

УДК 539.3

О.Л. Швед

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ОБЪЕМА МАТЕРИАЛОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ РАЗРУШЕНИЯ ПОД ВЫСОКИМ ГИДРОСТАТИЧЕСКИМ ДАВЛЕНИЕМ

Предлагается условие макроразрушения материала под высоким гидростатическим давлением, которое заключается в вырождении (необратимости) нелинейно-упругого закона Мурнагана. Выполняется численное моделирование величины изменения относительного объема при всестороннем равномерном растяжении и сжатии некоторых металлов и сплавов, предполагаемых изотропными. Определяются границы разрушения. Устанавливается, что деформационная анизотропия, связанная с предварительным одноосным растяжением, например, сплава D 54 S, незначительно уменьшает прочность материала под давлением.

Введение

В процессах обработки металлов давлением упругие деформации бывают обычно малыми, но возможен случай, когда картина резко меняется. Всестороннее равномерное растяжение и сжатие происходит без пластической деформации, и тогда общая деформация совпадает с упругой деформацией, которую следует считать конечной [1, 2]. Изучение поведения материалов под высоким гидростатическим давлением в физических экспериментах затруднено в силу технических причин [3, 4]. Поэтому вопрос об определении возможных границ разрушения мало исследован [5], хотя для этого вполне применимы методы математического моделирования в рамках геометрически нелинейной теории упругости. Для получения достоверных результатов требуется только выбрать более точный закон упругости. Вызывают интерес и предельные оценки изменения объема материалов.

1. Нелинейно-упругий закон Мурнагана

Наиболее совершенным уравнением состояния нелинейно-упругого изотропного материала представляется пятиконстантный закон упругости Мурнагана [1, 2], который можно записать в виде

$$\mathbf{T} = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2), \quad (1)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши; \mathbf{F} – мера деформации Фингера; \mathbf{E} – единичный тензор;

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a_0 I_3, \quad \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \quad \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1, \\ a_0 &= 2^{-1} v_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3), \\ b_1 &= 8^{-1}(2\lambda - 3v_1 - 4v_2), \quad b_2 = 16^{-1}(v_1 + 2v_2), \quad b_3 = -4^{-1}(v_2 + 2v_3), \\ c_0 &= 4^{-1}(2\mu - 3v_2 - 4v_3), \quad c_1 = -b_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь I_1, I_2, I_3 – главные первый, второй и третий инварианты тензора \mathbf{F} ; λ, μ – постоянные Ляме второго и v_1, v_2, v_3 – третьего порядков.

Решение краевых задач нелинейной теории упругости затруднено, но в некоторых случаях возможно построение решения «обратным методом», который состоит в следующем [1]. Задаем форму преобразования отсчетной конфигурации в актуальную, в данном случае это будет преобразование подобия. Составляем выражение меры деформации и записываем уравнение состояния. Осуществляем проверку того, что определяемый им тензор напряжений удовлетворяет

уравнениям статики в объеме актуальной конфигурации. В рассматриваемой задаче тензор напряжений будет постоянной величиной и уравнение равновесия выполняется: $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$. Далее определяются поверхностные силы для поддержания этого напряженного состояния.

Обозначим коэффициент подобия через x . Имеем $\mathbf{F} = f\mathbf{E}$, $f = x^2$, $I_1 = 3f$, $I_2 = 3f^2$, $I_3 = f^3$, $\mathbf{T} = 2(\sqrt{f^3})^{-1}(\varphi_0 + \varphi_1 f + \varphi_2 f^2)\mathbf{E} = p\mathbf{E}$, где $p < 0$ при сжатии и $p > 0$ при растяжении. Приходим к скалярному уравнению относительно неизвестного $x = x(p)$:

$$x^4 + y_2 x^2 + y_3 x + y_4 = 0, \quad (3)$$

где

$$y_2 = 2(6\lambda + 4\mu - 9\nu_1 - 18\nu_2 - 8\nu_3)(9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)^{-1}; \quad (4)$$

$$y_4 = (-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)(9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)^{-1};$$

$$y_3 = -8p(9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)^{-1}. \quad (5)$$

Решение уравнения (3) выполняем средствами системы Mathcad. В таблице приведены данные для исследуемых материалов (металлов и сплавов) [1].

Значения постоянных Ляме, ГПа

Материал	$10^{-2}\lambda$	$10^{-2}\mu$	$10^{-2}\nu_1$	$10^{-2}\nu_2$	$10^{-2}\nu_3$
1. Сталь 35ХГСА	1,1	0,804	-1,9	-2,3	-2,01
2. Железо Армко	1,1	0,82	2,6	-4,8	-2,8
3. Магний	0,259	0,166	-0,654	-0,574	-0,421
4. Медь	1,07	0,477	-5,6	1,72	-3,98
5. Сплав В 54 S	0,58	0,26	-2,49	-0,99	-0,6
6. Сплав D 54 S	0,49	0,26	-3,8	-2,0	-0,8
7. Молибден, спеченный из порошка	1,57	1,1	-0,51	-2,83	-0,93
8. Молибден рекристаллизованный	1,78	1,24	1,94	-3,98	-2,27
9. Вольфрам, спеченный из порошка	0,75	0,73	-2,15	-1,43	-1,24
10. Вольфрам рекристаллизованный	1,63	1,37	-4,29	-2,58	-2,67
11. Бронза бериллиевая	1,042	0,45	-4,0	-1,7	-0,6

Установлены следующие факты. При сжатии упругий материал допускает теоретически бесконечные нагрузки ($p \rightarrow -\infty$), при этом для объемов материала в отсчетной и актуальной конфигурациях (V_0 и V) выполняется $V/V_0 = \sqrt{I_3} = x^3 \rightarrow 0$.

При растяжении существуют конечные значения p , такие, что при его дальнейшем увеличении уравнение (3) не имеет физически правильного решения. В этот момент два положительных действительных корня полинома совпадают и затем становятся комплексно-сопряженными. Условие существования кратного корня полинома (3) [6] можно записать в виде

$$27y_3^4 + 4y_2(y_2^2 - 36y_4)y_3^2 + 16y_4(8y_2^2y_4 - y_2^4 - 16y_4^2) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) разрешаем относительно y_3 :

$$y_3 = \sqrt{2(y_2(-y_2^2 + 36y_4) + (y_2^2 + 12y_4)\sqrt{y_2^2 + 12y_4})(3\sqrt{3})^{-1}}. \quad (7)$$

Из (5), (7) с учетом (4) находим предельное значение

$$p = -\sqrt{2(y_2(-y_2^2 + 36y_4) + (y_2^2 + 12y_4)\sqrt{y_2^2 + 12y_4})(24\sqrt{3})^{-1}(9v_1 + 18v_2 + 8v_3)^{-1}}. \quad (8)$$

Проверено, что для всех рассматриваемых реальных материалов соотношение (8) имеет физический смысл. Полученное значение p из (8) естественно отождествить с граничной величиной давления, приводящего к разрушению материала. Кроме того, ясно, что при большем значении p упругий закон (1), (2) должен вырождаться (деформации нельзя выразить численно через напряжения). В противном случае нашлись бы тензор \mathbf{F} , скаляр $\sqrt{I_3}$ и положительный корень уравнения (3), что невозможно. Таким образом, вырождение упругого закона связываем с моментом разрушения материала.

Отметим, что другие материалы [1] могут вести себя под давлением по иному. Так, плавленный кварц допускает бесконечное давление при растяжении и конечное при сжатии, также согласно (8) имеем $p = -3,1$ (ГПа). Стекло пирекс имеет бесконечные значения p в обоих случаях.

2. Результаты численного моделирования

Попытаемся получить найденные предельные значения давления непосредственным обращением закона при данном нагружении. Запишем исходное соотношение

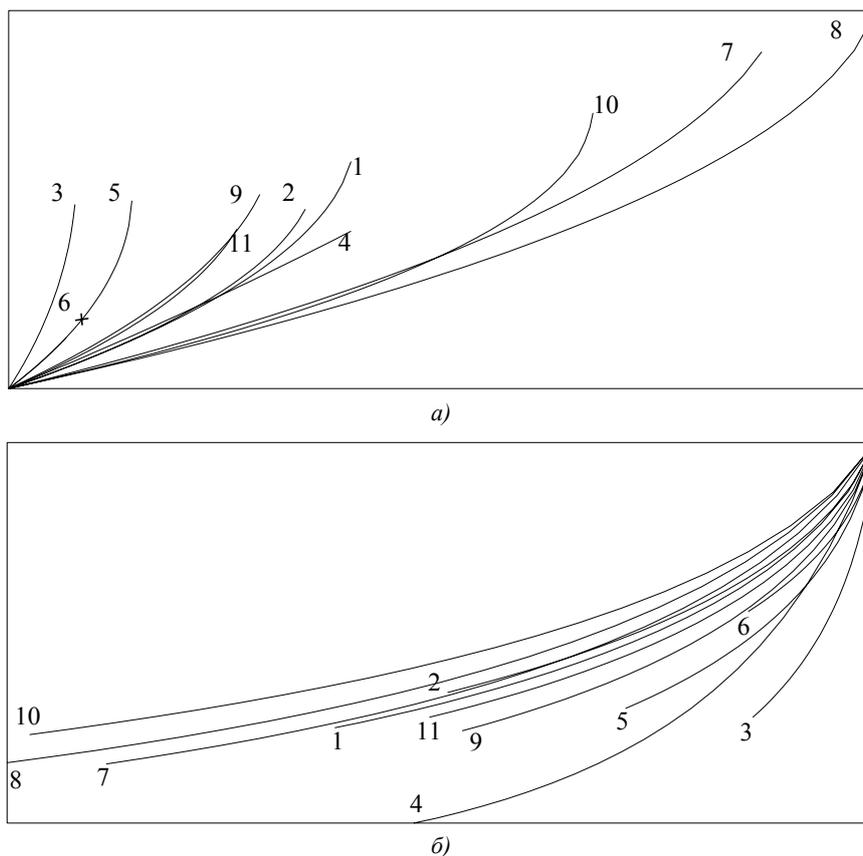
$$p\mathbf{E} = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{F} + \varphi_2\mathbf{F}^2). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) выбран метод Ньютона. Разработанные программные средства применяем в общем виде с целью их тестирования. Процедура обращения обобщенного изотропного закона (1) для анизотропного материала постоянно используется в модели упругопластической среды [7], и отказ численного метода может иметь разные причины.

Вычислены значения V/V_0 при $|p| \rightarrow \infty$. В качестве начального значения при $p = 0$ принималось $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, для остальных значений p выбиралось решение \mathbf{F} , найденное на предыдущем шаге по величине p . Меньшая величина шага дает, конечно, лучшее для сходимости начальное значение.

При расчете процесса растяжения до момента расходимости численного метода полностью подтвердились данные, полученные при решении уравнения (3). Для процесса сжатия расходимость численного метода происходила при конечных значениях давления.

На рисунке показаны результаты расчетов, выполненных до момента отказа метода. Обозначения кривых соответствуют нумерации в таблице. Промежутки изменения величин на рисунке составляют $0 \leq p \leq 38$ (ГПа), $1 \leq V/V_0 \leq 1,23$ и $-770 \leq p \leq 0$ (ГПа), $0,153 \leq V/V_0 \leq 1$ соответственно. (Для сравнения, максимальное по модулю давление p в существующих аппаратах для сжатия равно -280 ГПа. Сведения о возможных растягивающих нагрузках отсутствуют.) Интервал деформирования металлов и их сплавов при гидростатическом сжатии оказывается существенно большим, чем при растяжении. Максимальное изменение объема при растяжении достигает 29 % для рекристаллизованного молибдена, а при сжатии – 84,7 % для меди со значением $p = -500$ (ГПа). При нагружении шара из изотропного материала гидростатическим давлением форма его сохраняется, а новый радиус можно определить из рисунка.



Зависимость относительного объема материала V/V_0
от гидростатического давления p : а) $p > 0$; б) $p < 0$

Выполнены также исследования влияния предварительной деформации одноосного растяжения с разгрузкой на последующее нагружение всесторонним равномерным растяжением и сжатием. Используются результаты, полученные в работе [7]. Упругий закон (1) переходит при этом в обобщенный упругий закон и значительно усложняется. Указанным выше способом были определены границы расходимости численного метода для сплава D 54 S, которые уменьшились при растяжении и сжатии максимально на 4 и 5,3 %. Влияние предварительной анизотропии оказалось незначительным. При нагружении шара из рассматриваемого материала гидростатическим давлением он превращается в эллипсоид с большей полуосью, совпадающей с направлением предварительного растяжения. Это соответствует экспериментальным данным [4, 5].

Заключение

В настоящей работе разрушение при упругой деформации определялось вырождением уравнения состояния. Благодаря общности используемого закона упругости гарантировано получение хорошего приближения при определении границ разрушения материала при растяжении. Такие оценки получены в данной работе для некоторых металлов и сплавов. Для двухконстантного упругого закона Синьорини величина p будет в несколько раз большей. Данные об изменении объема материала дают представление о возможных масштабах упругой деформации.

Вопросы, связанные с фазовыми превращениями в материале под высоким давлением, в данной работе не рассматривались.

Список литературы

1. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
2. Murnagan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnagan. – N.Y. : Dover, 1967. – 140 p.

3. Белл, Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации / Дж.Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
4. Бриджмен, П.В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / П.В. Бриджмен. – М. : Изд-во иностр. лит., 1955. – 444 с.
5. Потапова, Л.Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? / Л.Б. Потапова, В.П. Ярцев. – М. : Машиностроение-1, 2005. – 244 с.
6. Швед, О.Л. Квадрат определителя Вандермонда для корней полинома пятой степени / О.Л. Швед, С.С. Булюшко // Информатика. – 2007. – № 1 (13). – С. 129–132.
7. Швед, О.Л. Об условии разрушения металла при пластической деформации / О.Л. Швед // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : труды Второй Междунар. конф. Казань, 8–11 декабря 2009 г. – Казань, 2009. – С. 417–420.

Поступила 23.04.10

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

O.L. Shwed

**NUMERICAL SIMULATION OF THE MATERIAL SIZE CHANGES
AND DESTRUCTION LIMITS DETERMINATION
UNDER THE HIGH HYDROSTATIC PRESSURE**

The condition for material microdestruction under the high hydrostatic pressure has been suggested. It consists in irreversible degradation of the nonlinear-elastic Murnagan law. Numerical simulation has been performed up to the destruction point of the relative size variation value under the all-round uniform compression and stretching some metals and their alloys being supposed isotropic. The boundaries of destruction have been detected. It has been determined that the deformation anisotropy connected with the preliminary uneasily stretching, e.g. of the D 54 S alloy, insignificantly decreases the material strengths under the pressure effect.