ИНФОРМАТИКА

2010 апрель-июнь № 2

УДК 519.8

М.С. Баркетов

РЕЛАКСАЦИЯ ДИРЕКТИВНЫХ СРОКОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РАСПИСАНИЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ ОДНИМ ПРИБОРОМ

Рассматривается задача построения расписания обслуживания одним прибором требований нескольких типов при наличии директивных сроков. Минимизируется взвешенная сумма длин интервалов, на протяжении которых требования каждого типа находятся в системе. Предлагается метод релаксации директивных сроков. Разрабатывается алгоритм построения оптимального расписания, допустимого относительно релаксированных директивных сроков.

Введение

Рассмотрим следующую задачу теории расписаний. Требования, принадлежащие F типам, должны быть обслужены одним прибором. Есть n_f требований типа f. Требование j, $1 \le j \le n_f$, принадлежащее типу f, обозначается (j, f). Требованию (j, f) соответствует директивный срок $D_{j,f}$. Без ограничения общности предположим, что требования одного типа пронумерованы в порядке неубывания своих директивных сроков. Длительность обслуживания требования (j, f) равна $p_{j,f}$. Желательно, чтобы каждое требование (j, f) было обслужено до своего директивного срока $D_{j,f}$. Без ограничения общности предполагаем, что $D_{j+1,f} - D_{j,f} \ge p_{j+1,f}$, $1 \le j \le n_f - 1$. Общее количество требований всех типов равно n. Каждому типу соответствует вес w_f, $1 \le f \le F$. Требуется построить расписание обслуживания требований с минимальной взвешенной суммой времени, на протяжении которого требования каждого типа должны находиться в системе, или с минимальным значением

$$\sum_{f=1}^{F} w_f (C_f - S_f),$$

где C_f – время завершения обслуживания последнего в расписании требования типа f; S_f – время начала обслуживания первого в расписании требования типа f. При этом все требования должны быть обслужены до своих директивных сроков.

Сформулированная задача относится к классу задач обслуживания требований партиями. Задачи этого класса изучаются в работах [1, 2]. Наиболее близкой к рассматриваемой модели является модель из работы [3], в которой, однако, минимизируется другой критерий: число производственных партий, где под производственной партией подразумевается максимальная по количеству требований последовательность требований в расписании, принадлежащих одинаковому типу.

Критерий, предлагаемый в настоящей работе, обоснован следующими соображениями. Люди, выполняющие работу, совершают меньше неточностей, если требования одного типа расположены более плотно в расписании. Минимизация сформулированного критерия гарантирует такое свойство «плотности» расписания, а значит, позволяет минимизировать количество неточностей, совершаемых работающими людьми, при условии, что все требования обслуживаются до своих директивных сроков. Вес в этом случае отражает трудность исправления неточности при обслуживании требований данного типа.

Обычно при принятии решений о виде производственного расписания в реальных системах, моделируемых сформулированной задачей, есть некоторая гибкость в выполнении директивных сроков и разбиении на части указанных требований. Во-первых, это обусловлено тем, что потребители готовы ждать некоторое время завершения обслуживания своих требований. Во-вторых, длительность обслуживания требования отражает обычно время изготовления некоторого значительного количества требуемых изделий и производитель может изготавливать это количество партиями меньшего размера. При этом преследуется цель построить оптимальное расписание с меньшим значением критерия.

В настоящей работе сначала предлагается алгоритм динамического программирования сложности $O(n^F/F^{F-2})$ для решения исходной задачи в случае, когда требования одного типа обслуживаются по неубыванию своих директивных сроков и до своих директивных сроков. После этого предлагается общая модель линейного программирования, в рамках которой можно отклоняться от исходных директивных сроков и разбивать требования на части. Однако требуется, чтобы каждая часть была обслужена до релаксированного директивного срока. Релаксированные директивные сроки строятся разработанным методом на основе исходной информации. Далее предлагается алгоритм, строящий оптимальное расписание в рамках общей модели.

1. Алгоритм построения оптимального расписания для исходной задачи

Предположим, что требования одного типа обслуживаются в порядке неубывания своих директивных сроков. Тогда оптимальное расписание исходной задачи может быть найдено методом динамического программирования. Обозначим через $C(i_1, i_2, \ldots, i_F)$ длительность обслуживания частичного расписания, состоящего из i_f требований типа f, $1 \le f \le F$:

$$C(i_1, i_2, ..., i_F) = \sum_{f=1}^{F} \sum_{j=1}^{i_f} p_{j,f}.$$

Обозначим через $F(i_1, i_2, \ldots, i_F)$ значение критерия на частичном расписании, состоящем из i_f требований типа f, $1 \le f \le F$. Тогда может быть применен метод динамического программирования на основании следующих рекуррентных соотношений:

$$F(0, 0, ..., 0) = 0;$$

$$F(i_1, i_2, ..., i_F) = \min_{\substack{1 \le f \le F \\ i_f > 0}} F_f,$$

где $$F_f = \begin{cases} F(i_1, i_2, ..., i_f - 1, ..., i_F) + \sum\limits_{\substack{1 \le l \le F, l \ne f \\ i_l > 0, i_l < n_l}} w_l p_{i_f,f} + w_f p_{i_f,f}, \text{ если } C(i_1, i_2, ..., i_F) \le D_{i_f,f}; \\ \infty \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Сложность алгоритма динамического программирования на основе этих рекуррентных соотношений равна $O(n^F/F^{F-2})$. Значение критерия на оптимальном расписании – $F(n_1, n_2, \ldots, n_F)$, а оптимальное расписание может быть определено с помощью обратного поиска по переменным состояния за время $O(Fn)$.

2. Общая модель и алгоритм построения оптимального расписания

В разд. 2 предлагается общая модель, в которой требования могут обслуживаться частями, и допускается разумное отклонение от директивных сроков. Части требований обслуживаются по неубыванию директивных сроков требований.

Рассмотрим более широкий класс расписаний, который характеризуется следующим образом. Любое рассматриваемое расписание состоит из K частей. Часть $i + 1$ расписания обслуживается непосредственно за частью i. Часть i расписания может состоять не более чем из F подчастей, соответствующих переменным $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_F^i$. Если $x_f^i = 0$, требования типа f не обслуживаются в части i. В противном случае требования типа f составляют соответствующую подчасть и обслуживаются непрерывно на протяжении длительности x_f^i. Подчасти части i обслуживаются в порядке нумерации типов. Для того чтобы все требования одного типа были обслужены, накладываются следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{K} x_f^i = \sum_{j=1}^{n_f} p_{j,f}, 1 \le f \le F. \quad (1)$$

Отметим, что при такой формулировке на приборе нет свободных интервалов. Далее, как уже было отмечено, все требования одного типа обслуживаются в порядке неубывания своих директивных сроков. Между началом и завершением обслуживания каждого требования не обслуживается никакое требование этого типа. Допустимо разбиение требований каждого типа не более чем на K частей.

Планируется решать определенное количество задач линейного программирования, которые отличаются тем, что для некоторых переменных x_f^i зафиксированы значения, равные нулю. Это делается следующим образом. Для каждого типа определяются два числа $0 \le u_f < u_f + 1 < v_f \le K + 1$. Предполагается, что зафиксированы следующие значения переменных: $x_f^i = 0$, $1 \le i \le u_f$, и $x_f^i = 0$, $v_f \le i \le K$. Таким образом, определяется подкласс допустимых расписаний, в котором для каждого типа f u_f первых частей расписания не содержат подчастей типа f и $K - v_f + 1$ последних частей расписания не содержат подчастей типа f. Обозначим этот класс $K(u, v)$, где u и v – соответствующие векторы.

Далее конструируются дополнительные ограничения таким образом, чтобы все требования обслуживались, учитывая свои директивные сроки.

Рассмотрим требования типа f и часть расписания i. Определим следующие переменные и выражения для них:

$$\Delta x_f^i = \sum_{h=1}^{i} x_f^h, 1 \le f \le F, 1 \le i \le K; \quad (2)$$

$$\Delta y_f^i = \sum_{h=1}^{i-1} \sum_{r=1}^{F} x_r^h + \sum_{r=1}^{f} x_r^i, 1 \le f \le F, 1 \le i \le K. \quad (3)$$

Пусть f – произвольный тип требований. Тогда обозначим

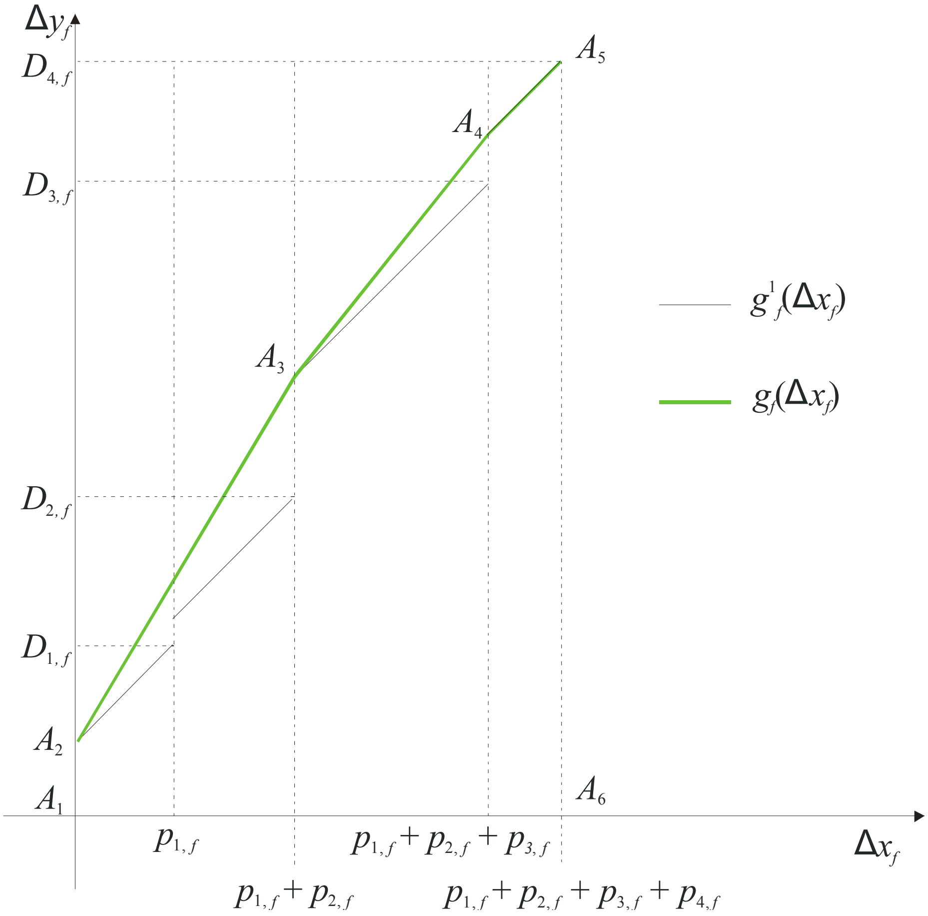
$$L_f = \sum_{j=1}^{n_f} p_{j,f}; \;\; L_f^j = \sum_{l=1}^{j} p_{l,f} .$$

Определим Δy_f сначала для случая, в котором $\Delta x_f = L_f^j$ для определенного значения j. Пусть тогда $\Delta y_f = \inf\{ \Delta y \mid$ в момент Δy в расписании обслужено ровно j первых требований типа $f \}$. Рассмотрим теперь случай, в котором значение Δx_f находится в интервале (L_f^{j-1}, L_f^j) и соответствует некоторым моментам времени в расписании, в которые обслужены полностью $j - 1$ первых требований типа f и часть требования j длительности $\Delta x_f - L_f^{j-1}$. Пусть в этом случае $\Delta y_f = \sup\{\Delta y \mid$ в момент Δy в расписании обслужено $j - 1$ первых требований типа f и часть требования j длительности $\Delta x_f - L_f^{j-1}\}$. Для допустимости расписания относительно исходной модели, когда требуется завершить обслуживание каждого требования до соответствующего директивного срока, необходимо и достаточно, чтобы точка $(\Delta x_f, \Delta y_f)$ для любого значения Δx_f, $0 \le \Delta x_f \le L_f$, находилась не выше графика функции

$$g_f^1(\Delta x_f) = \begin{cases} D_{1,f} - (p_{1,f} - \Delta x_f), \Delta x_f \in [0, p_{1,f}]; \\ D_{2,f} - (p_{1,f} + p_{2,f} - \Delta x_f), \Delta x_f \in (p_{1,f}, p_{1,f} + p_{2,f}]; \\ \ldots \\ D_{n_f,f} - (L_f - \Delta x_f), \Delta x_f \in (L_f^{n_f-1}, L_f]. \end{cases}$$

График функции $g^1_f(\Delta x_f)$ изображен на рисунке.

Сформулируем требование допустимости расписания следующим образом. Пусть $g_f(\Delta x_f)$ – непрерывная кусочно-линейная вогнутая функция, такая, что $g_f(\Delta x_f) \ge g^1_f(\Delta x_f)$ для любого Δx_f, $0 \le \Delta x_f \le L_f$, и такая, что площадь фигуры, ограниченной прямыми $A_1\Delta x_f$, $A_1\Delta y_f$, графиком этой функции и прямой $\Delta x_f = L_f$, минимальна. Такую функцию можно построить за время $O(n_f)$ с помощью алгоритма построения выпуклой оболочки множества точек [4]. Будем рассматривать расписание в качестве допустимого, если $(\Delta x_f, \Delta y_f)$ для любого значения Δx_f, $0 \le \Delta x_f \le L_f$, находится не выше графика функции $g_f(\Delta x_f)$ (рисунок). В ходе такой релаксации учитываются существующие директивные сроки и их величина, однако директивные сроки для отдельных требований могут нарушаться.



Графики функций $g^1_f(\Delta x_f)$ и $g_f(\Delta x_f)$

Утверждение. *Пусть выполняются неравенства*

$$\frac{(D_{j+1,f}-p_{j+1,f})-(D_{j,f}-p_{j,f})}{p_{j,f}} \ge \frac{(D_{j+2,f}-p_{j+2,f})-(D_{j+1,f}-p_{j+1,f})}{p_{j+1,f}}$$

для любых f, j, $1 \le f \le F$, $1 \le j \le n_f - 2$. Тогда в допустимом расписании относительно релаксированных директивных сроков прибор завершает обслуживание каждого требования (j, f), $1 \le f \le F$, $1 \le j \le n_f - 1$, до директивного срока $D_{j+1,f}$, а последних требований каждого типа – до их директивных сроков.

Следствие. *Пусть длительности обслуживания требований одного типа равны между собой и выполняются неравенства*

$$D_{j+1,f} \ge \frac{D_{j,f} + D_{j+2,f}}{2}$$

для любых f, j, $1 \le f \le F$, $1 \le j \le n_f - 2$. Тогда в допустимом расписании относительно релаксированных директивных сроков прибор завершает обслуживание каждого требования (j, f), $1 \le f \le F$, $1 \le j \le n_f - 1$, до директивного срока $D_{j+1,f}$, а последних требований каждого типа – до их директивных сроков.

Для допустимости расписания относительно релаксированных директивных сроков необходимо и достаточно выполнение следующих условий, каждое из которых может быть смоделировано не более чем $n_f + 3$ линейными неравенствами, соответствующими граням многогранника R_f:

$$(\Delta x_f^i - x_f^i, \Delta y_f^i - x_f^i) \in R_f,\ 1 \le f \le F,\ u_f + 1 \le i \le v_f - 1; \qquad (4)$$

$$(\Delta x_f^i, \Delta y_f^i) \in R_f,\ 1 \le f \le F,\ u_f + 1 \le i \le v_f - 1. \qquad (5)$$

В условиях (4) и (5) R_f – это многогранник, примером которого является многогранник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ на рисунке. Граница этого многогранника проходит по графику функции $g_f(\Delta x_f)$, прямым $A_1\Delta x_f$, $A_1\Delta y_f$ и прямой $\Delta x_f = L_f$.

Определим целевую функцию:

$$\min \sum_{f=1}^{F} w_f (\Delta y_f^{v_f - 1} - (\Delta y_f^{u_f + 1} - x_f^{u_f + 1})). \qquad (6)$$

Исходная задача сводится к решению $O((K(K+1))^F/2^F)$ задач линейного программирования с целевой функцией (6) и ограничениями (1)–(5). Алгоритм просматривает все допустимые значения (u,v) и для каждого значения (u,v) находит оптимальное расписание задачи линейного программирования с целевой функцией (6) и ограничениями (1)–(5), а затем выбирает расписание с минимальным значением целевой функции.

Заключение

Рассмотрена задача обслуживания требований различных типов на одном приборе при наличии директивных сроков. Разработан оптимальный алгоритм для случая, когда требования обслуживаются по неубыванию своих директивных сроков и до своих директивных сроков. Предложен метод релаксации директивных сроков. Разработан алгоритм построения оптимального расписания относительно релаксированных директивных сроков.

В качестве направления для будущих исследований можно рассмотреть другие критерии оптимальности расписания.

Исследования проводились в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф08М-094.

Список литературы

1. Танаев, В.С. Теория расписаний. Групповые технологии / В.С. Танаев, М.Я. Ковалев, Я.М. Шафранский. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1998. – 290 с.

2. Potts, C.N. Scheduling with batching: A review / C.N. Potts, M.Y. Kovalyov // European Journal of Operational Research. – 2000. – Vol. 120. – P. 228–249.

3. Баркетов, М.С. Приближенный алгоритм для задачи планирования в цепи производства и поставок / М.С. Баркетов, М.Я. Ковалев // Известия Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2006. – № 1. – С. 100–106.

4. Graham, R.L. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set / R.L. Graham // Information Processing Letters. – 1972. – Vol. 1. – P. 132–133.

Поступила 15.10.09

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6,
e-mail: barketau@mail.ru

M.S. Barketau

RELAXING DUE DATES IN ONE MACHINE SCHEDULING PROBLEM

The one machine scheduling problem with items of several types is considered. Each item has a due date. The problem is to find the schedule with the minimum weighted sum of in-system-times of items of each type. The method of building the relaxed due dates is proposed. The algorithm that finds the optimal schedule feasible with regard to the relaxed due dates is developed.