ИНФОРМАТИКА
2010 июль-сентябрь № 3

УДК 681.3

Е.И. Сукач

МЕТОД ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАДЕЖНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Излагается метод вероятностно-алгебраического моделирования надежности функционально-сложных систем, основанный на использовании алгебраического аппарата для описания отношений между компонентами систем и допускающий переход к моделированию непрерывного процесса изменения надежности систем в результате вероятностного изменения надежности компонентов и случайного характера взаимодействий между ними.

Введение

Основные теоретические разработки в области надежности сложных систем (СС) нашли свое воплощение в универсальных программных средствах, включающих в себя не только реализацию созданных моделей и методов, но и унифицированные процедуры обработки и расчета исходных данных. Универсальное программное обеспечение анализа надежности и безопасности, как правило, включает в себя блоки логико-вероятностного, марковского и статистического анализов, а также стандартизованные расчетные процедуры для вычисления интенсивностей отказов компонентов систем, средних времен их восстановления, модули поддержки качественных процедур выявления видов и последствий отказов. Структура и особенности функционирования реальных технических систем столь разнообразны, специфичны и сложны, что моделирование и анализ их характеристик надежности возможны лишь с применением подобного программного обеспечения. Однако даже самые мощные программные средства не в состоянии оказать полную поддержку при проведении анализа надежности СС. Решение данной проблемы может быть осуществлено путем разработки новых методов, программных средств, реализующих возможности этих методов, и технологии автоматизированного моделирования изучаемых объектов, основой которой являются разработанные методы.

При определении характеристик надежности сложной системы следует учитывать изменения, происходящие с каждым из компонентов, их взаимное влияние и влияние на систему. Наличие функциональных связей между компонентами системы позволяет выделить класс функционально-сложных систем, обладающих рядом особенностей, отличающих их от других объектов, а именно: вероятностным характером взаимодействия компонентов систем; наличием ограничений, определяющих допустимые границы изменения параметров компонентов и систем в целом; необходимостью корректирующих управляющих воздействий в процессе функционирования систем.

Вероятностный характер работы функционально-сложных систем обусловливает необходимость использования соответствующих методов, учитывающих особенности объекта исследования при оценке его надежности. Распространенным подходом к исследованию надежности функционально-сложных систем является использование метода имитационного моделирования, предполагающего проведение серий имитационных экспериментов и последующее усреднение полученных результатов [1]. Процедура Монте-Карло, применяемая в ходе имитации, позволяет учесть вероятностный характер составляющих ее компонентов и реализовать возможные траектории функционирования СС. При этом для получения аналитических зависимостей, описывающих изменение откликов системы в зависимости от изменения входных параметров, требуется проведение многочисленных имитационных экспериментов и использование методов регрессионного анализа. Полученные зависимости являются приближенными.

Большой класс задач надежности СС позволяют решать логико-вероятностные методы, которые с учетом структурного описания систем и определения критериев их функционирования предоставляют математический аппарат для исследования вероятностных характеристик систем [2–4]. Как показал анализ современного состояния разработок в этой области, проблема моделирования функционально-сложных систем состоит в недостаточной результативности логико-вероятностных методов при увеличении числа учитываемых параметров компонентов и изменении структуры системы в процессе ее эксплуатации.

Для исследования надежности функционально-сложных систем, учитывающего динамическое изменение характеристик компонентов систем и вероятностные процессы их взаимодействия в процессе функционирования систем, предлагаются метод вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) и программные средства его реализации, которые снимают ограничения логико-вероятностного метода и обладают преимуществами имитационного моделирования [5].

1. Формальное описание функционально-сложных систем

При исследовании надежности функционально-сложной системы с заданным уровнем выполнения предписанных ей функций должны быть решены задачи определения структурного состава образующих ее компонентов, установлены рабочие параметры компонентов, учтены процессы взаимного влияния и взаимодействия этих компонентов.

В случае если система имеет явно выраженную графовую структуру (транспортные сети, электротехнические системы), выбор состава компонентов системы не составляет труда. Им соответствуют реальные физические объекты. При этом функциональные связи между компонентами рассматриваемых систем не всегда очевидны и требуется математический аппарат, позволяющий обнаружить эти связи и описать их.

Кроме того, существует класс функционально-сложных систем (сложные механические, производственные), для оценки надежности которых необходимы методы умозрительного структурирования, позволяющие определить состав компонентов системы и описать их функциональные связи. В процессе формализации этих систем выбираются существенные и исключаются тривиальные связи, на основе чего определяется состав компонентов и функциональные зависимости между ними.

В обоих случаях предполагается, что система представляется совокупностью элементарных компонентов $K=\{K_i\},\ i=\overline{1,m}$. Компоненты характеризуются численными значениями совокупности параметров, которые изменяются в процессе функционирования системы и определяют множество состояний надежности компонентов $S=\{S_j\}, j=\overline{1,n}$. При исследовании механических систем число состояний определяет промежуточные уровни накопления повреждений, случайным образом влияющие на функционирование самого компонента, остальных компонентов и всей системы. При исследовании производственных процессов их состояния определяют успешность выполнения оборудованием заданных функций, обеспечивающих надежность организации производственного процесса в целом. Описание функционально-сложных систем допускает различное число состояний компонентов и системы в целом. Это соответствует приобретению системой некоторых новых свойств, которые не характерны для ее отдельных компонентов.

Надежное функционирование системы зависит от согласованной работы всех ее компонентов, которые в процессе эксплуатации могут изменять свои рабочие характеристики. Эти изменения определяются начальными состояниями компонентов, режимом функционирования системы и параметрами окружающей среды. Большое число и случайный характер различного вида воздействий на компоненты системы позволяют отнести процесс перехода компонента из состояния в состояние к стохастическим процессам, эволюция которых во времени управляется вероятностными законами.

Выбор в качестве прогнозирующей модели вероятностного изменения состояний компонентов дискретной цепи Маркова позволяет получить результаты заранее заданной точности, соответствующей обработанному экспериментально полученному материалу, на основании которого устанавливаются параметры моделирования. Полученные с ее использованием данные описывают динамическое изменение вероятностей нахождения компонентов K_i в каждом из состояний:

$$P^{it}=(p_1^{it},p_2^{it},...,p_n^{it}),\ \sum_{j=1}^{n}p_j^{it}=1,\ t=\overline{1,T}\,. \quad (1)$$

Связи между компонентами функционально-сложной системы задаются функциями $F = \left\{F_j\right\}, j = \overline{1,z}$, которые могут быть как детерминированными, так и вероятностными. В случае детерминированных функций состояния системы однозначно определяются состояниями ее исходных компонентов. При случайном характере взаимодействия компонентов используются вероятностные функции, позволяющие по установившимся состояниям исходных компонентов определить вектор возможных состояний системы и их вероятности.

Выделенные элементарные компоненты системы и функциональные связи между ними определяют исходную структуру графа системы, которая в процессе моделирования может быть модифицирована с учетом текущих изменений параметров надежности компонентов и всей системы.

Результатом ВАЛМ являются векторы вероятностей состояний, характеризующих изменения надежности системы во времени (P^{st}, $t = \overline{1,T}$). Они позволяют судить об изменении надежности системы в процессе эксплуатации, определять режим ее безотказного функционирования и стратегию динамического управления параметрами надежности компонентов.

Таким образом, в основу формализации функционально-сложных систем с целью вероятностно-алгебраического моделирования их надежности положен способ представления систем в виде графовых древовидных структур, отражающих связи между компонентами системы, которые представляются Марковскими моделями с дискретными состояниями.

Описание процесса работы функционально-сложной системы основано на использовании соответствующей вероятностно-алгебраической модели, отображающей функциональные связи между компонентами, учитывающей вероятностный характер происходящих изменений надежности компонентов и генерирующей управляющие воздействия на процесс моделирования в зависимости от особенностей работы системы.

2. Теоретическая основа метода вероятностно-алгебраического моделирования

Рассмотрим множество векторов $P = \left\{P^i\right\}$, $P^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_n^i)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1$. Операция *, определенная на этом множестве, порождает алгебру A*, т. е. для любых P^1 и P^2 выполняется $P^3 = P^1 * P^2$ и для операции справедливы законы дистрибутивности. Алгебра задается структурными коэффициентами a_{ij}^k, для которых выполняются условия

$$\forall i, j, k \;\; a_{ij}^k \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k = 1. \tag{2}$$

При этом элементы результирующего вектора P^3 вычисляются по формуле

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \tag{3}$$

где $i, j, k = \overline{1,n}$.

Алгебру, структурные коэффициенты которой удовлетворяют условию (2), будем называть стохастической [6], поскольку элементами ее представлений являются стохастические матрицы $M = \left\| m_{jk} \right\|$. Элементы матриц $M = \left\| m_{jk} \right\|$ определяются по формуле

$$m_{jk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^k p_i, \tag{4}$$

где a_{ij}^k – структурные коэффициенты алгебры; $p_i, i = \overline{1,n}$ – элементы вектора вероятностей P.

Частным случаем стохастических алгебр является алгебра A*, порожденная детерминированной операцией *. Такая операция задается функцией $F(i,j)$, а структурные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{ij}^k = 1, \text{ если } k = F(i,j); \\ a_{ij}^k = 0, \text{ если } k \neq F(i,j). \end{cases} \tag{5}$$

Использование n-арных функций, задающих операции на множестве векторов $P = \{P^i\}$, $P^i = (p_1^i, p_2^i, ..., p_n^i)$, $\sum_{j=1}^{n} p_j^i = 1$, порождает n-арные стохастические алгебры, отображающие n векторов из множества $P = \{P^i\}$ в вектор из этого же множества в соответствии с заданной операцией. Например, в случае тернарной операции формируются структурные коэффициенты алгебры a_{ijm}^k, а элементы результирующего вектора вероятностей вычисляются по формуле

$$p_k^4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{ijm}^k p_i^1 p_j^2 p_m^3 \ \forall i, j, m, k. \tag{6}$$

Вид стохастических матриц, являющихся элементами представлений стохастических алгебр, определяется операциями, порождающими алгебры.

Например, стохастические матрицы $M_{\max}$, полученные для стохастической алгебры $A\wedge$, порожденной операцией $F(i,j) = \max(i,j)$, имеют вид верхней треугольной матрицы, компоненты которой структурно связаны с исходным вектором вероятностей $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ следующим образом:

$$M_{\max} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & \sum_{i=1}^{2} p_i & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{3} p_i & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .. & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \sum_{i=1}^{n-1} p_i & p_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Для алгебры $A\vee$, порожденной операцией $F(i,j) = \min(i,j)$, стохастические матрицы $M_{\min}$ имеют вид

$$M_{\min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ p_1 & \sum_{i=2}^{n} p_i & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & \sum_{i=3}^{n} p_i & 0 & ... & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .. & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & \sum_{i=n-1}^{n} p_i & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Для алгебры $A\oplus$, порожденной операцией $F(i,j)=\min(i+j-1,n)$, стохастические матрицы также связаны с вектором вероятностей состояний исходного компонента $P=(p_1,p_2,...,p_n)$ и имеют вид

$$M_{sum}=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-2} & \sum_{i=n-1}^{n} p_i \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-3} & \sum_{i=n-2}^{n} p_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & p_1 & \sum_{i=2}^{n} p_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Свойство 1. Если функция $F(i,j)$, задающая операцию *, которая порождает алгебру A*, ассоциативна, то алгебра A* является ассоциативной, т. е. для любых трех ее элементов P^1, P^2 и P^3 выполняется $P^1*(P^2*P^3)=(P^1*P^2)*P^3$.

Свойство 2. Для ассоциативной алгебры A*, порожденной операцией *, и любых векторов P^1, P^2, P^3, которым соответствуют стохастические матрицы M_1, M_2 и M_3, где $P^3=P^1*P^2$, выполняется равенство $M_3=M_1\cdot M_2$, причем M_3 является стохастической матрицей такой же структуры, что и матрицы M_1 и M_2.

Таким образом, элементы представлений стохастических алгебр, порожденных соответственно операциями $F_1(i,j)=\max(i,j)$, $F_2(i,j)=\min(i,j)$ и $F_3(i,j)=\min(i+j-1,n)$, обладают свойством замкнутости относительно произведения, т. е. произведения стохастических матриц, порожденных функциями $F_l(i,j),\forall l=\overline{1,3}$, являются матрицами той же структуры, что и исходные стохастические матрицы. Поэтому для каждой из перечисленных операций получаем множества стохастических матриц, которые образуют полугруппу.

Стохастические матрицы $M_{\max}$, $M_{\min}$, M_{sum} задают элементы матриц переходов, определяющие параметры марковских моделей. Рассмотрение моделей, имеющих достаточно малое число параметров (n), делает их удобными для описания реальных стохастических процессов с дискретными состояниями и дискретным временем.

Рассмотрим стохастическую матрицу $M_{\max}$, порожденную операцией $F_1(i,j)=\max(i,j)$, структура которой описывается (7). Для такой матрицы существует и единственная матрица вида

$$M'_{\max}=\begin{pmatrix} p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 & \cdots & p'_{n-1} & p'_n \\ 0 & \sum_{i=1}^{2} p'_i & p'_3 & p'_4 & \cdots & p'_{n-1} & p'_n \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^{3} p'_i & p'_4 & \cdots & p'_{n-1} & p'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \sum_{i=1}^{n-1} p'_i & p'_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $p_1^{'} = \sqrt{p_1}$;

$$p_i^{'} = \sqrt{\sum_{j=1}^{i} p_j} - \sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} p_j}\ ,\ \ i = \overline{1,n}\ .$$

Легко убедиться, что $(M_{\max}^{'})^2 = M_{\max}$. Аналогичные рассуждения справедливы и для матрицы $M_{\min}$, порожденной операцией $F_2(i,j) = \min(i,j)$.

3. Программная система вероятностно-алгебраического моделирования

Программная система ВАЛМ, реализующая автоматическое построение моделей и расчеты вероятностных показателей надежности функционально-сложных систем, включает: подсистему формирования графа модели; библиотеку функций, определяющих отношения между компонентами; подсистему статического моделирования; подсистему управления процессом моделирования; информационную базу данных; подсистему визуализации результатов моделирования; подсистему анализа результатов моделирования и принятия решений; библиотеку типовых вероятностно-алгебраических моделей.

Подсистема формирования графа модели реализует операции, связанные с формированием графовой структуры модели, которая представляет собой дерево, позволяющее автоматически сформировать алгебраическую модель и определить уровни вложенности функций, определяющих связи между компонентами. Процедуры подсистемы формирования графа позволяют наглядно представить связи между выделенными компонентами системы; определить исходные параметры компонентов; установить уровни иерархии функциональных связей; обеспечить замещение функциональных связей между компонентами системы вероятностными вычислениями с использованием коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования; использовать эффективные алгоритмы обхода узлов при машинной реализации метода.

Библиотека функций включает параметризованные заготовки типовых детерминированных, вероятностных и n-арных функций, позволяющих описать отношения между компонентами проектируемой системы. Примерами детерминированных функций $F(i,j)$, позволяющих определить состояние системы k по состояниям i и j составляющих ее компонентов, могут быть $F_1(i,j) = \max(i,j)$, $F_2(i,j) = \min(i,j)$, $F_3(i,j) = \min(i+j-1,n)$, $F_4(i,j) = |i-j|$ и многие другие. При исследовании надежности систем с двумя состояниями (1 и 0), компоненты которых связаны функциями $F_1(i,j)$ и $F_2(i,j)$, получаем результаты логико-вероятностного моделирования [7].

Подсистема статического моделирования включает процедуры формирования алгебраической модели системы в символьном виде и ее автоматического преобразования в вероятностную форму, позволяющую реализовать одномоментное ВАЛМ на очередной итерации многошагового процесса моделирования системы.

Подсистема управления процессом моделирования предназначена для проведения динамического вероятностно-алгебраического моделирования, которое реализуется итерационно путем проведения статических вычислений на каждом шаге моделирования с учетом управляющих правил, отслеживающих моменты и последовательность возникновения критического уровня изменений компонентов, приводящих к различным последствиям на системном уровне.

Информационная база данных осуществляет взаимодействие структурных подсистем программной системы ВАЛМ. Она реализована универсальными программными средствами. В ней хранятся, обновляются и накапливаются данные моделирования по каждому компоненту и всей системе в целом.

Подсистема визуализации одновременно с процессом моделирования отображает полученные результаты. При этом автоматически формируются временные диаграммы и графики изменения надежности как отдельных компонентов, так и всей системы.

Подсистема анализа результатов моделирования и принятия решений включает набор процедур, реализующих традиционные методы принятия решений в многокритериальных задачах и позволяет провести статистическую обработку результатов моделирования в условиях неопределенности. Полученные данные анализируются в соответствии с заданным критерием надежности функционирования системы и позволяют сравнить варианты структуры системы, оценить динамические изменения надежности компонентов исследуемых систем.

Библиотека типовых вероятностно-алгебраических моделей включает параметризованные варианты моделей сложных систем из различных предметных областей, которые могут быть использованы как «заготовки» при исследовании надежности СС и требуют лишь задания исходной информации о параметрах компонентов и структуре исследуемой системы.

4. Реализация метода вероятностно-алгебраического моделирования при оценке надежности функционально-сложных систем

Принципиальным отличием вероятностно-алгебраического подхода от известных логико-вероятностных методов [7] является возможность рассмотрения систем с множеством состояний и использования различных операций, обеспечивающих описание сложных функциональных связей между компонентами системы.

Исходная идея метода ВАЛМ основана на двух положениях. Во-первых, всем компонентам исследуемой системы ставится в соответствие множество состояний надежности, каждое из которых характеризуется совокупностью значений параметров компонентов исследуемой системы и изменяется вероятностным образом. При этом вектору состояний компонента соответствует вектор, определяющий вероятности нахождения компонента в каждом состоянии. Во-вторых, между компонентами системы устанавливаются связи, которые могут быть формализованы в виде алгебраических функций, описывающих взаимодействие компонентов и определенным образом влияющих на надежность функционирования исследуемой системы. Набор функций задается с учетом особенностей исследуемых систем и решаемых задач.

Метод вероятностно-алгебраического моделирования надежности функционально-сложных систем реализуется следующей последовательностью этапов:

На *этапе 1* решаются задачи сбора и подготовки исходных данных для проведения ВАЛМ надежности системы. Этап включает три взаимосвязанных части:

1. На основе содержательного описания системы формируется множество ее элементарных компонентов $K = \{K_i\}$ и функциональных отношений (пространственных или временных) между этими компонентами $F = \{F_j\}$. Выделяются компоненты системы, характеристики которых наиболее существенным образом влияют на функционирование системы, изменяя вероятностные значения надежности и определяя некоторый уровень нарушения выполнения предписанных системе функций.

Разрабатывается графическая схема $G(F, K)$, определяющая структуру вероятностно-алгебраической модели исследуемой системы, где F обозначает множество вершин (детерминированные/вероятностные, бинарные/n-арные функции [5]), задающих связи между компонентами системы; K – множество ребер, соответствующих компонентам исследуемой системы и промежуточным результатам моделирования. Графическая схема имеет вид дерева, что обосновывается компактностью задания модели и ее широким практическим использованием для исследования надежности СС, и представляет собой строго формализованное отображение знаний о том, какие компоненты включает система и какие отношения между ними возникают в процессе ее функционирования.

2. С учетом особенностей функционирования выделенных компонентов системы разрабатываются модели, адекватно описывающие вероятностное поведение компонентов. При этом выбирается вид модели, определяются ее параметры и реализуется первичное вероятностное моделирование. Для описания вероятностного изменения надежности отдельными компонентами используются различные параметрические функции, параметром которых может быть время, состояния компонентов и системы в целом. В тех случаях когда не удается найти аналитический вид зависимости, описывающей вероятностное изменение надежности компонентов, выбирается одна из форм марковских моделей, отражающая особенности стохастического процесса изменения характеристик надежности. При этом строится марковский граф переходов в пространстве состояний, описывающих поведение компонента, и определяются соответствующие вероятности пребывания в состояниях.

В качестве моделей, описывающих случайные марковские процессы, могут быть выбраны стохастические матрицы, являющиеся элементами представлений стохастических алгебр. Параметры моделей определяются в результате алгоритмической обработки данных, полученных при проведении натурных экспериментов с компонентами исследуемых систем.

Предполагается, что матрицы переходов марковских моделей имеют вид (7). Это обеспечивает возможность нахождения матрицы $M^{/}_{\max}$, сохраняющей структуру модели и свойства ее параметров при уменьшении шага моделирования, что соответствует более детальному рассмотрению процесса изменения вероятностных характеристик компонента. В общем случае многократное применение формулы (10) обеспечивает получение значений инфинитезимальных вероятностей матриц перехода марковской модели для времени $t \in [1, T]$.

Выбор в качестве переходных матриц $M_{\max}$ или $M_{\min}$ позволяет получить параметры матриц переходов в любой момент времени $t \in [1, T]$. В связи с этим имеется возможность рассмотрения процесса непрерывного изменения надежности компонентами исследуемой системы в рамках веденного алгебраического аппарата.

С использованием построенных моделей реализуется первичное вероятностное моделирование, результатом которого является формирование множества векторов вероятностей (1), характеризующих непрерывное изменение надежности выделенными компонентами системы.

3. Исходя из анализа влияния надежности компонентов друг на друга и систему в целом устанавливаются управляющие правила. Смысловое содержание правил вида «если…, то…» определяется классификацией возможных состояний выделенных компонентов, фиксирующих определенный уровень изменений параметров и характеризующих надежность системы. Правила задают:

– изменение параметров работы одних компонентов в зависимости от произошедших изменений с другими компонентами и всей системой;

– изменение состава функций, задающих связи между компонентами в зависимости от текущего состояния системы;

– множества компонентов, функционирующих однотипно или тождественно.

Управляющее правило, например, может регулировать ситуацию, при которой математическое ожидание величины надежности компонента сравнивается с заданной величиной, определяющей критическое значение надежности выбранного компонента. В случае срабатывания такого правила будут сгенерированы корректирующие воздействия, обновляющие параметры контрольного компонента системы либо изменяющие параметры функционирования компонентов, зависимых от него во времени.

4. С учетом целей исследования задается критерий надежности функционирования системы, который устанавливает допустимые границы изменения контролируемых параметров системы, определяющих состояния надежности системы. Этот критерий представляет в общем виде тот режим работы системы, математическую модель которого необходимо построить для количественной оценки надежности системы в целом. Сложные многофункциональные системы обычно характеризуются не одним, а несколькими критериями, для каждого из которых строятся свои математические модели, организуется ВАЛМ, а далее используются процедуры выбора решения с учетом многих критериев.

На *этапе 2* осуществляется построение алгебраической формы модели, объединяющей модели компонентов системы и рассчитанные вероятностные показатели надежности компонентов соответственно в общесистемные модель и показатели. На этом этапе на основе графической схемы проектируемой системы $G\,(F, K)$ с использованием множества функций строится алгебраическая форма модели, которая в символьном виде записывается следующим образом:

$$Z = F_1(F_2(Y_1, Y_2, F_3(Y_3, Y_5), ..., F_z(Y_{m-1}, Y_m)), \qquad (11)$$

где $F = \{F_j\}, j = \overline{1, z}$, – множество функций, определяющих отношения между элементарными устройствами модели $Y = \{Y_i\}, i = \overline{1, m}$. Аргументами функций, описывающих взаимодействие компонентов, являются состояния компонентов, вероятностные значения которых задаются векторами вероятностей $P = \{P^i\}$, $i = \overline{1,n}$.

Построенная в символьном виде алгебраическая модель системы однозначно определяет вектор вероятностей состояний исследуемой системы в целом и задает последовательность алгебраических преобразований, учитывающих структуру вложенности используемых функций.

На *этапе 3* реализуется расчетная вероятностная форма модели системы. При этом автоматически осуществляется преобразование алгебраической модели в вероятностную форму, производящую расчеты вероятностных показателей надежности исследуемой системы:

$$P^{st} = P(\{P^{it}, Z\}, i = \overline{1,m}, t = \overline{1,T}), \tag{12}$$

где $P^{it} = (p_1^{it}, p_2^{it}, ..., p_n^{it})$ – векторы вероятностей состояний надежности компонентов системы;

$P^{st} = (p_1^{st}, p_2^{st}, ..., p_n^{st})$ – вектор вероятностей состояний надежности системы;

$Z = F_1(F_2(Y_1, Y_2,\ F_3(Y_3, Y_5), ..., F_z(Y_{m-1}, Y_m))$ – алгебраическая модель исследуемой системы.

Статически ВАЛМ реализуется путем последовательной свертки векторов вероятностей устройств модели с учетом уровня вложенности функций и коэффициентов вероятностно-алгебраического моделирования по формуле (3), где $P^1 = (p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1)$, $P^2 = (p_1^2, p_2^2, ..., p_n^2)$ и $P^3 = (p_1^3, p_2^3, ..., p_n^3)$ векторы вероятностей состояний устройств Y_1, Y_2 и Y_3, $Z = F(Y_1, Y_2)$.

Коэффициенты a_{ij}^k называются коэффициентами ВАЛМ. Они задаются с учетом функции, определяющей отношения между устройствами алгебраической модели, и удовлетворяют условию (2).

Если отношение между устройствами модели определяется детерминированной функцией, коэффициенты ВАЛМ определяются (5).

Динамическое ВАЛМ реализуется многошаговой итерационной процедурой, включающей статическое ВАЛМ на каждой итерации, соответствующее взаимодействию независимых компонентов, и динамическое управление, позволяющее учесть при моделировании эволюционную зависимость компонентов. При этом считается, что компоненты одномоментно функционируют независимо друг от друга и изменяют во времени свои параметры, которые корректируются в дискретные моменты времени, установленные в соответствии с выбранным шагом моделирования.

В процессе моделирования осуществляется контроль реализации вероятностно-алгебраической модели в пошаговом режиме через заданные интервалы времени, при котором просматривается множество управляющих правил, позволяющих повысить уровень адекватного описания исследуемой системы. На каждой итерации проверяются текущие вероятностные характеристики надежности системы на соответствие допустимым границам их изменения, обеспечивающим заданный уровень эффективного функционирования исследуемой системы.

В случае нахождения вероятностных характеристик в допустимых границах процесс моделирования продолжается. При нарушении допустимых пределов изменения вероятностных параметров надежности компонентов или всей системы генерируются управляющие воздействия, изменяющие параметры компонентов, модифицирующие структуру модели системы либо останавливающие ход моделирования. После корректирующих воздействий управляющей программы моделирования процесс имитации продолжается. При этом на каждом шаге моделирования производится запись полученных характеристик системы в информационную базу данных модели.

На *этапе 4* анализируются полученные результаты моделирования. К этому моменту в базе данных модели находится вариант рациональной структуры исследуемой системы с параметрами отдельных компонентов и всей системы, а также варианты его изменения в процессе функционирования, позволяющие обеспечить необходимый уровень надежности функционирования системы с учетом реализовавшихся изменений вероятностных параметров надежности компонентов.

Результирующие векторы вероятностей надежности системы (P^{st}, $t = \overline{1,T}$) позволяют судить об изменении надежности системы во времени. В процессе моделирования отслеживаются нарушения в функционировании системы, требующие определенных мер, корректирующих как работу отдельных компонентов, так и параметров их взаимодействия. При регистрации нарушения допустимых границ изменения надежности системы определяется компонент системы, вероятностные характеристики которого привели к общему нарушению работы системы. В случае наличия множества таких компонентов устанавливается степень влияния каждого на надежность системы в целом. Таким образом реализуется возможность установления причин снижения надежности функционирования системы.

Своевременное выявление нарушений в работе компонентов и реагирование на них путем изменения режима их работы, замены компонентов, корректирующих воздействий на работу остальных компонентов значительно повысят уровень доверия к моделям и обеспечат получение более точных результатов моделирования.

5. Пример исследования характеристик надежности механической системы

В соответствии с изложенным методом проведем анализ надежности механической системы, включающей два компонента – K_1 и K_2. В процессе функционирования системы каждый из компонентов подвергается кумулятивным повреждениям, т. е. необратимому накоплению механических повреждений. С течением времени повреждения начинают накапливаться и постепенно превышают нижнюю границу пределов износа, что неизбежно приводит к уменьшению надежности компонентов и в конечном итоге к их отказу. Наличие функциональной связи между этими компонентами делает систему сложной и отличает ее от простого набора частей.

Между компонентами системы имеет место силовое взаимодействие, обусловленное одновременным и совместным действием различных видов нагрузки. При этом повреждающие изменения накладываются и взаимодействуют. Это приводит к формированию комплексных повреждений системы, объем которых зависит от величины повреждений составных частей системы, а величина определяется некоторой функцией взаимодействия:

$$F_{vp} = F(SK_1, SK_2),$$

где SK_1 – уровень повреждений компонента K_1; SK_2 – уровень повреждений компонента K_2. При оценке надежности системы должны быть учтены как сами нагрузки, так и их взаимодействие.

Рассмотрение в отдельности процессов износа компонентов механической системы приведет к идеализации условий функционирования исследуемого объекта. Поэтому при моделировании системы в целом учитывается сложный процесс, включающий накопление повреждений компонентами и процесс их взаимного влияния.

Компоненты характеризуются множеством состояний, соответствующих определенному уровню износа. Рассматривается множество состояний компонентов $S = \{S_j\}, j = \overline{1,10}$, которые отражают степень накопления повреждения и имеют вероятностную природу. Предельное значение повреждения компонентов определяет состояние S_{10}. Когда предельные значения повреждений достигаются в одной или нескольких точках исследуемых компонентов, они переходят в состояние S_{10} и считаются «отказавшими».

Векторы вероятностей, характеризующие начальное состояние компонентов, имеют вид $P^{i0} = (1, 0, ..., 0)$, $i = 1, 2$. Для описания износа компонентов в процессе эксплуатации системы использовался вид модели, определяемый матрицей вида (7), с указанным числом состояний. Параметры моделей были рассчитаны по выборочным функциям, полученным в ходе испытаний компонентов и отражающим траектории изменения состояний компонентов.

В результате первичного моделирования работы компонентов K_1 и K_2 были получены векторы вероятностей, отражающие изменение состояний износа компонентов во времени, которые были сопоставлены с экспериментально полученными данными, характеризующими отказ компонентов в зависимости от циклов нагружения (рис.1).

В процессе функционирования системы в результате износа взаимодействующих компонентов происходит снижение надежности системы, которая также описывается множеством состояний $S=\{S_j\}$, $j=\overline{1,10}$. Предполагается, что состояние системы S_k определяется состояниями S_i и S_j компонентов в соответствии с функцией $k = F(i, j)$.

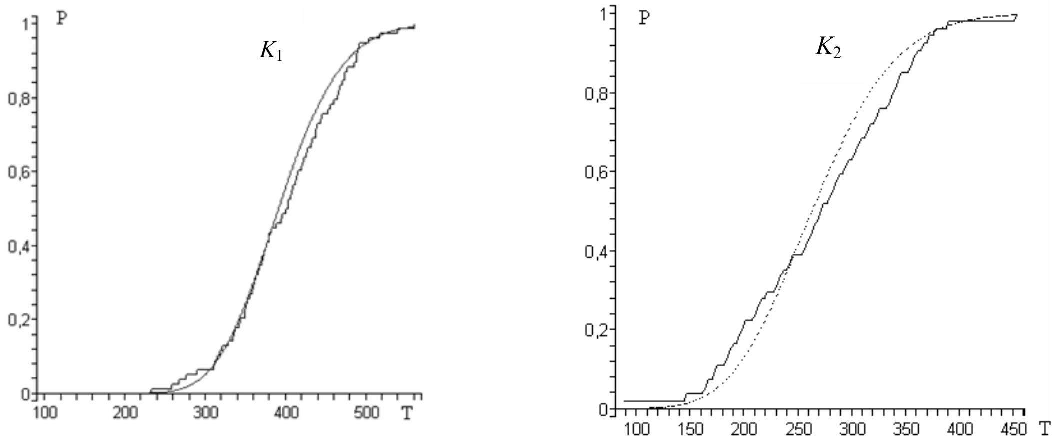

Рис. 1. Зависимости вероятностей отказа компонентов K_1 и K_2 от количества циклов нагружения, полученные экспериментально и с использованием моделирования

В процессе экспериментов с моделью были рассмотрены три варианта взаимодействия компонентов системы, которые описывались соответственно функциями $F_1(i, j)$, $F_2(i, j)$, $F_3(i, j)$ (рис. 2).

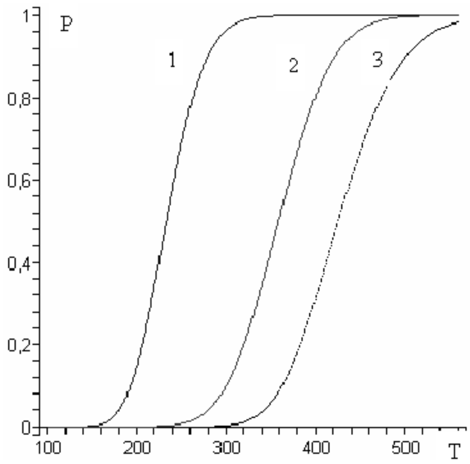

Рис. 2. Графики вероятностей отказа системы в зависимости от количества циклов нагружения при различных функциях взаимодействия компонентов системы: 1 – $F_3(i, j) = \min(i + j - 1, n)$; 2 – $F_1(i, j) = \max(i, j)$; 3 – $F_2(i, j) = \min(i, j)$

Функция $F_1(i, j) = \max(i, j)$ представляет вариант взаимодействия компонентов, при котором отказ системы определяется отказом одного из них, а ее состояние определяется состоянием наименее надежного компонента, задает операцию $\wedge$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\wedge$.

Функция $F_2(i, j) = \min(i, j)$ соответствует варианту взаимодействия компонентов, когда отказ системы происходит в результате отказа двух компонентов и ее состояние определяется состоянием наиболее надежного компонента, задает операцию $\vee$ и позволяет определить структурные коэффициенты алгебры $A\vee$.

Функция $F_3(i, j) = \min(i + j - 1, n)$ описывает случай, когда отказ системы определяется суммой повреждений ее компонентов, задает операцию $\oplus$ и определяет структурные коэффициенты алгебры $A\oplus$.

Вероятностный характер происходящих изменений в компонентах системы обусловливает вероятностный характер изменений параметров всей системы. Для сохранения приемлемой надежности системы анализируются изменения, происходящие с отдельными компонентами, оценивается их влияние на всю систему и выдаются рекомендации по замене отказавших компонентов. При этом ВАЛМ позволяет не только точно описывать экспериментальные данные процессов износа функционально-сложных систем с учетом изменяющейся нагрузки, но и прогнозировать поведение этих систем для предполагаемых данных.

Заключение

Разработанный метод ВАЛМ направлен на решение важной практической задачи оценки надежности функционально-сложных систем, состоящих из множества вероятностно изменяющихся компонентов с различными особенностями функционирования.

Метод моделирования ориентирован на случаи, когда динамику функционирования исследуемой системы можно описать с использованием множества моделей, отображающих структуру системы в виде дерева, учитывающих происходящие изменения с компонентами системы и использующих управляющую структуру, которая генерирует корректирующие воздействия, изменяющие параметры моделирования с учетом текущих значений результатов моделирования. Рассмотрение множества моделей компонентов позволяет учесть изменения вероятностных характеристик надежности компонентов системы. Использование различных операций дает возможность описать сложные функциональные зависимости между компонентами системы. Наконец, наличие управляющей структуры снимает ограничение независимости компонентов системы.

Применение ВАЛМ обеспечивает решение практических задач, связанных с проектированием компонентов, поддерживающих заданный уровень надежности функционирования систем, и обоснование выбора стратегии управления, оптимизирующей эксплуатацию функционально-сложных систем различных предметных областей.

Список литературы

1. Автоматизация этапов разработки и эксплуатации имитационных моделей транспортных систем / И.В. Максимей [и др.] // Проблемы программирования. – 2008. – № 4. – С. 104–111.

2. Рябинин, И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.

3. Можаев, А.С. Теоретические основы общего логико-вероятностного метода автоматизированного моделирования систем / А.С. Можаев, В.Н. Громов. – СПб. : Изд-во ВИТУ, 2000. – 145 с.

4. Соложенцев, Е.Д. Управление риском и эффективностью в экономике. Логико-вероятностный подход / Е.Д. Соложенцев. – СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009. – 270 с.

5. Сукач, Е.И. Вероятностно-алгебраический метод моделирования сложных систем / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, В.Н. Кулага // Материалы науч.-практ. конф. «Имитационное моделирование. Теория и практика. ИММОД-2009», Санкт-Петербург, 21–23 октября 2009 г. – СПб., 2009. – Т. 1. – С. 187–191.

6. Сукач, Е.И. Моделирование вероятностных характеристик сложных систем с использованием стохастических алгебр / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, В.Н. Кулага // V Междунар. конференция-форум «Информационные системы и технологии», Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 16–17 ноября 2009 г. – Минск : А.Н. Вараксин, 2009. – Ч. 1. – С. 178–181.

7. Сукач, Е.И. Расширение метода логико-вероятностного моделирования сложных систем / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, В.Н. Кулага // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах : тр. Междунар. науч. школы МА БР–2009, 7–11 июля 2009 г. – СПб. : ГУАП, 2009. – С. 471–476.

Поступила 11.05.10

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины,
Гомель, Советская, 104
e-mail: eisukach@gsu.by,
elena.sukach@mail.ru

E.I. Sukach

A METHOD FOR PROBABILISTIC-ALGEBRAIC MODELING THE RELIABILITY OF FUNCTIONALLY-COMPLEX SYSTEMS

A method for algebraic-probabilistic reliability modeling of functionally-complex systems is introduced. It is based on the usage of the algebraic approach for describing the relationship between the components of the systems and allows the transition to the modeling of a continuous process of change in system reliability as a result of changes in the probabilistic reliability of the components and the random nature of the interactions between them.