ISSN 1816-0301 (Print)
ISSN 2617-6963 (Online)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 539.3 Поступила в редакцию 05.04.2018
Received 05.04.2018

О. Л. Швед

*Объединенный институт проблем информатики
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА В УСЛОВИЯХ ТЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СКОРОСТЯХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Аннотация. Для обобщенного упругопластического материала Мурнагана рассмотрена задача определения скоростей левой меры упругих искажений и параметра роста упругой деформационной анизотропии при известных скоростях перемещений. Сформулированы определяющие уравнения в конечном виде для удельной потенциальной энергии упругой деформации и тензора напряжений Коши. Представлены дифференциальные определяющие уравнения при течении для потенциала напряжений, напряжений и параметров анизотропии. Рассмотрены три возможных случая, когда точка девиаторного сечения поверхности текучести будет регулярная или сингулярная. Получена система уравнений для определения скоростей правой меры упругих искажений и параметра роста упругой анизотропии. Ортогональным преобразованием с использованием собственно ортогонального тензора поворота, сопровождающего упругую деформацию, система сведена к системе уравнений для определения искомых неизвестных. При помощи средств символьных вычислений системы MathCAD 8 найдены необходимые аналитические представления величин для разрабатываемого комплекса программ на языке Фортран. Изложена процедура минимизации параметра роста упругой деформационной анизотропии. Получена программная реализация решения указанной задачи, которая является необходимым элементом системы численного моделирования для рассматриваемого материала.

Ключевые слова: упругопластический материал Мурнагана, определяющие уравнения, упругопластический процесс, условия течения, численное моделирование, комплекс программ

Для цитирования. Швед, О. Л. Вычисление изменения состояния упругопластического материала Мурнагана в условиях течения при известных скоростях перемещений / О. Л. Швед // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 4. – С. 59–70.

O. L. Shved

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

CALCULATION OF CHANGES IN STATE OF MURNAGHAN'S ELASTIC-PLASTIC MATERIAL UNDER CONDITIONS OF FLOW WITH KNOWN MOVEMENT SPEEDS

Abstract. For the generalized elastic-plastic material of Murnaghan, the problem of determining the velocities of the left measure of elastic distortions and the growth parameter of elastic deformation anisotropy at known displacement velocities is considered. The defining equations are formulated in a finite form for the specific potential energy of elastic deformation and the Cauchy stress tensor. Differential defining equations are presented for the stresses potential, stresses and anisotropy parameters. Three possible cases when the point of the deviator section of the yield surface will be regular or singular are considered. A system of equations for determining the velocities of the right-hand measure of elastic distortions and the growth parameter for elastic anisotropy is obtained. Using an orthogonal transformation with proper orthogonal rotation tensor that accompanies an elastic deformation, the system is reduced to a system of equations for determining unknown parameters. With the help of the symbolic calculation tools of the MathCAD 8 system, the necessary analytical representations of the values for the developed program complex in the FORTRAN language are found. The procedure for minimizing the growth parameter of elastic deformation anisotropy is described. A software implementation of the solution of this problem is obtained, which is an essential element of the numerical simulation system for the material under consideration.

Keywords: elastic-plastic material of Murnaghan, defining equations, elastic-plastic process, flow conditions, numerical modeling, complex of programs

For citation. Shved O. L. Calculation of changes in state of Murnaghan's elastic-plastic material under conditions of flow with known movement speeds. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 4, pp. 59–70.

Введение. Модель упругого материала Мурнагана [1, 2] обобщается на упругопластический материал [3]. Предполагается, что для неидеального материала активный процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний. Деформационный градиент заменяется неособенным тензором, и записываются определяющие уравнения в конечном виде. В дополнение к постулату Грина о существовании потенциала напряжений предполагается существование потенциала скорости напряжений, для которой однозначно находится объективная производная по времени. Эта производная получается модификацией производной Грина – Нахди [4], где спин тензора поворота, сопровождающего общую деформацию, заменяется спином тензора поворота, сопровождающего упругую деформацию. Определяется девиаторное сечение поверхности текучести в пространстве напряжений, и формулируются дифференциальные определяющие уравнения. Описывается отсутствующее в существующих теориях упругопластичности явление роста упругой деформационной анизотропии в пластическом состоянии (при течении), приводящей к возможному возникновению макротрещины.

Определяющие уравнения для неидеального материала в силу ослабления жесткого условия несжимаемости, вероятно, опишут проблемные течения при обработке металлов давлением, в которых, по словам А. Э. Треска, «материал течет подобно жидкости» [5–7].

Решается ряд известных проблем в области геометрически нелинейной упругопластичности [8]: определяется поверхность текучести, которая образуется своими девиаторными сечениями с учетом экспериментальных данных, однозначно находится объективная производная по времени, понятие пластической деформации не используется, нестандартно определяется момент разрушения в пластическом состоянии. Однако возникает новая проблема – решение краевой задачи для неидеального материала. В любом случае необходимым элементом системы численного моделирования будет решение на основе программной реализации рассматриваемой ниже задачи.

Разработка обобщенного материала Мурнагана выполнялась при последовательном усложнении вида упругой деформационной анизотропии: трансверсальная, ортотропная [9], моноклинная [10] и затем триклинная [3, 11–13]. При этом уточнялось дифференциальное определяющее уравнение для параметров анизотропии. Расчеты рассмотренных в данных работах примеров проводились с использованием экспериментальных комплексов программ для перечисленных видов анизотропии, разработанных по принципу от частного к общему. Число задействованных параметров анизотропии, частью которых пренебрегалось, для первых двух видов и третьего составляло соответственно 22 и 32 параметра. Для триклинной анизотропии полностью введены в рассмотрение все 77 параметров и установлено, что возможных ненулевых параметров для трансверсальной и ортотропной анизотропии будет 29, а для моноклинной – 45 [13]. Для одноосных нагружений изотропного материала найдены 12 нетривиальных ограничений на параметры в виде однородных линейных уравнений. Разработка программных модулей осуществляется по принципу от общего к частному. Поэтому требуется провести проверку и оптимизацию вычислительных процедур. Например, величина относительной части рассеиваемой удельной мощности деформации составила 0,65 % при растяжении и 1,68 % при сжатии, а величина параметра роста упругой анизотропии уменьшилась на почти три порядка [12]. Аналитическая проверка состоит в получении с помощью средств символьных вычислений точных соотношений для их программирования. Для численной проверки используется вычисление меры упругих искажений обращением закона Мурнагана.

Определяющие уравнения и постановка задачи. Подход Мурнагана заключается в представлении удельной потенциальной энергии упругой деформации (потенциала напряжений, имеющего смысл запасенной энергии) полиномом по степеням компонент тензора Коши – Грина $\mathbf{C} = 2^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$ [1, 2]. Удобно записать ее в следующем виде:

$$\text{э} = \text{э}_0 + \text{э}_{23} + c \quad (\text{э}_{23} = \text{э}_2 + \text{э}_3)\,; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{э}_0 = {} & 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3)I_1^2 + \\ & + (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3)I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3)I_1 I_2 + 12^{-1}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)I_1^3 + 2\nu_3 I_3); \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{э}_2 = {} & 4^{-1}(\sum \delta_i((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 - 1) + \sum (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)(\delta_{3+i}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{11+i}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{15+i}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \\ & + \delta_7(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_8((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) - 1) + \\ & + \delta_9((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) - 1) + \delta_{10}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) - 1) + \\ & + \delta_{19}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{20}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{21}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2); \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{э}_3 = {} & 8^{-1}(\sum \delta_{21+i}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^3 + 1) + \delta_{25}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{26}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \\ & + \delta_{27}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \delta_{28}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + \\ & + 1) + \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{31}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \times \\ & \times \sum \delta_{31+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2(\delta_{35}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{36}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2(\delta_{37}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{38}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \\ & + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2(\delta_{39}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{40}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \delta_{41}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \sum \delta_{39+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 + \\ & + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{40+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 + \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{41+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \sum \delta_{50+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \\ & + \delta_{54}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^3 + \delta_{55}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \delta_{56}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \sum \delta_{56+i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \times \\ & \times (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\delta_{60}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{61}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{62}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\delta_{63}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ & + \delta_{64}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{65}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\delta_{66}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{67}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{68}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \times \\ & \times \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{66+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{67+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1) + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \sum \delta_{68+3i}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр; $\text{э}_2, \text{э}_3$ – анизотропные структуры второй и третьей степени; c – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\text{э} \geq 0$; начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$, $j = \overline{1,77}$, $i = \overline{1,3}$ (в этом случае э с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал э_0 [3]); $\mathbf{G}$ – мера упругой деформации Коши – Грина; I_1, I_2, I_3 – первый, второй и третий главные инварианты меры $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_e$ и меры упругой деформации Фингера $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}$; λ, μ – постоянные Ляме второго и ν_1, ν_2, ν_3 – третьего порядков.

Используя теорему Гамильтона – Кэли $\mathbf{V}^3 = L_3\mathbf{E} - L_2\mathbf{V} + L_1\mathbf{V}^2$ ($\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}$) и соотношения $I_1 = L_1^2 - 2L_2$, $I_2 = L_2^2 - 2L_1L_3$, $I_3 = L_3^2$, $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{G}}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_k) = 2^{-1}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_k + \mathbf{c}_k\mathbf{c}_i)$, $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathbf{T}}, \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{C}_i = \mathbf{O}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O}$, $\mathbf{F}_e \cdot (\mathbf{c}_i\mathbf{c}_k + \mathbf{c}_k\mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_i\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k\mathbf{C}_i) \cdot \mathbf{V}$ $(i, k = \overline{1,3})$, из (1)–(4) находим определяющее уравнение для тензора напряжений Коши [1]:

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \text{э}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_0 + \Sigma\delta_j\mathbf{T}_j, \quad \mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \text{э}_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}, \quad \Sigma\delta_j\mathbf{T}_j = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \text{э}_{23}}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}; \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_0 = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0\mathbf{E} + \varphi_1\mathbf{F} + \varphi_2\mathbf{F}^2)\ (\varphi_0 = a_0 I_3, \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1), \\ & a_0 = 2^{-1}\nu_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3), \quad b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\ & b_2 = 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2), \quad b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3), \quad c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), \quad c_1 = -b_3; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}(\psi_0\mathbf{E}+\psi_1\mathbf{V}+\psi_2\mathbf{V}^2)\ (\psi_2 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + c_0(L_1^2 - L_2) + c_1(L_1^4 - 3L_1^2 L_2 + L_2^2 + 2L_1 L_3),$$
$$\psi_1 = c_0(L_3 - L_1 L_2) + c_1(-L_1^3 L_2 + L_1^2 L_3 - 2L_2 L_3 + 2L_1 L_2^2), \psi_0 = a_0 L_3^2 + c_0 L_1 L_3 + c_1 L_1 L_3 I_1); \tag{7}$$

$$\mathbf{T}_i = L_3^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V} \quad (i=1,\ 2,\ 3),$$
$$\mathbf{T}_{3+i} = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + 2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_7 = 2^{-1}L_3^{-1}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V},$$
$$\mathbf{T}_{11} = 2^{-1}L_3^{-1}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V},$$
$$\mathbf{T}_{15} = 2^{-1}L_3^{-1}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3)\cdot\mathbf{V},$$
$$\mathbf{T}_8 = 2^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_9 = 2^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{10} = 2^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{11+i} = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + 2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{15+i} = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V} + 2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{19} = 4^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{20} = 4^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{21} = 4^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{21+i} = 4^{-1}3L_3^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i - 1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}, \tag{8}$$
$$\mathbf{T}_{25} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{26} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{27} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{28} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{29} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{30} = 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{31} = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V} +$$
$$+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{31+i} = 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{35} = 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{36} = 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{37} = 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{38} = 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{39} = 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{40} = 4^{-1}L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{41} = 8^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} +$$
$$+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V} + \mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}),$$
$$\mathbf{T}_{39+3i} = 8^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)^2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V} + 4\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}),$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}_{40+3i} = 8^{-1} L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + 4\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{41+3i} = 8^{-1} L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V} + 4\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{50+i} = 4^{-1} L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{54} = 8^{-1} 3 L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{55} = 8^{-1} 3 L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{56} = 8^{-1} 3 L_3^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{56+i} = 4^{-1} L_3^{-1}((\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{60} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{61} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{62} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{63} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{64} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{65} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{66} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{67} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{68} = 4^{-1} L_3^{-1}(2^{-1}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V} +\\
+\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})),\\
\mathbf{T}_{66+3i} = 8^{-1} L_3^{-1}(2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} +\\
+(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{67+3i} = 8^{-1} L_3^{-1}(2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} +\\
+(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}),\\
\mathbf{T}_{68+3i} = 8^{-1} L_3^{-1}(2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} +\\
+(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}).
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Для тензора $\mathbf{T}_0$ можно использовать уравнение (6) или (7). Соотношения (1)–(8) являются определяющими уравнениями в конечном виде.

Запишем определяющие уравнения при течении для потенциала напряжений э, тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ и параметров анизотропии δ_j в дифференциальном виде для трех возможных случаев, когда точка девиаторного сечения поверхности текучести будет регулярная или сингулярная [3]. Оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ вводится как $\overset{\Omega}{\mathrm{dev}\mathbf{T}} = \mathrm{dev}\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega}\cdot\mathrm{dev}\mathbf{T} + \mathrm{dev}\mathbf{T}\cdot\mathbf{\Omega}$ – О-производная $\mathrm{dev}\,\mathbf{T}$, вычисленная по соотношению $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}_e$ при условии несжимаемости.

Случай 1. Пусть точка регулярная и выполняется условие $(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D} > 0)\wedge(\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{D} > 0)$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}(L_3^{-1}\text{э})^{\boldsymbol{\cdot}} = (1-\alpha_i)\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D},\ \ \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{NN}),\\ \dot{\delta}_j = \beta k_j\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_j\left\|\mathbf{T}_j\right\|^{-1}(\mathbf{T}_j \neq 0,\ \ \beta\to\min,\ \ \beta\geq 0,\ \ (k_j=\pm1)\vee(k_j=0)),\ \ \dot{\delta}_j = 0\ \ (\mathbf{T}_j = 0),\end{gathered} \tag{9}$$

где $\left\|\mathbf{T}_j\right\| = \sqrt{\mathbf{T}_j\cdot\cdot\mathbf{T}_j}$, K – достаточно малое положительное число (в вычислительных экспериментах выбиралось $K = 0{,}000\,001$), скаляр α_i ($i = 1, 2$) является относительной частью рассеиваемой удельной мощности деформации на одной из двух частей девиаторного сечения, девиатор $\mathbf{N}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности девиаторного сечения (при векторной интерпретации девиатора симметричного тензора), скаляр β характеризует скорость роста деформационной упругой анизотропии. Третье уравнение в (9) сохраняется в остальных случаях.

Случай 2. Пусть точка регулярная и выполняется условие $(\mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D}\leq 0)\wedge(\mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{D} > 0)$. Это особый случай, так как удельная мощность деформации становится неположительной. Тогда имеют место соотношения

$$(L_3^{-1}\text{э})^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{T}\cdot\cdot\mathbf{D},\ \ \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = (K+K_0)(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{NN}), \tag{10}$$

где $K_0 = K_0(\mathbf{D})$. Для определения K_0 в уравнениях (9) необходимо заменить $1-\alpha_i$ на 1, K на K_0, β на 0 и из системы уравнений (1)–(7), (9) найти K_0. Материал становится недиссипативным (10) и теряется потенциальность в скоростях напряжений.

Случай 3. Пусть точка сингулярная и выполняется условие $(\mathbf{N}_1\cdot\cdot\mathbf{D} > 0)\wedge(\mathbf{N}_2\cdot\cdot\mathbf{D} > 0)$. Тогда в третьем уравнении (9) величина $\mathbf{N}$ выбирается из двух векторов внешних нормалей к регулярным участкам поверхности сечения и для нее находится соответствующее α_i в первом уравнении [3]. Второе уравнение запишется как

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = 0. \tag{11}$$

Удобно дальше обозначить правые части первых и вторых дифференциальных уравнений во всех трех случаях символами E и $\mathbf{P}$:

$$\begin{gathered}E = (1-\alpha_i)\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{T},\ \ \mathbf{P} = K(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{NN});\quad E = \mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{T},\ \ \mathbf{P} = (K+K_0)(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\cdot\mathbf{NN});\\ E = (1-\alpha_i)\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{T},\ \ \mathbf{P} = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Постановка задачи. Предполагается, что известно напряженно-деформированное состояние материала и скорости перемещений $\mathbf{v}$ (следовательно, известны тензоры скорости деформаций $\mathbf{D}$, вихря $\mathbf{W}$ и упругого спина $\mathbf{\Omega}$ [3]). Требуется определить численно изменения состояния материала, а именно скорости правой $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$ или левой $\dot{\mathbf{U}}$ мер упругих искажений и скорость роста упругой анизотропии β.

Головная программа комплекса и основные подпрограммы. Рассмотрим процедуру формирования и решения системы уравнений. Вычисляя из (5)–(8) тензор $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$, из (1)–(4) скаляр $\dot{\text{э}}$ и умножая первое уравнение на $2^{-1}L_3$, а второе на L_3, с учетом (9)–(12) получаем систему уравнений относительно неизвестных $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$ и β:

$$\begin{gathered}-2^{-1}\dot{L}_3\mathbf{T}+\dot{\psi}_0\mathbf{E}+\dot{\psi}_1\mathbf{V}+\dot{\psi}_2\mathbf{F}+\psi_1\overset{\Omega}{\mathbf{V}}+\psi_2(\mathbf{V}\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{V}}+\overset{\Omega}{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{V})+\\+\sum_{j=1}^{77}\delta_j\,(2^{-1}\overset{\Omega}{L_3\mathbf{T}_j})+2^{-1}L_3\sum_{j=1}^{77}\dot{\delta}\mathbf{T}_j=2^{-1}L_3\mathbf{P};\end{gathered}\tag{13}$$

$$\begin{gathered}-\dot{L}_3L_3^{-1}\text{э}+2((\varphi_0+L_1L_3\varphi_2)\mathbf{F}\cdot\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{V}}+(\varphi_0L_2L_3^{-1}+\varphi_2L_3)\mathbf{E}\cdot\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{V}}+(-\varphi_0L_1L_3^{-1}+\varphi_1-\varphi_2L_2)\mathbf{V}\cdot\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{V}})+\\+\sum_{j=1}^{77}\delta_j\dot{\text{э}}_{23j}+\sum_{j=1}^{77}\dot{\delta}_j\text{э}_{23j}=L_3E.\end{gathered}\tag{14}$$

При выводе уравнения (14) используется теорема Гамильтона – Кэли и соотношения $\mathbf{T}_0=2^{-1}L_3\mathbf{F}\cdot\dfrac{\partial\text{э}_0}{\partial\mathbf{F}}$, $\dot{\text{э}}_0=\dfrac{\partial\text{э}_0}{\partial\mathbf{F}}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}=2^{-1}L_3\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}_0\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}=2^{-1}L_3\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{T}_0\cdot\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{F}}$ [1].

В пространстве напряжений, полученном ортогональным преобразованием тензора напряжений Коши $\mathbf{t}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$ ($\mathbf{O}$ – собственно ортогональный тензор упругого поворота), система уравнений (13), (14) запишется в более удобном виде относительно неизвестных $\dot{\mathbf{U}}$ и β:

$$\begin{gathered}-2^{-1}\dot{L}_3\mathbf{t}+\dot{\psi}_0\mathbf{E}+\dot{\psi}_1\mathbf{U}+\dot{\psi}_2\mathbf{G}+\psi_1\dot{\mathbf{U}}+\psi_2(\mathbf{U}\cdot\dot{\mathbf{U}}+\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U})+\sum_{j=1}^{77}\delta_j(2^{-1}L_3\mathbf{t}_j)^{\boldsymbol{\cdot}}+\\+2^{-1}L_3\sum_{j=1}^{77}\dot{\delta}\mathbf{t}_j=2^{-1}L_3\mathbf{p},\end{gathered}\tag{15}$$

$$\begin{gathered}-\dot{L}_3L_3^{-1}\text{э}+2((\varphi_0+L_1L_3\varphi_2)\mathbf{G}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}+(\varphi_0L_2L_3^{-1}+\varphi_2L_3)\mathbf{E}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}+(-\varphi_0L_1L_3^{-1}+\varphi_1-\varphi_2L_2)\mathbf{U}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}})+\\+\sum_{j=1}^{77}\delta_j\dot{\text{э}}_{23j}+\sum_{j=1}^{77}\dot{\delta}_j\text{э}_{23j}=L_3E.\end{gathered}\tag{16}$$

Инвариантные тензоры в (15), (16) связаны с индифферентными тензорами в (12)–(14) тем же ортогональным преобразованием: $\mathbf{U}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{G}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{q}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{n}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{N}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{t}_j=\mathbf{O}\cdot\mathbf{T}_j\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{d}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{p}=\mathbf{O}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$. Имеют место также соотношения $\dot{\mathbf{U}}=\mathbf{O}\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{V}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$, $\dot{\mathbf{t}}_j=\mathbf{O}\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{T}}_j\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$ и $\dot{\mathbf{t}}=\mathbf{O}\cdot\overset{\Omega}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{O}^{\mathbf{T}}$. Из первого соотношения можно найти тензор $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$.

Система уравнений для определения величины K_0 в (10) имеет, соответственно, вид

$$\begin{gathered}-2^{-1}\dot{L}_3\mathbf{t}+\dot{\psi}_0\mathbf{E}+\dot{\psi}_1\mathbf{U}+\dot{\psi}_2\mathbf{G}+\psi_1\dot{\mathbf{U}}+\psi_2(\mathbf{U}\cdot\dot{\mathbf{U}}+\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U})+\sum_{j=1}^{77}\delta_j(2^{-1}L_3\mathbf{t}_j)^{\boldsymbol{\cdot}}-\\-2^{-1}L_3K_0(\mathbf{q}-\mathbf{q}\cdot\cdot\mathbf{nn})=0,\\-\dot{L}_3L_3^{-1}\text{э}+2((\varphi_0+L_1L_3\varphi_2)\mathbf{G}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}+(\varphi_0L_2L_3^{-1}+\varphi_2L_3)\mathbf{E}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}}+(-\varphi_0L_1L_3^{-1}+\varphi_1-\varphi_2L_2)\mathbf{U}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}})+\\+\sum_{j=1}^{77}\delta_j\dot{\text{э}}_{23j}=L_3\mathbf{d}\cdot\cdot\mathbf{t}.\end{gathered}\tag{17}$$

Система уравнений (15), (16) сводится к системе семи линейных скалярных уравнений относительно неизвестных скалярных величин $\dot{U}_i \quad (i=\overline{1,6})$ и β. Матрицу системы обозначим через $M=(M_{ik})_{\substack{i=\overline{1,7}\\ k=\overline{1,7}}}$.

Запишем покомпонентные представления тензоров:

$$\mathbf{U}=U_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+U_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+U_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3+U_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+U_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+U_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$
$$\dot{\mathbf{U}}=\dot{U}_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+\dot{U}_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+\dot{U}_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3+\dot{U}_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+\dot{U}_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+\dot{U}_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$
$$\mathbf{G}=\mathbf{U}^2=G_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+G_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+G_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3+G_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)+G_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)+G_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2),$$
$$G_1=U_1^2+U_4^2+U_5^2,\;\; G_2=U_2^2+U_4^2+U_6^2,\;\; G_3=U_3^2+U_5^2+U_6^2,$$
$$G_4=U_4(U_1+U_2)+U_5U_6,\;\; G_5=U_5(U_1+U_3)+U_4U_6,\;\; G_6=U_6(U_2+U_3)+U_4U_5.$$

Отсюда получим

$$\begin{pmatrix}\dot{G}_1\\ \dot{G}_2\\ \dot{G}_3\\ \dot{G}_4\\ \dot{G}_5\\ \dot{G}_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2U_1 & 0 & 0 & 2U_4 & 2U_5 & 0\\ 0 & 2U_2 & 0 & 2U_4 & 0 & 2U_6\\ 0 & 0 & 2U_3 & 0 & 2U_5 & 2U_6\\ U_4 & U_4 & 0 & U_1+U_2 & U_6 & U_5\\ U_5 & 0 & U_5 & U_6 & U_1+U_3 & U_4\\ 0 & U_6 & U_6 & U_5 & U_4 & U_2+U_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\\ \dot{U}_3\\ \dot{U}_4\\ \dot{U}_5\\ \dot{U}_6\end{pmatrix}. \tag{18}$$

Вычисляя тензоры из соотношений (8), входящие в выражения для $\mathbf{t}_j=\mathbf{O}\cdot\mathbf{T}_j\cdot\mathbf{O}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{c}_n\mathbf{c}_n\cdot\mathbf{U}=\begin{pmatrix}B_{1n}\\ B_{2n}\\ B_{3n}\\ B_{4n}\\ B_{5n}\\ B_{6n}\end{pmatrix}(n=\overline{1,3}),\; \mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)\cdot\mathbf{U}=\begin{pmatrix}B_{14}\\ B_{24}\\ B_{34}\\ B_{44}\\ B_{54}\\ B_{64}\end{pmatrix},\; \mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)\cdot\mathbf{U}=\begin{pmatrix}B_{15}\\ B_{25}\\ B_{35}\\ B_{45}\\ B_{55}\\ B_{65}\end{pmatrix},\; \mathbf{U}\cdot(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)\cdot\mathbf{U}=\begin{pmatrix}B_{16}\\ B_{26}\\ B_{36}\\ B_{46}\\ B_{56}\\ B_{66}\end{pmatrix},$$

находим матрицу

$$B=(B_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,6}}}=\begin{pmatrix}U_1^2 & U_4^2 & U_5^2 & 2U_1U_4 & 2U_1U_5 & 2U_4U_5\\ U_4^2 & U_2^2 & U_6^2 & 2U_2U_4 & 2U_4U_6 & 2U_2U_6\\ U_5^2 & U_6^2 & U_3^2 & 2U_5U_6 & 2U_3U_5 & 2U_3U_6\\ U_1U_4 & U_2U_4 & U_5U_6 & U_4^2+U_1U_2 & U_4U_5+U_1U_6 & U_2U_5+U_4U_6\\ U_1U_5 & U_4U_6 & U_3U_5 & U_4U_5+U_1U_6 & U_5^2+U_1U_3 & U_3U_4+U_5U_6\\ U_4U_5 & U_2U_6 & U_3U_6 & U_2U_5+U_4U_6 & U_3U_4+U_5U_6 & U_6^2+U_2U_3\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Матрица B вычисляется подпрограммой E66. Наиболее громоздким в (15) является вычисление тензора $\sum_{j=1}^{77}\delta_j(2^{-1}L_3\mathbf{t}_j\dot{)}$, который представляется в виде двух сумм:

$$\sum_{j=1}^{77}\delta_j(2^{-1}L_3\mathbf{t}_j\dot{)}=\sum_{i=1}^{6}A_i(\dot{B}_{1i},\dot{B}_{2i},\dot{B}_{3i},\dot{B}_{4i},\dot{B}_{5i},\dot{B}_{6i})^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{6}\dot{A}_i(B_{1i},B_{2i},B_{3i},B_{4i},B_{5i},B_{6i})^{\mathrm{T}}. \quad (20)$$

Обозначим $G_{nn}=G_n-1,\ \ n=\overline{1,3}$. Шесть коэффициентов A_i в (20) находятся из соотношений (8):

$$\begin{aligned}
A_1&=2^{-1}(2^{-1}(2\delta_1G_{11}+\delta_8G_{22}+\delta_{10}G_{33}+\delta_4G_4+\delta_{12}G_5+\delta_{16}G_6)+\ldots),\\
A_2&=2^{-1}(2^{-1}(\delta_8G_{11}+2\delta_2G_{22}+\delta_9G_{33}+\delta_5G_4+\delta_{13}G_5+\delta_{17}G_6)+\ldots),\\
A_3&=2^{-1}(2^{-1}(\delta_{10}G_{11}+\delta_9G_{22}+2\delta_3G_{33}+\delta_6G_4+\delta_{14}G_5+\delta_{18}G_6)+\ldots),\\
A_4&=2^{-1}(4^{-1}(\delta_4G_{11}+\delta_5G_{22}+\delta_6G_{33}+2\delta_7G_4+\delta_{19}G_5+\delta_{20}G_6)+\ldots),\\
A_5&=2^{-1}(4^{-1}(\delta_{12}G_{11}+\delta_{13}G_{22}+\delta_{14}G_{33}+\delta_{19}G_4+2\delta_{11}G_5+\delta_{21}G_6)+\ldots),\\
A_6&=2^{-1}(4^{-1}(\delta_{16}G_{11}+\delta_{17}G_{22}+\delta_{18}G_{33}+\delta_{20}G_4+\delta_{21}G_5+2\delta_{15}G_6)+\ldots).
\end{aligned} \quad (21)$$

В (21) многоточия означают опущенные громоздкие выражения с величинами $\delta_j,\ \ j=\overline{22,77}$.

Первая сумма в равенстве (20) вычисляется с учетом соотношений (18), (19), (21):

$$\sum_{i=1}^{6}A_i\begin{pmatrix}\dot{B}_{1i}\\ \dot{B}_{2i}\\ \dot{B}_{3i}\\ \dot{B}_{4i}\\ \dot{B}_{5i}\\ \dot{B}_{6i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{11}&0&0&2P_{42}&2P_{53}&0\\ 0&P_{22}&0&2P_{41}&0&2P_{63}\\ 0&0&P_{33}&0&2P_{51}&2P_{62}\\ P_{41}&P_{42}&0&P_{44}&P_{63}&P_{53}\\ P_{51}&0&P_{53}&P_{62}&P_{55}&P_{42}\\ 0&P_{62}&P_{63}&P_{51}&P_{41}&P_{66}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\\ \dot{U}_3\\ \dot{U}_4\\ \dot{U}_5\\ \dot{U}_6\end{pmatrix}, \quad (22)$$

где ненулевые элементы матрицы в (22) имеют вид

$$\begin{gathered}
P_{11}=2(A_1U_1+A_4U_4+A_5U_5), P_{22}=2(A_2U_2+A_4U_4+A_6U_6),\\
P_{33}=2(A_3U_3+A_5U_5+A_6U_6),\ \ P_{44}=A_1U_1+A_2U_2+2A_4U_4+A_5U_5+A_6U_6,\\
P_{55}=A_1U_1+A_3U_3+A_4U_4+2A_5U_5+A_6U_6,\ \ P_{66}=A_2U_2+A_3U_3+A_4U_4+A_5U_5+2A_6U_6,\\
P_{41}=A_1U_4+A_4U_2+A_5U_6,\ \ P_{51}=A_1U_5+A_4U_6+A_5U_3,\ \ P_{42}=A_2U_4+A_4U_1+A_6U_5,\\
P_{62}=A_2U_6+A_4U_5+A_6U_3,\ \ P_{53}=A_3U_5+A_5U_1+A_6U_4,\ \ P_{63}=A_3U_6+A_5U_4+A_6U_2.
\end{gathered}$$

Соответствующая подпрограмма комплекса называется SAKO0.

Для вычисления второй суммы в равенстве (20) находим из (18), (19), (21)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}\dot{A}_i(B_{1i},B_{2i},B_{3i},B_{4i},B_{5i},B_{6i})^{\mathrm{T}}&=\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6}A_{ik}\dot{U}_k(B_{1i},B_{2i},B_{3i},B_{4i},B_{5i},B_{6i})^{\mathrm{T}}=\\
&=B\cdot A\cdot(\dot{U}_1,\dot{U}_2,\dot{U}_3,\dot{U}_4,\dot{U}_5,\dot{U}_6)^{\mathrm{T}}, A=(A_{ik})_{\substack{i=\overline{1,6}\\ k=\overline{1,6}}}.
\end{aligned} \quad (23)$$

Аналитическое громоздкое представление матрицы A в соотношении (23) получено с использованием системы MathCAD 8 и программно реализовано в виде подпрограмм SAKO1, SAKO2, SAKO3, SAKO4, SAKO5 и SAKO6 для вычисления шести строчек матрицы A. Матрица $B \cdot A$ вычисляется подпрограммой SAK, с помощью которой находится также выражение из (15):

$$-2^{-1}\dot{L}_3\mathbf{t}_0 + \dot{\psi}_0\mathbf{E} + \dot{\psi}_1\mathbf{U} + \dot{\psi}_2\mathbf{G} + \psi_1\dot{\mathbf{U}} + \psi_2(\mathbf{U}\cdot\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}).$$

Подпрограмма E55 вычисляет массив размерности (6×77). Эта процедура связана с определением величины $\sum_{j=1}^{77}\dot{\delta}_j\mathbf{t}_j$ в седьмом столбце матрицы M. Если столбец массива с номером j является нулевым с точностью до малого ε ($\|\mathbf{t}_j\| < \varepsilon$), то полагается $\dot{\delta}_j = 0$. Если столбец ненулевой, вычисляются коэффициенты $\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{t}_j\|\mathbf{t}_j\|^{-1} = \mathbf{N}\cdot\cdot\mathbf{T}_j\|\mathbf{T}_j\|^{-1}$ при β согласно третьему уравнению в (9).

Подпрограмма DTE вычисляет массив размерности (1×77) для нахождения элемента M_{77} матрицы M согласно формуле $\sum\dot{\delta}_j э_{23j}$. Величины $э_{23j}$ находятся по соотношениям (3), (4), а сумма $\sum\delta_j\dot{э}_{23j}$ вычисляется с использованием равенства (18). Элементы седьмой строчки матрицы M согласно выражению $-\dot{L}_3L_3^{-1}э + 2((\varphi_0 + L_1L_3\varphi_2)\mathbf{G}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}} + (\varphi_0L_2L_3^{-1} + \varphi_2L_3)\mathbf{E}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}} + (-\varphi_0L_1L_3^{-1} + \varphi_1 - \varphi_2L_2)\mathbf{U}\cdot\cdot\dot{\mathbf{U}})$ из выражения (16) вычисляются головной программой DFTAUP. Первое слагаемое в (16) находится после определения потенциала напряжений $э = э_0 + э_{23} + c$ подпрограммой ANERGI, которая сначала вычисляет зависящую от упругой анизотропии величину c при $\mathbf{G} = \mathbf{E}$. Правые части уравнений (15), (16) определяются входными данными в программе DFTAUP. Эти соотношения более громоздкие, чем вышеизложенные, и программная реализация их вычислений требует отдельного рассмотрения.

Решение системы $M\cdot(x_i)_{i=\overline{1,7}} = (d_i)_{i=\overline{1,7}}$ $(x_i = \dot{U}_i$ $(i = \overline{1,6})$, $x_7 = \beta)$ находим по методу Крамера. Считаем, что определитель системы $\Delta \neq 0$. Элементы седьмого столбца матрицы системы представляются в виде $M_{i7} = \sum_{j=1}^{77}F_{ij}k_j$. Скаляр $\mathbf{n}\cdot\cdot\mathbf{t}_j\|\mathbf{t}_j\|^{-1}$ входит в выражения для F_{ij}.

Обозначим D_{i7} – алгебраические дополнения элементов седьмого столбца, $\Delta_7 = \sum_{i=1}^{7}D_{i7}d_i$, $C_j = \sum_{i=1}^{7}D_{i7}F_{ij}$. Получаем

$$\Delta = \sum_{i=1}^{7}D_{i7}M_{i7} = \sum_{i=1}^{7}D_{i7}\sum_{j=1}^{77}F_{ij}k_j = \sum_{j=1}^{77}k_j(\sum_{i=1}^{7}D_{i7}F_{ij}) = \sum_{j=1}^{77}k_jC_j,\ \ \beta = \Delta_7\Delta^{-1}.$$

Если $\Delta_7 = 0$, то $\beta = 0$. Пусть $\Delta_7 \neq 0$, тогда

$$\beta = \Delta_7(\sum_{j=1}^{77}k_jC_j)^{-1} = (\sum_{j=1}^{77}k_j\Delta_7^{-1}C_j)^{-1}.$$

Полагаем $k_j = \mathrm{sign}(\Delta_7^{-1}C_j)$. Значение β получается положительным и минимальным по всем наборам k_j как и требуется в (9), а величина определителя системы будет максимальной по абсолютной величине, что гарантирует выполнение условия $\Delta \neq 0$.

После определения величины β система уравнений сводится к системе линейных уравнений шестого порядка в программе DFTAUP и остальные неизвестные находятся также по методу Крамера подпрограммой SUB6. Формирование и решение системы уравнений (17), которая применяется только для нахождения скаляра K_0, осуществляются аналогичным образом подпрограммой DFTAU с использованием подпрограмм SAKA, SAK и SUB6.

С целью проверки численного решения системы (15), (16) используются подпрограммы KOSI для вычисления тензора $\mathbf{T}$ по (5)–(8) и SAKON. Последняя подпрограмма выполняет обращение закона, т. е. вычисляет тензор $\mathbf{V}$ с использованием градиентного метода и подпрограмм KOSI, SAKO0, SAKO1, SAKO2, SAKO3, SAKO4, SAKO5 и SAKO6. Подпрограммы KOSI и SAKON можно применять и для вычисления тензоров $\mathbf{t}$ и $\mathbf{U}$. Процесс численного моделирования производится в квазистатическом режиме, т. е. малыми шагами по времени. После вычисления $\dot{\mathbf{U}}$ из (15) и (16) определяется новое значение $\mathbf{U}$. Из определяющего уравнения для $\dot{\mathbf{t}}$ определяется новое значение $\mathbf{t}$. Затем подпрограммой SAKON вычисляется другое новое значение $\mathbf{U}$. Проверка показала, что разность вычисленных значений $\mathbf{U}$ имеет допустимую погрешность. Отметим, что новое значение собственно ортогонального тензора поворота $\mathbf{O}$, сопровождающего упругую деформацию, определяется дифференциальным уравнением $\dot{\mathbf{O}} = -\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{O}$, которое решается методом рядов и реализуется подпрограммой ORT. Решения системы (15), (16) разработанным комплексом программ для одноосных и двухосных нагружений совпадают с решениями, полученными экспериментальным комплексом программ [12].

Заключение. Рассмотрены определяющие уравнения в конечном виде (1)–(8) и в дифференциальном виде при течении (9)–(11). Из них получены системы одного тензорного и одного скалярного уравнений (13)–(17) при известных скоростях перемещений. Система уравнений (15), (16) сведена к системе семи скалярных линейных уравнений с матрицей M относительно неизвестных шести компонент скорости левой меры упругих искажений и величины скорости роста упругой анизотропии. Представлены процедуры программной реализации формирования матрицы M с использованием соотношений (1)–(9) и решения системы уравнений на основе разработанных основных 16 программных модулей. Использованы также соотношения (18)–(23) и др. Изложена процедура минимизации скорости роста упругой анизотропии, и пояснена процедура решения системы при неположительной удельной мощности деформации. Как уже отмечено во введении, оптимизация величины β по всем возможным наборам k_j в (9) обеспечивает приемлемую устойчивость материала. Выполнена возможная проверка вычисления скорости левой меры упругих искажений. Полученные выше соотношения с использованием средств символьных вычислений обеспечивают достоверное определение величины β в рамках принятых модельных предположений.

Список использованных источников

1. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.

2. Murnaghan, F. D. Finite deformation of an elastic solid / F. D. Murnaghan. – N. Y. : Dover, 1951. – 140 p.

3. Швед, О. Л. Упругопластический материал Мурнагана / О. Л. Швед // Материалы X Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела, 18–22 сент. 2017 г., Самара, Россия. – Самара, 2017. – Т. 2. – С. 283–286.

4. Naghdi, P. M. A critical review of the state of finite plasticity / P. M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, no. 3. – P. 315–394.

5. Жилин, П. А. Основные уравнения теории неупругих сред / П. А. Жилин // Тр. XXVIII летней школы «Актуальные проблемы механики». – СПб., 2001. – С. 14–58.

6. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел : в 2 ч. Ч. 2. Конечные деформации / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 432 с.

7. Швед, О. Л. Математическое моделирование процесса прямого выдавливания свинца / О. Л. Швед, А. А. Абрамов // Информатика. – 2007. – № 4(16). – С. 133–136.

8. Поздеев, А. А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин. – М. : Наука, 1986. – 232 с.

9. Швед, О. Л. Численное моделирование эффекта увеличения пластичности металла при растяжении под действием высокого гидростатического давления / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-тэхн. навук. – 2014. – № 4. – С. 18–23.

10. Швед, О. Л. Критерий разрушения в модели моноклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-тэхн. навук. – 2015. – № 4. – С. 46–53.

11. Швед, О. Л. К вопросу описания явления «запирания» области высокого давления / О. Л. Швед // Сб. тр. IX Всерос. конф. по механике деформируемого твердого тела, 12–15 сент. 2016 г., Воронеж. – Воронеж, 2016. – С. 202–205.

12. Швед, О. Л. Выбор параметров определяющих уравнений при течении нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2017. – № 3. – С. 47–55.

13. Швед, О. Л. Учет упругой анизотропии триклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 89–97.

References

1. Lurie A. I. Nelinejnaja teorija uprugosti. *Nonlinear Theory Elasticity*. Moscow, Nauka, 1980, 512 p. (in Russian).

2. Murnaghan F. D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York, Dover, 1951, 140 p.

3. Shved O. L. Uprugoplasticheskij material Murnagana [Murnaghan's elastic-plastic material]. Materialy X Vserossijskoj konferencii po mehanike deformiruemogo tverdogo tela [*Proceedings of X All-Russian Conference on Solid Mechanics, 18–22 September 2017, Samara, Russia*]. Samara, 2017, vol. 2, pp. 283–286 (in Russian).

4. Naghdi P. M. A critical review of the state of finite plasticity. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physic*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 315–394.

5. Zhilin P. A. Osnovnye uravnenija teorii neuprugih sred [Basic equations theory of inelastic media]. Trudy XXVIII letnej shkoly «Aktual'nye problemy mehaniki» [*Proceedings of the XXVIII Summer School. Actual Problems of Mechanics*]. Saint Petersburg, 2001, pp. 14–58 (in Russian).

6. Bell J. F. Jeksperimental'nye osnovy mehaniki deformiruemyh tverdyh tel. Chast 2. Konechnye deformacii. *Experimental Foundations of Mechanics of Deformable Solids. Part 2. Finite deformations*. Moscow, Nauka, 1984, 432 p. (in Russian).

7. Shved O. L. Matematicheskoe modelirovanie processa prjamogo vydavlivanija svinca [Mathematical modeling of the process of direct extrusion of lead]. Informatika [*Informatics*], 2007, no. 4(16), pp. 133–136 (in Russian).

8. Pozdeev A. A. Bol'shie uprugoplasticheskie deformacii: teorija, algoritmy, prilozhenija. *Large Elastic-Plastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications*. Moscow, Nauka, 1986, 232 p. (in Russian).

9. Shved O. L. Chislennoe modelirovanie jeffekta uvelichenija plastichnosti metalla pri rastjazhenii pod dejstviem vysokogo gidrostaticheskogo davlenija [Numerical simulation of the effect of increasing the ductility of a metal under tension due to high hydrostatic pressure]. Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*], 2014, no. 4, pp. 18–23 (in Russian).

10. Shved O. L. Kriterij razrushenija v modeli monoklinnogo uprugoplasticheskogo materiala [Criterion of failure in the model of a monoclinic elastic-plastic material]. Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*], 2015, no. 4, pp. 46–53 (in Russian).

11. Shved O. L. K voprosu opisanija javlenija "zapiranija" oblasti vysokogo davlenija [On the question of describing the phenomenon of "blocking" high pressure area]. Sbornik trudov IX Vserossijskoj konferencii po mehanike deformiruemogo tverdogo tela [*Proceedings of the IX All-Russian Conference on Solid Mechanics, 12–15 September 2016, Voronezh*]. Voronezh, 2016, pp. 202–205 (in Russian).

12. Shved O. L. Vybor parametrov opredeljajushhih uravnenij pri techenii nelinejno uprugoplasticheskogo materiala [The choice of the parameters of the determining equations for the flow of a nonlinearly elastic-plastic material]. Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnych navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*], 2017, no. 3, pp. 47–55 (in Russian).

13. Shved O. L. Uchet uprugoj anizotropii triklinnogo uprugoplasticheskogo materiala [Allowance for elastic anisotropy of triclinic elastic-plastic material]. Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Matematics series*], 2017, no. 1, pp. 89–97 (in Russian).

Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории идентификации систем, Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: swed@newman.bas-net.by

Information about the author

Oleg L. Shved – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Leading Researcher, The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganova Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: swed@newman.bas-net.by