^{i-N-1}, \quad i \geq N+1, \quad (17)$$

где

$$G_i = L_N \times L_{N-1} \times \dots \times L_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad (18)$$

матрицы L_i вычисляются рекуррентно:

$$L_0 = -M_1 A_0^{-1}, \quad L_i = -M_{i+1} (A_i + L_{i-1} K_{i-1,i})^{-1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (19)$$

матрица R является минимальным неотрицательным решением уравнения

$$R^2 M_{N+1} + R A_N + K_N = O, \quad (20)$$

а вектор p_{N+1} является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$p_{N+1} [A_N + R M_{N+1} + L_N K_N] = \mathbf{0}; \quad (21)$$

$$p_{N+1} \left[(I - R)^{-1} \mathbf{e} + \sum_{i=0}^N G_i \mathbf{e} \right] = 1. \quad (22)$$

Отметим, что все обратные матрицы в приведенных формулах существуют, поскольку соответствующие матрицы являются субгенераторами.

Доказательство этой теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 6. Среднее число запросов L в системе в произвольный момент времени вычисляется как

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i e = \sum_{i=1}^N i p_i e + p_{N+1} [(N+1)(I-R)^{-1} + R(I-R)^{-2}] e.$$

Следствие 7. Среднее число неисправных приборов вычисляется как

$$R_b = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=1}^N r p(i, r) e = \sum_{i=0}^N \sum_{r=1}^N r p(i, r) e + \sum_{r=1}^N r [p_{N+1} (I-R)^{-1}]_r e.$$

Следствие 8. Вероятность того, что во время обслуживания произвольного запроса произойдет поломка прибора, вычисляется как

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} p(i, r) (I_{\bar{w}} \otimes H_1 \otimes I) e}{\lambda}.$$

Следствие 9. Вероятность того, что произвольный запрос будет благополучно обслужен, вычисляется как

$$P_{\text{successful}} = 1 - \gamma.$$

4. Численные примеры

Приведем результат численного эксперимента, кратко иллюстрирующего достоинство дисциплины ВС и эффект корреляции в потоке запросов. Пусть число приборов $N = 5$, РН-процессы обслуживания и РН-процессы ремонта приборов задаются векторами $\mathbf{b} = (1, 0)$, $\mathbf{g} = (0,5; 0,5)$ и матрицами

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -3,6 & 3,6 \\ 0 & -3,6 \end{pmatrix}.$$

Средние интенсивности обслуживания и ремонта равны 1,5 и 2,4. Квадраты коэффициентов вариации равны 0,5 и 0,7778.

Рассмотрим два различных МАР-потока запросов, имеющих одну и ту же среднюю интенсивность $\lambda = 1$, но разные коэффициенты вариации длин интервалов между моментами поступления запросов и корреляции между длинами соседних интервалов.

МАР-поток, который будет обозначаться как МАР₁, задается матрицами

$$D_0 = \begin{pmatrix} -3 & 2,5 \\ 2,5 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

В этом потоке коэффициенты вариации и корреляции равны соответственно 1,0869 и 0,0052.

МАР-поток, который будет обозначаться как МАР₂, задается матрицами

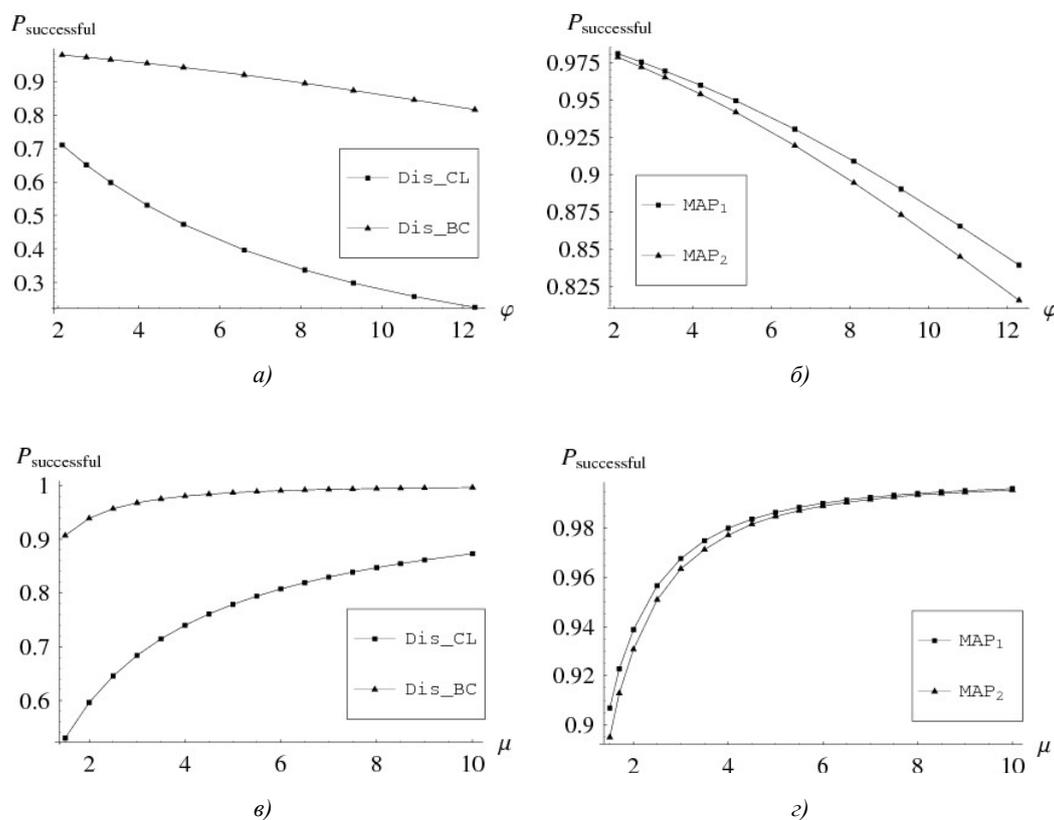
$$D_0 = \begin{pmatrix} -1,3526 & 0 \\ 0 & -0,04391 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1,3436 & 0,009 \\ 0,02446 & 0,01945 \end{pmatrix}.$$

В этом потоке коэффициенты вариации и корреляции равны соответственно 12,34 и 0,2.

Зададим матрицы интенсивностей МАР-потока поступления поломок:

$$H_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этом потоке коэффициенты вариации и корреляции равны соответственно 1,1 и 0,0181, средняя интенсивность потока $\varphi = 1,5$.



Зависимости вероятности $P_{\text{successful}}$ успешного обслуживания произвольного запроса от средней интенсивности: а) потока поступления поломок при различных дисциплинах; б) потока поступления поломок при различной корреляции в потоке запросов; в) обслуживания при различных дисциплинах; г) обслуживания при различной корреляции в потоке запросов

На рисунке изображены зависимости вероятности успешного обслуживания от интенсивности потока поломок и интенсивности обслуживания. Кривые Dis_CL и Dis_BC соответствуют классической дисциплине обслуживания и дисциплине BC. Кривые MAP₁ и MAP₂ соответствуют системам, в которые поступает поток MAP₁ или MAP₂. Анализ зависимостей позволяет сделать следующие выводы:

- вероятность успешного обслуживания убывает с ростом средней интенсивности потока поступления поломок;
- вероятность успешного обслуживания растет с ростом средней интенсивности обслуживания;
- ширококвотельная дисциплина обеспечивает более высокое значение вероятности успешного обслуживания по сравнению с классической дисциплиной.

Заключение

В данной работе была изучена ненадежная система MAP/PN/N с ширококвотельным обслуживанием, построена и исследована многомерная цепь Маркова, описывающая функционирование системы, найдены основные характеристики производительности систем. Результаты могут найти применение при проектировании сетей, в которых требуется обеспечить высокую вероятность доставки информации.

Список литературы

1. Green, L. Comparing operating characteristics of queues in which customers require a random number of servers / L. Green // *Management Science*. – 1981. – Vol. 27, № 1. – P. 65–74.
2. Меликов, А.З. Телетрафик: модели, методы, оптимизация / А.З. Меликов, А.Л. Пономаренко, В.В. Паладюк. – Киев : ИПК «Политехника», 2007. – 256 с.
3. Zhang, Y. Queueing analysis of OFDM subcarrier allocation in broadband wireless multi-service networks / Y. Zhang, Y. Xiao, H.H. Chen // *IEEE Transactions on Wireless Communications*. – 2008. – Vol. 7, № 10. – P. 3951–3961.
4. Яшков, С.В. Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора / С.В. Яшков. – М. : ВИНТИ, 1990. – Т. 29. – С. 3–82.
5. Multi-server queueing systems with cooperation of the servers / C.S. Kim [et al.] // *Annals of Operations Research*. – 2008. – Vol. 162, № 1. – P. 57–68.
6. Lee, M.H. The SM/M/N queueing system with broadcasting service / M.H. Lee, A.N. Dudin, V.I. Klimenok // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2006. – Vol. 2006, Article ID 98171. – 18 p.
7. Multi-server queueing model with broadcasting service / M.H. Lee [et al.] // *IEEE Communications Letters*. – 2007. – Vol. 11, № 6. – P. 546–548.
8. Dudin, A. Multi-server queueing model MAP/PH/N with broadcasting service in unreliable servers / A. Dudin, B. Sun // *Queues: flows, systems, networks. Proceedings of the International Conf. «Mathematical Methods for Analysis and Optimization of Information Telecommunication Networks»*. – Minsk, 2009. – P. 45–51.
9. Lee, M.H. Advantages of the broadcasting service discipline in multi-server queueing model MAP/PH/N / M.H. Lee, A.N. Dudin, Sun Bin // *Proceedings of the 11th International Workshop on Multimedia Signal Processing and Transmission*. – Jeonju, Korea, 2008. – P. 5–12.
10. Chakravarthy, S.R. The batch Markovian arrival process: a review and future work / S.R. Chakravarthy // *Advances in Probability Theory and Stochastic Process*. – New Jersey : Notable Publications, 2001. – P. 21–49.
11. Lucantoni, D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D.M. Lucantoni // *Communications in Statistics-Stochastic Models*. – 1991. – Vol. 7, № 1. – P. 1–46.
12. Neuts, M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models / M.F. Neuts. – Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1981. – 332 p.
13. Klimenok, V.I. The BMAP/PH/N retrial queue with Markovian flow of breakdowns / V.I. Klimenok, D.S. Orlovsky, C.S. Kim // *European Journal of Operational Research*. – 2008. – Vol. 189, № 3. – P. 1057–1072.

Поступила 16.12.09

*Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: dudin@bsu.by,
sunbin_bsu@hotmail.com*

A.H. Dudin, B. Sun

**INVESTIGATION OF MULTI-SERVER QUEUEING SYSTEM
OF THE MAP/PH/N TYPE WITH UNRELIABLE SERVERS
AND VARIOUS SERVICE DISCIPLINES**

Multi-server queuing model with the Markovian Arrival Process (MAP) and the phase (PH) type service time distribution is considered. The customer, which sees several free servers upon arrival, is served simultaneously by all these servers. Busy servers are subject to breakdowns and repairs. The common flow of breakdowns is the MAP. An event of this flow with equal probability causes a

failure of any busy server. When a server fails the repair period starts immediately. This period has PH type distribution and does not depend on the repair time of other broken-down servers and the service time of customers occupying the working servers. A customer whose service was interrupted leaves the system. Stationary distribution of a queue and the main performance measures are calculated. Illustrative numerical examples are presented.