

## ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И ДАННЫХ

УДК 004.93'1; 004.932

Д.В. Прадун, Б.А. Залесский

**ФИЛЬТРАЦИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ МУЛЬТИСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТИ НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА**

*Рассматривается алгоритм фильтрации и кластеризации мультиспектральных изображений с помощью алгоритма максимального потока сети. Приводятся основные понятия и определения, необходимые для применения алгоритма. Описываются способы кластеризации бинарных, полутонных и мультиспектральных изображений с помощью алгоритма максимального потока. Для улучшения качества обработки изображений предлагается использовать сети, пропускные способности которых зависят от градиента изображений. Описывается несколько вариантов построения сетей. Дается сравнение результатов фильтрации и кластеризации космических изображений алгоритмом максимального потока с учетом и без учета градиента изображений.*

**Введение**

Использование алгоритма максимального потока сети в программировании показало его эффективность не только при решении задач экономики, транспорта, управления и автоматизации, но и при обработке изображений [1–3]. Качество разработанных на его основе алгоритмов поиска и связывания контуров изображений [1], а также алгоритмов фильтрации космических снимков [2, 3] доказало, что данный алгоритм может быть достаточно эффективно использован для обработки мультиспектральных изображений. Однако предложенный ранее авторами алгоритм фильтрации и кластеризации мультиспектральных изображений на основе вычисления максимального потока сети [3] не учитывает неоднородность изображений, что, безусловно, сказывается на качестве его работы.

В настоящей статье предложена новая версия алгоритма фильтрации мультиспектральных изображений [3]. В ней фильтрация и кластеризация всех цветовых каналов изображения осуществляются отдельно друг от друга с использованием сетей, имеющих дуги, пропускные способности которых вычисляются на основе градиента изображения. При вычислении градиента используются четыре производных по направлению: горизонтальная, вертикальная и две диагональных.

Производится сравнение результатов работы новой и предложенной ранее версий алгоритма [3], в которой пропускные способности дуг не зависят от неоднородности изображения.

**1. Основные понятия и определения максимального потока**

Предположим, что для сети  $G = (V, E)$ , не имеющей петель, выполняются следующие условия [3]:

- а) одна вершина, которая не имеет входящих дуг, называется источником и обозначается через  $s$ ;
- б) одна вершина, которая не имеет исходящих дуг, называется стоком и обозначается через  $t$ ;
- в) каждой дуге  $e = (i, j)$  сети сопоставлено неотрицательное вещественное число, которое называется пропускной способностью из вершины  $i$  в вершину  $j$  и обозначается через  $c(e)$  или  $c(i, j)$ . Если не существует дуги  $e$  из  $i$  в  $j$ , то  $c(e) = 0$ .

Тогда величиной  $f$  потока сети  $G$  является функция, сопоставляющая каждой дуге  $e = (i, j)$  неотрицательное вещественное число  $f(e) = f(i, j)$  так, что выполняются следующие условия [4, 5]:

$$f(i, j) \leq c(i, j), \quad i, j \in V; \quad (1)$$

для всех  $i$  из  $V \setminus \{s, t\}$

$$\sum_{j \in V} f(i, j) - \sum_{j \in V} f(j, i) = 0. \quad (2)$$

Под величиной потока  $f$  будем понимать сумму потоков по всем дугам, исходящим из истока [4, 5]:

$$val(f) = \sum_{j \in V} f(s, j). \quad (3)$$

Условие (2) определяет, что сумма пропускных способностей дуг, выходящих из источника, равна сумме пропускных способностей дуг, входящих в сток [3]:

$$val(f) = \sum_{j \in V} f(s, j) = \sum_{i \in V} f(i, t).$$

Пусть даны два непересекающихся множества вершин  $S$  и  $\bar{S}$ ,  $S \cup \bar{S} = V$ , таких, что  $s \in S$  и  $t \in \bar{S}$ . Обозначим через  $\langle S, \bar{S} \rangle$   $s-t$ -разрез сети, образованный всеми дугами, соединяющими  $S$  и  $\bar{S}$ .

Пропускная способность  $c(K) = c(S, \bar{S})$  разреза  $K = \langle S, \bar{S} \rangle$  определяется выражением

$$c(K) = \sum_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} c(i, j). \quad (4)$$

Можно доказать [3], что для любого потока  $f$  и любого разреза  $\langle S, \bar{S} \rangle$  в сети верно выражение

$$val(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S). \quad (5)$$

Следовательно,

$$val(f) \leq c(S, \bar{S}).$$

Известно [4, с. 407], что если для сети с потоком  $f$  разрез  $K = \langle S, \bar{S} \rangle$  удовлетворяет соотношению  $val(f) = c(K)$ , то поток  $f$  будет максимальным, а разрез – минимальным. Другими словами, величина максимального потока сети равна пропускной способности минимального разреза.

## 2. Кластеризация бинарных изображений

Для любого бинарного изображения  $Y = (y_i)_{i \in P}$  с пикселями  $P$  можно построить соответствующую сеть. Для этого каждый пиксель  $i \in P$  можно представить как вершину сети так, что множество вершин сети  $V = \{P, s, t\}$ . Каждый пиксель  $i$  изображения соединяется дугой с соседним пикселем  $j$  из выбранной окрестности  $O(i)$ . Чаще всего выбираются стандартные окрестности  $O(i)$  из четырех или восьми пикселей. Таким образом, множество дуг  $E$  представляет объединение множеств

$$E = \{(i, j), i \sim j\} \cup \{(s, i), y_i = 1\} \cup \{(i, t), y_i = 0\},$$

где  $i \sim j$  – соседние пиксели изображения для выбранной системы окрестностей  $O(i)$ ;  $y_i$  – значение интенсивности изображения в пикселе  $i$ . Нетрудно заметить, что каждая обычная вершина сети  $i \in P$  соединена либо только с источником, либо только со стоком.

Согласно утверждению Дж. Пикарда и Г. Рэтлиффа [9] для произвольного  $s-t$ -разреза  $\langle W, B \rangle$  ( $s \in W, t \in B$ ) построенной сети бинарное изображение  $X$  будет иметь следующие значения яркостей:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in W; \\ 0, & \text{если } i \in B. \end{cases}$$

Пропускная способность  $s-t$ -разреза  $\langle W, B \rangle$  построенной сети согласно формуле (4) находится из выражения

$$C(W, B) = \sum_{\substack{i \in W \\ j \in B}} c(i, j). \quad (6)$$

Определим квадратичную функцию от бинарного изображения  $X$  с помощью формулы

$$F(X) = \sum_{\substack{i \in W, \\ y_i = 0}} \lambda_i + \sum_{\substack{i \in B, \\ y_i = 1}} \lambda_i + \sum_{\substack{i \in V, \\ j \in V}} \beta_{i,j} (x_i - x_j) \cdot x_i, \quad (7)$$

где  $\lambda_i$  – пропускная способность дуги, выходящей из вершины  $s$  либо входящей в вершину  $t$ ;  $\beta_{i,j}$  – пропускные способности всех остальных дуг [2]. Можно убедиться, что  $C(W, B) = F(X)$ .

Зададим функцию вида

$$U(X) = \sum_{i \in V} \lambda_i \cdot (1 - 2y_i) \cdot x_i + \sum_{\substack{i \in V, \\ j \in V}} \beta_{i,j} (x_i - x_j) \cdot x_i. \quad (8)$$

Тогда  $F(X) = U(X) + \sum_{i \in S} \lambda_i y_i$ , вследствие чего множества  $\{X^* \mid F(X^*) = \min_X F(X)\}$  и  $\{X^{**} \mid U(X^{**}) = \min_X U(X)\}$  равны, т. е. множество векторов, удовлетворяющих равенству  $X^* = \arg \min_X U(X)$ , задает минимальный разрез сети, построенной для искомого бинарного изображения  $Y$  [9].

### 3. Фильтрация с помощью алгоритма максимального потока полутоновых и мультиспектральных изображений

Для заданной последовательности неотрицательных чисел  $m(0), m(1), \dots, m(L-1)$  любое полутоновое изображение  $X$  представляет собой сумму  $X = m(0) \cdot X(0) + \sum_{l=1}^{L-1} (m(l) - m(l-1)) \cdot X(l)$  бинарных изображений-слоев  $X(l)$ , где  $0 < l \leq L-1, 2 < L \leq 256$ . При этом

если задана последовательность  $M = \{1, 2, 3, \dots, 255\}$ , то  $X = \sum_{l=1}^{L-1} X(l)$ . Координаты каждого вектора  $x(l)$  равны 1, если  $x_i(l) \geq m(l)$ , и равны 0 в противном случае. Полученные бинарные изображения задают монотонно убывающую последовательность  $X(1) \geq X(2) \geq \dots \geq X(L-1)$  [3]. Следовательно, для любого полутонового изображения функцию  $U(X)$  можно представить как

$$U(X) = \sum_{l=1}^{L-1} U_l(X(l)). \quad (9)$$

Здесь

$$U_l(X(l)) = \lambda \sum_{i \in S} |y_i(l) - x_i(l)| + \sum_{(i,j) \in S} \beta_{i,j} |x_i(l) - x_j(l)|, \quad (10)$$

где  $y_i(l)$  – координаты вектора исходного полутонового изображения, полученные на слое  $l$ . Из формул (9), (10) следует, что

$$U(X) = \sum_{i \in S} \lambda_i \left| y_i - \sum_{l=1}^{L-1} x_i(l) \right| + \sum_{(i,j) \in S} \beta_{i,j} \sum_{l=1}^{L-1} |x_i(l) - x_j(l)|. \quad (11)$$

Минимизируя функцию  $U(X)$ , т. е. найдя невозрастающую последовательность таких бинарных изображений-слоев  $\tilde{X}(l)$ , каждое из которых удовлетворяет условию

$$\tilde{X}(l) = \arg \min_{X_{bin}} U_l(X_{bin}), \quad l \in \{1, \dots, L-1\}, \quad (12)$$

получим сегментированное изображение [7], которое будет представлено как

$$\tilde{X} = m(0) \cdot \tilde{X}(0) + \sum_{l=1}^{L-1} (m(l) - m(l-1)) \cdot \tilde{X}(l). \quad (13)$$

Коэффициенты  $\beta_{i,j}$  из формулы (11) определяют степень сглаживания изображения, а коэффициенты  $\lambda_i$  – пропускную способность дуг, выходящих из источника и входящих в сток. Для мультиспектральных изображений каждый цветовой канал спектра представляет собой полутоновое изображение, которое может быть сегментировано согласно представленному выше алгоритму [3].

#### 4. Вычисление значений пропускных способностей дуг на основе градиента изображения

Как показали результаты тестирования [3], использование фиксированных значений  $\beta_{i,j}$  позволяет получить приемлемое качество фильтрации. Однако в этом случае не учитывается неоднородность изображения, что может приводить к существенным отличиям границ кластеров от границ однородных областей изображения. Выходом из данной ситуации может быть использование градиента для задания границ однородности конкретных областей изображения. При этом величина  $\beta_{i,j}$  должна быть убывающей функцией от значения производной между

соответствующими пикселями  $i$  и  $j$  для сохранения границ объектов на изображении и максимального сглаживания однородных областей.

Пусть  $Gr_{i,j}(I)$  – значение градиента изображения между пикселями  $i$  и  $j$ , вычисленное по формулам, описанным в [8]. Тогда зависимость значения  $\beta_{i,j}$  от значения  $Gr_{i,j}(I)$  можно записать как

$$\beta_{i,j} = \frac{\beta_{i,j}}{1 + \Phi(Gr_{i,j}(I))}, \quad (14)$$

где  $\Phi(Gr_{i,j}(I))$  – некая функция, зависящая от значения градиента. Формула (14) отображает обратную линейную зависимость  $\beta_{i,j}$  от  $\Phi(Gr_{i,j}(I))$ . На практике можно использовать и другие виды зависимостей. В данной работе кроме формулы (14) использовались зависимости вида

$$\beta_{i,j} = \frac{\beta_{i,j}}{1 + \Phi(Gr_{i,j}^2(I))}; \quad (15)$$

$$\beta_{i,j} = \frac{\beta_{i,j}}{\Phi(\exp(Gr_{i,j}(I)))}. \quad (16)$$

Значения  $\beta_{i,j}$ , как и градиент, вычисляются в четырех основных направлениях: горизонтальном, вертикальном, под углами 45 и 135°. Таким образом учитывается связь с каждым соседним пикселем из восьмиточечной окрестности центрального пикселя, для которого определяются пропускные способности всех дуг данной окрестности.

### 5. Результаты работы алгоритма максимального потока с использованием градиента

Сравнение результатов фильтрации с помощью алгоритма максимального потока, использующего фиксированные и динамически изменяемые значения пропускных способностей дуг, показало, что при применении градиента для вычисления  $\beta_{i,j}$  выполняется более адаптивное сглаживание, которое учитывает локальные особенности каждого пикселя в пределах его окрестности. Использование различных функционалов  $F$  для вычисления пропускных способностей показало, что значения  $\beta_{i,j}$  при этом отличаются друг от друга незначительно (рис. 1–3).



Рис. 1. Исходные тестовые изображения: а) аэросъемка; б) снимок со спутника Landsat

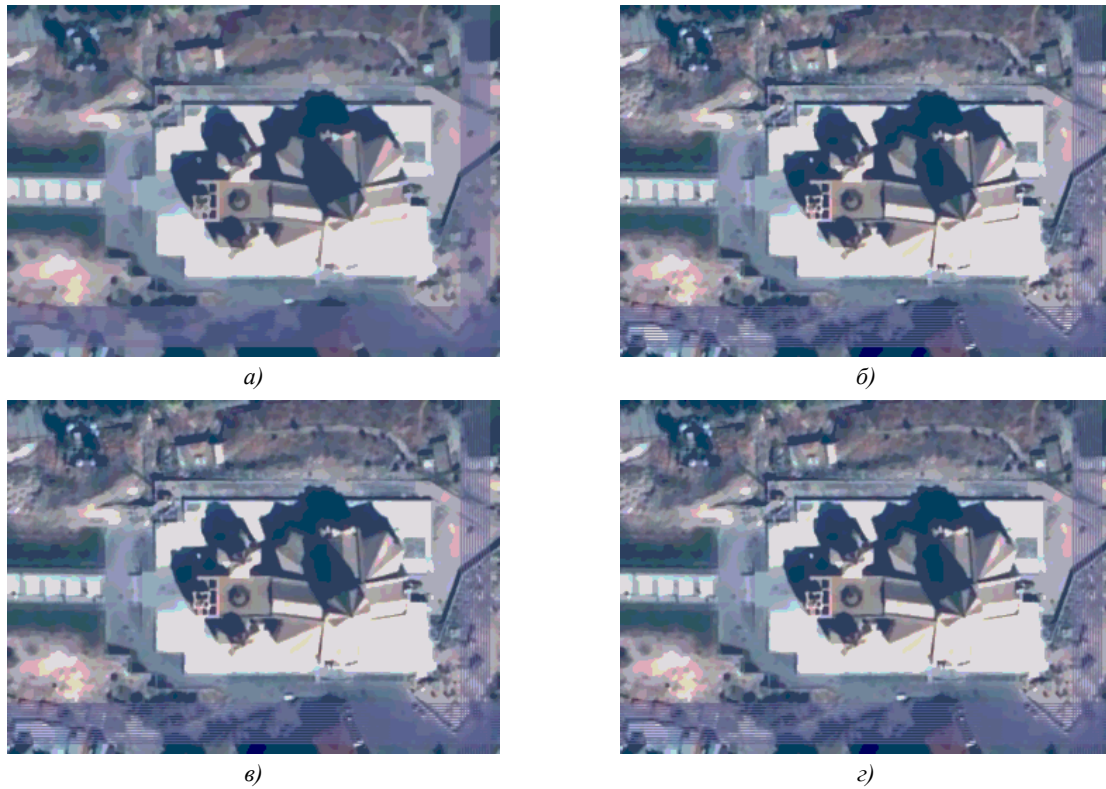


Рис. 2. Результаты фильтрации снимка на рис. 1, *a*) фильтрация с совпадающими значениями  $\beta_{i,j}$  для разных  $i, j$ ; *б*) фильтрация с использованием функционала (15); *в*) фильтрация с использованием функционала (16); *г*) фильтрация с использованием функционала (14)



Рис. 3. Результаты фильтрации снимка на рис. 1, *б*) *a*) фильтрация с совпадающими значениями  $\beta_{i,j}$  для разных  $i, j$ ; *б*) фильтрация с использованием функционала (15); *в*) фильтрация с использованием функционала (16); *г*) фильтрация с использованием функционала (14)

### Заключение

Результаты фильтрации и кластеризации изображений с помощью предложенного алгоритма максимального потока на основе градиента показали, что использование динамически вычисляемых значений пропускных способностей дуг позволяет более полно учесть яркостные и текстурные особенности изображения. Благодаря этому сохраняются границы объектов и мелкие детали изображения. Такое свойство может быть использовано при фильтрации космических снимков городских построек, где количество небольших объектов очень велико. Для изображений сельскохозяйственных угодий приемлема определенная степень «затирания» мелких объектов, однако сохранение высокой детализации в таких снимках может быть использовано при определении высоты и уровня пригодности почв.

Несмотря на приемлемое качество фильтрации изображений алгоритмом максимального потока, основной проблемой данного метода остается возможность обработки мультиспектральных снимков большого и сверхбольшого размера. Как показали результаты тестирования, имеющаяся на данный момент реализация алгоритма максимального потока не способна решить данную проблему. Так, для изображения размером  $2000 \times 2000$  пикселей минимальный размер памяти, необходимой для создания сети, равен порядка 815 Мбайт вследствие того, что для каждой вершины сети в 8-точечной окрестности необходимо  $2 \times 8 + 2$  дуг. К сожалению, выделить столько памяти даже на современных ЭВМ с использованием существующих методов не представляется возможным. Поэтому в качестве дальнейшего усовершенствования алгоритма предполагается разработать блочно-параллельную версию, в которой каждый цветовой канал изображения будет разбиваться на отдельные блоки, обрабатываемые независимо в параллельном режиме.

### Список литературы

1. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Boykov, Y. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms of energy minimization in vision / Y. Boykov, V. Kolmogorov // IEEE Transactions on PAMI. – 2004. – Vol. 26, № 9. – P. 1124–1137.
3. Прадун, Д.В. Использование алгоритма максимального потока графа для фильтрации мультиспектральных изображений / Д.В. Прадун, Б.А. Залесский // Информатика. – 2009. – № 4 (24). – С. 18–27.
4. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984. – 454 с.
5. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – М. : Мир, 1981. – 324 с.
6. Picard, J.C. Minimum cuts and related problems / J.C. Picard, H.D. Ratliff // Networks. – 1975. – Vol. 5, № 4. – P. 357–370.
7. Zalesky, B.A. Network flow optimization for restoration of images / B.A. Zalesky // Journal of Applied Mathematics. – 2002. – Vol. 2, № 4. – P. 199–218.
8. Залесский, Б.А. Алгоритм адаптивной фильтрации мультиспектральных изображений / Б.А. Залесский, Д.В. Прадун // Информатика. – 2009. – № 2 (22). – С. 31–38.

Поступила 14.05.10

*Объединенный институт проблем  
информатики НАН Беларуси,  
Минск, Сурганова, 6  
e-mail: pradundv@gmail.com*

**D.V. Pradun, B.A. Zalesky**

**MULTISPECTRAL IMAGES FILTRATION AND CLUSTERING  
USING MAXIMUM NETWORK FLOW ALGORITHM  
ON THE BASE OF GRADIENT CALCULATION**

Multispectral images filtration using maximum network flow algorithm is described. The basic concepts and definitions necessary for the description of maximum network flow are cited. The ways of binary, grayscale and multispectral images segmentation using maximum network flow algorithm are described. The modification of maximum flow algorithm according to which the arc capacities are calculated on the basis of image gradient is proposed. The comparison of space images filtration results using maximum flow algorithm with fixed and dynamically calculated capacities is given.