**ИНФОРМАТИКА**

**2009** **октябрь-декабрь** **№ 4**

*УДК 164:519.812*

**М.А. Маталыцкий, О.М. Китурко**

# О ПРИМЕНЕНИИ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДОХОДАМИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКИ

*Предлагается методика оценивания и прогнозирования ожидаемых доходов, площадей складских помещений субъектов логистических транспортных систем, основанная на применении сетей массового обслуживания с доходами. Для прогнозирования ожидаемых доходов и площадей складских помещений субъектов логистических транспортных систем используется новый класс сетей массового обслуживания – марковские НМ (Howard – Matalytski)-сети с доходами, причем в отличие от ранее проведенных исследований рассматривается случай, когда интенсивность поступающего в ЛТС потока автомобилей и интенсивности их обслуживания в субъектах зависят от времени.*

## Введение

Как известно [1], логистическая структура является системой, содержащей различные функциональные области: запасы, информацию, складирование и складскую обработку, транспортировку продукции и др. При этом главной задачей является минимизация затрат и максимизация прибылей производителей, потребителей, складов и т. д.

Логистические системы (ЛС) различаются по своей структуре, размерам предприятия, функциям, складскому хозяйству, транспортной модели и т. д. При разработке моделей ЛС учитываются число и размещение производственных единиц (предприятий, фирм), количество и размещение складов, транспортные модели, связь и информационные системы.

Как показал анализ, основным направлением логистики в сфере перевозок является маршрутизация. В этой области наметились три направления: совершенствование имеющихся алгоритмов, разработка новых экономико-математических моделей, которые лучше бы отражали продвижение материалопотока, слияние моделей маршрутизации с моделями таких функций логистики, как управление запасами.

Эффективность ЛС зависит от совершенствования и интенсивности не только промышленного и транспортного производства, но и складского хозяйства. Склады следует рассматривать не просто как устройства для хранения грузов, а как транспортно-складские комплексы, в которых процессы перемещения грузов играют важную роль. Работа этих комплексов носит динамический, стохастический характер ввиду неравномерности перевозок грузов.

Обычно в логистике используются экономические, экономико-математические и статистические методы для решения теоретических и практических задач. Потоки продукции, поступающей от производителей к получателям в случайные моменты времени, случайные длительности интервалов времени, необходимых для производства продукции, ее погрузки и разгрузки, нахождения на складах и продажи, предопределили необходимость использования методов теории массового обслуживания (МО) для разработки математических моделей, применяемых в логистике. В [1] описано применение марковских систем МО (СМО) при определении численности комплексной бригады транспортно-складских рабочих для погрузки груза по технологической схеме «склад – погрузчик – автомобиль».

Ясно, что если необходимо описать функционирование различных производителей, складов и потребителей некоторой ЛС как единую систему, то моделью такого функционирования может служить сеть МО, состоящая из различных СМО, соответствующих этим субъектам ЛС. Для логистических транспортных систем (ЛТС) важными являются задачи оценки и прогнозирования доходов их субъектов, получаемых от перевозки продукции различными видами транспорта между субъектами. Предположим, что в описываемую ЛТС входят $n$ субъектов $S_1$, $S_2$, …, $S_n$ (это могут быть заводы-производители, склады, получатели), между которыми осуществляется перевозка грузов. Перевозка продукции автомобилем от одного субъекта к другому приносит ему некоторый определенный доход, получаемый за счет реализованной продукции, а доход другого субъекта уменьшается на некоторую величину. При этом расходы на транспортировку (топливо, ремонт автомобиля), зарплату водителя могут быть отнесены как к первому, так и ко второму субъекту. Времена разгрузки-погрузки автомобилей в субъектах ЛТС и потоки автомобилей между ними случайны. Нужно оценить (спрогнозировать) ожидаемые (средние) доходы субъектов ЛТС от таких перевозок. Аналогичная ситуация возникает при оценке и прогнозировании доходов транспортного предприятия (ТП), осуществляющего перевозку грузов между субъектами. Перевозка груза от субъекта $S_i$ к субъекту $S_j$ приносит ТП некоторый, в общем случае случайный, доход, но при этом ТП несет материальные убытки. Для решения таких задач был введен в рассмотрение новый класс сетей МО: марковские сети с доходами, называемые в последнее время *HM*-сетями [2–4], которые можно использовать при прогнозировании доходов различных систем, не обязательно логистических [5].

### 1. Применение *HM*-сетей при прогнозировании ожидаемых доходов субъектов ЛТС

Обозначим через $k(t)=(k,t)=(k_1(t),k_2(t),...,k_n(t))$ вектор состояний ЛТС, где $k_i(t)$ – число автомобилей в пункте $S_i$ (находящихся в очереди и на разгрузке-погрузке) в момент времени $t$. Извне в ЛТС поступает простейший поток автомобилей с интенсивностью $\lambda(t)$. Будем считать, что интервалы времени разгрузки-погрузки автомобилей в $S_i$ распределены по экспоненциальному закону с параметром $\mu_i(k_i(t))$, $i=\overline{1,n}$. Это означает, что рассматриваемая экспоненциальная сеть, являющаяся моделью ЛТС, находится в состоянии $(k,t)$, где $k_i(t)$ – число заявок в СМО $S_i$ сети, $\mu_i(k_i(t))$ – интенсивность обслуживания заявок в этой СМО, $i=\overline{1,n}$.

Рассмотрим случай, когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени, а СМО сети являются однолинейными. Пусть $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система $S_i$ за время $t$, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $k$. Предположим, что функция $v_i(k,t)$ дифференцируема по *t*; $r_i(k)$ – доход системы $S_i$ в единицу времени, когда сеть находится в состоянии $k$; $r_{0i}(k+I_i,t)$ – доход системы $S_i$, когда сеть совершает переход из состояния $(k,t)$ в состояние $(k+I_i,t+\Delta t)$ за время $\Delta t$; $-R_{i0}(k-I_i,t)$ – доход этой системы, если сеть совершает переход из состояния $(k,t)$ в состояние $(k-I_i,t+\Delta t)$; $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$ – доход системы $S_i$ (расход или убыток системы $S_j$), когда сеть изменяет свое состояние из $(k,t)$ на $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ за время $\Delta t$, $i,j=\overline{1,n}$. Обозначим через $p_{ij}$ вероятность перехода заявок после обслуживания из системы $S_i$ в систему $S_j$, $i,j=\overline{0,n}$, считая $S_0$ внешней СМО рассматриваемой сети.

Пусть сеть находится в состоянии $(k,t)$. В течение интервала времени $\Delta t$ она может остаться в этом состоянии или перейти в состояния $(k-I_i,t+\Delta t)$, $(k+I_i,t+\Delta t)$, $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n}$. Если сеть остается в состоянии $(k,t+\Delta t)$, ожидаемый доход системы $S_i$ составит $r_i(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_i(k,t)$, который она получит за оставшиеся $t$ единиц времени. Вероятность такого события равна

$$1-\left(\lambda(t)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))\right)\Delta t+o(\Delta t),$$

где $u(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ – функция Хевисайда.

Если же сеть перейдет в состояние $(k+I_i,t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda(t)p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$, доход системы $S_i$ составит $\left[r_{0i}(k+I_i,t)+v_i(k+I_i,t)\right]$, а если в состояние $(k-I_i,t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$, доход этой системы составит $\left[-R_{i0}(k-I_i,t)+v_i(k-I_i,t)\right]$, $i=\overline{1,n}$. Аналогично, если сеть переходит из состояния $(k,t)$ в состояние $(k+I_i-I_j,t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$, она приносит системе $S_i$ доход в размере $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)$

плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k + I_i - I_j)$. Описанное выше сведем в табл. 1.

Таблица 1

Доходы системы $S_i$ сети в зависимости от переходов между ее состояниями

| Возможные переходы между состояниями сети | Вероятности переходов | Доходы системы $S_i$ от переходов между состояниями |
|---|---|---|
| $(k,t) \to (k,t+\Delta t)$ | $1-(\lambda(t)+$ $+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(k_j(t))u(k_j(t)))\Delta t + o(\Delta t)$ | $r_i(k)\Delta t + v_i(k,t)$ |
| $(k,t) \to (k+I_j, t+\Delta t)$, $j \neq i$ | $\lambda(t)p_{0j}\Delta t + o(\Delta t)$ | $r_i(k)\Delta t + v_i(k+I_j,t)$ |
| $(k,t) \to (k-I_j, t+\Delta t)$, $j \neq i$ | $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{j0}\Delta t + o(\Delta t)$ | $r_i(k)\Delta t + v_i(k-I_j,t)$ |
| $(k,t) \to$ $\to (k+I_c-I_s, t+\Delta t)$, $c,s \neq i$ | $\mu_s(k_s(t))u(k_s(t))p_{sc}\Delta t + o(\Delta t)$ | $r_i(k)\Delta t + v_i(k+I_c-I_s,t)$ |
| $(k,t) \to (k+I_i, t+\Delta t)$ | $\lambda(t)p_{0i}\Delta t + o(\Delta t)$ | $r_{0i}(k+I_i,t) + v_i(k+I_i,t)$ |
| $(k,t) \to (k-I_i, t+\Delta t)$ | $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t +$ $o(\Delta t)$ | $-R_{i0}(k-I_i,t) + v_i(k-I_i,t)$ |
| $(k,t) \to$ $\to (k+I_i-I_j, t+\Delta t)$, $j \neq i$ | $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t + o(\Delta t)$ | $r_{ij}(k+I_i-I_j,t)+$ $v_i(k+I_i-I_j,t)$ |
| $(k,t) \to$ $\to (k-I_i+I_j, t+\Delta t)$, $j \neq i$ | $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$ | $-r_{ji}(k-I_i+I_j,t)+$ $+v_i(k-I_i+I_j,t)$ |

Используя формулу полной вероятности для математического ожидания, для ожидаемого дохода системы $S_i$ можно получить систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ):

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt} = -\left[\lambda(t) + \sum_{j=1}^{n}\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))\right]v_i(k,t) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\lambda(t)p_{0j}v_i(k+I_j,t) + \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{j0}v_i(k-I_j,t)\right]+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}v_i(k+I_i-I_j,t) + \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}v_i(k-I_i+I_j,t)\right]+$$
$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left[\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}r_{ij}(k+I_i-I_j,t) - \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}r_{ji}(k-I_i+I_j,t)\right]+ \tag{1}$$
$$+\sum_{\substack{c,s=1\\ c,s\neq i}}^{n}\mu_s(k_s(t))p_{sc}v_i(k+I_c-I_s,t) + \lambda(t)p_{0i}r_{0i}(k+I_i,t) -$$
$$-\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}R_{i0}(k-I_i,t) + r_i(k).$$

Число уравнений в этой системе равно числу состояний сети.

Рассмотрим случай, когда интенсивности $\lambda(t)=\lambda$, $\mu_i(k_i(t))=\mu_i(k_i)$, $i=\overline{1,n}$, не зависят от времени. В этом случае для замкнутой сети система уравнений (1) может быть сведена к системе конечного числа линейных неоднородных обычных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами, которую в матричной форме можно записать в виде

$$\frac{dV_i(t)}{dt}=Q_i(t)+AV_i(t)\,, \tag{2}$$

где $V_i^T(t)=\left(v_i(1,t),v_i(2,t),...,v_i(l,t)\right)$ – искомый вектор доходов системы $S_i$; $l$ – число состояний сети. Решение системы (2) можно найти, используя прямой метод или метод преобразований Лапласа.

Рассмотрим подробнее оба метода. Для решения системы (1) прямым методом, умножив обе части системы (2) на $e^{-At}$, получим

$$e^{-At}V'(t)=e^{-At}AV(t)+e^{-At}Q_i(t)$$

или

$$e^{-At}\left(-AV(t)+V'(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(e^{-At}V(t)\right)=e^{-At}Q_i(t)\,,$$

откуда следует

$$e^{-At}V(t)=V(0)+\int_0^t e^{-A\tau}Q_i(\tau)d\tau\,,$$

т. е.

$$V(t)=e^{At}V(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Q_i(\tau)d\tau\,, \tag{3}$$

где $e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+...+\frac{A^mt^m}{m!}+...$ – матричная экспонента; $I$ – единичная матрица. Для нахождения матрицы $e^{At}$ необходимо найти собственные значения $q_1$, $q_2$, ..., $q_l$ матрицы $A$ и полную систему соответствующих им правых собственных векторов $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, …, $u^{(l)}$, если это возможно. Затем следует воспользоваться представлением

$$e^{At}=UB(t)U^{-1}, \tag{4}$$

где $U$ – матрица, столбцами которой являются собственные векторы $u^{(1)},u^{(2)},...,u^{(l)}$; $B(t)$ – диагональная матрица:

$$B(t)=\begin{pmatrix} e^{q_1t} & 0 & ... & 0\\ 0 & e^{q_2t} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & e^{q_lt}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для решения системы (2) методом преобразований Лапласа зададим вектор начальных условий $V_i(0)$. Пусть $U_i(s)$ – вектор преобразований Лапласа доходов $v_i(j,t)$, $i=\overline{1,l}$; $G_i(s)$ – преобразование Лапласа $Q_i(t)$. Тогда $sU_i(s)-V_i(0)=G_i(s)+AU_i(s)$ или $(sI-A)U_i(s)=$ $=G_i(s)+V_i(0)$. Отсюда находим

$$U_i(s)=(sI-A)^{-1}G_i(s)+(sI-A)^{-1}V_i(0)\,. \tag{6}$$

Вектор доходов $V_i(t)$ может быть найден при помощи обратного преобразования для (6). Если $W(t)$ – обратное преобразование Лапласа матрицы $(sI - A)^{-1}$, обратное преобразование Лапласа переводит соотношение (6) в (7):

$$V_i(t) = W(t) * Q_i(t) + W(t)\, V_i(0)\,,\ i = \overline{1,n}\,, \tag{7}$$

где $W(t) * Q_i(t) = \int\limits_0^t W(u) Q_i(t-u) du$. В случае когда доходы от переходов между состояниями сети являются детерминированными величинами, зависящими от состояний сети, система уравнений (1) будет выглядеть как $\dfrac{dV_i(t)}{dt} = Q_i + AV_i(t)$, а ее решение $V_i(t) = W(t)(Q_i + V_i(0))$, $i = \overline{1,n}$. Однако не следует забывать, что число состояний замкнутой сети МО равно $l = C_{n+K-1}^{n-1}$, где $K$ – число заявок, обслуживающихся в сети, и оно является довольно большим при относительно небольших $n$ и $K$, т. е. число уравнений в системе (2) будет также достаточно большим. Опыт показал, что такими методами можно производить расчеты для сетей с относительно небольшим пространством состояний ($l < 100$); прямым методом это можно сделать для сетей большей размерности, чем методом преобразований Лапласа.

### 2. Анализ модели транспортировки товара

Рассмотрим замкнутую марковскую *HM*-сеть с однотипными заявками, состоящую из $M = n + m_1 + ... + m_{n-1}$ систем обслуживания $S_i$, $i = 1,...n, 1_1,...,1_{m_1},...,(n-1)_1,...,(n-1)_{m_{(n-1)}}$, которая является моделью транспортировки некоторого товара (рис. 1). В данной модели система $S_n$ – это «транспортное предприятие», а под системами $S_1$, $S_2$, …, $S_{n-1}$ будем понимать «склады грузоотправителей», на которых хранится некоторый товар; $S_{i_1}$, $S_{i_2}$, …, $S_{i_{m_i}}$ – «грузополучатели» (их склады, пункты реализации товара, который поступил из склада $S_i$, $i = \overline{1,(n-1)}$). В зависимости от выбранного транспортного средства могут быть различными расходы, а следовательно, и переходы из ТП $S_n$ к конкретному «складу грузоотправителя» $S_1$, $S_2$, …, $S_{n-1}$. При этом под заявкой понимается перемещение транспортного средства предприятия из одной системы в другую с целью перевозки товара в логистической системе «транспортное предприятие – склад грузоотправителя – грузополучатели».

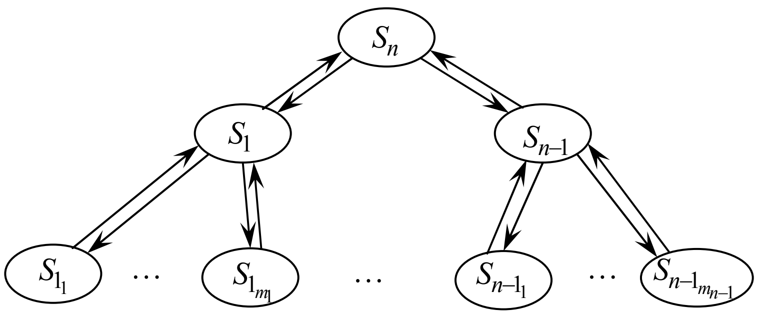


Рис. 1. Сетевая модель транспортировки товара

Введем некоторые множества: $X_i = \{i_1, i_2, ..., i_{m_i}\}$, $i = \overline{1,(n-1)}$; $X_0 = \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i$; $X = \{1,2,...,n\} \bigcup X_0$. Под состоянием сети в момент времени $t$ будем понимать вектор $(k,t) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, ..., k_{1_1}, ..., k_{1_{m_1}}, ..., k_{(n-1)_1}, ..., k_{(n-1)_{m(n-1)}}, t)$, где $k_i$ – число заявок в системе $S_i$ в момент времени $t$, $i \in X$. Число состояний сети равно $l = C_{M+K-1}^{M-1}$, где $K$ – число заявок в сети.

Пусть $v_i(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система $S_i$ за время $t$, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии $k$; $r_{ij}(k,t)$ – доход системы $S_i$, а также соответственно расход или убыток системы $S_j$ за время $\Delta t$, если сеть совершает переход за это время в состояние $(k, t+\Delta t)$; $r_i(k)$ – доход системы $S_i$ (у. е.) в единицу времени, когда сеть находится в состоянии $k$, $i, j \in X$.

Будем рассматривать случай, когда параметры обслуживания заявок в СМО сети зависят только от времени, т. е. если в момент времени $t$ на обслуживании в $i$-й СМО находится заявка, то в интервале $[t, t+\Delta t)$ ее обслуживание закончится с вероятностью $\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i \in X$.

Пусть *НМ*-сеть находится в состоянии $(k,t)$. Предположим, что система $S_n$ получает доход в размере $r_n(k)$ у. е. за единицу времени в течение всего периода пребывания сети в состоянии $k$. Если она остается в состоянии $(k,t)$ в течение интервала времени $\Delta t$, ожидаемый доход системы $S_n$ составит $r_n(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_n(k,t)$, который она принесет за оставшиеся $t$ единиц времени. Вероятность такого события равна $1 - \sum_{j \in X} \mu_j(t) u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$. Когда сеть за время $\Delta t$ совершает переход из состояния $(k,t)$ в состояние $(k - I_j + I_n, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(t) u(k_j) p_{jn} \Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе $S_n$ убыток в размере $r_{jn}(k - I_j + I_n, t)$ и ожидаемый доход системы $S_n$ составит $-r_{jn}(k - I_j + I_n, t)$ плюс ожидаемый доход $v_n(k - I_j + I_n, t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k - I_j + I_n)$, $j = \overline{1, n-1}$. При данном переходе происходит возврат транспортного средства (ТС) на территорию компании, а это, в свою очередь, означает, что система $S_n$ имеет убытки. Аналогично, когда сеть совершает переход из состояния $(k,t)$ в состояние $(k + I_j - I_n, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_n(t) u(k_n) p_{nj} \Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе $S_n$ доход в размере $r_{nj}(k - I_n + I_j, t)$, т. е. происходит перемещение ТС в систему «склад грузоотправителя», и, следовательно, рассматриваемая система $S_n$ получает доход, оплачиваемый данным складом. Ожидаемый доход системы «ТП» составит $r_{nj}(k - I_n + I_j, t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k + I_j - I_n)$, $j = \overline{1, n-1}$. Когда сеть за время $\Delta t$ совершает переход из состояния $(k,t)$ в состояние $(k + I_c - I_s, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_s(t) u(k_s) p_{sc} \Delta t + o(\Delta t)$, ожидаемый доход системы $S_n$ составит $r_n(k)\Delta t$ за время $\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_n(k + I_c - I_s, t)$, который будет получен ею за оставшееся время $t$, если бы начальным состоянием сети было $(k + I_c - I_s)$, $s = \overline{1, n-1}$, $c = s_1, s_2, ..., s_{m_s}$.

Тогда для ожидаемого дохода системы $S_n$ можно записать систему РДУ типа (1):

$$\frac{dv_n(k,t)}{dt} = r_n(k) - v_n(k,t)\sum_{j\in X}\mu_j(t)u(k_j) + \sum_{j=1}^{n-1}\mu_n(t)u(k_n)p_{nj}\Big(r_{nj}(k - I_n + I_j,t) +$$

$$+ v_n(k - I_n + I_j,t)\Big) + \sum_{j=1}^{n-1}\mu_j(t)u(k_j)p_{jn}\Big(v_n(k + I_n - I_j,t) - r_{jn}(k + I_n - I_j,t)\Big) + \quad (8)$$

$$+ \sum_{\substack{s=1,n-1 \\ c=s_1,s_2,\dots,s_{m_s}}}\mu_s(t)u(k_s)p_{sc}v_n(k - I_s + I_c,t) + \sum_{\substack{s=1,n-1 \\ c=s_1,s_2,\dots,s_{m_s}}}\mu_c(t)u(k_c)v_n(k + I_s - I_c,t).$$

Систему (8), в свою очередь, можно свести к системе конечного числа неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Переобозначим состояния сети последовательно $1,\ 2,\ \dots,\ l$. Заметим, что систему уравнений (8) можно представить в матричном виде:

$$\frac{dV_n(t)}{dt} = Q_n(t) + A(t)V_n(t). \quad (9)$$

Решить систему уравнений вида (9) можно с помощью пакета Mathematica 5.1.

***Пример 1.*** Рассмотрим функционирование конкретного ТП, которое занимается перевозкой товаров. Основным видом деятельности ЧТУП «Дежиц Я.Ю.» (Гродно) является автомобильный грузовой транспорт. На предприятии в наличии имеется несколько тягачей-рефрижераторов до 22 т. Большинством перевозимых грузов являются продукты питания, скоропортящаяся продукция, а также товар, для перевозки которого требуется специальный температурный режим. Свои услуги предприятие оказывает десяткам различных организаций, среди них ЧУТЭП «Карат-Экспедиция», ОДО «Доминикастрой», ОДО «Фирма АВС», ООО «Леминвест» и др.

При анализе статистических данных предприятия, полученных исходя из данных по путевым листам, количеству заказчиков и заявок на выполнение рейсов за 2009 г., были найдены соответствующие интенсивности обслуживания (табл. 2). Под интенсивностью обслуживания понимается количество выездов транспортных средств ЧТУП «Дежиц Я.Ю.» на выполнение соответствующих рейсов в единицу времени (за месяц).

Таблица 2

Данные по выполненным рейсам ЧТУП «Дежиц Я.Ю.»

| Период | Интенсивности обслуживания | Период | Интенсивности обслуживания |
|---|---|---|---|
| Январь | 8 | Июль | 4 |
| Февраль | 7 | Август | 4 |
| Март | 10 | Сентябрь | 6 |
| Апрель | 8 | Октябрь | 13 |
| Май | 6 | Ноябрь | 7 |
| Июнь | 5 | Декабрь | 5 |

Используя программный продукт Advanced Grapher 2.2 [6] и статистические данные ЧТУП «Дежиц Я.Ю.», была найдена наилучшая аппроксимирующая функция для интенсивности обслуживания заявок, проходящая через точки, которые указаны в табл. 2:

$$\mu_n(t) = 3{,}671\cdot 10^{-4}t^8 - 0{,}019t^7 + 0{,}397t^6 - 4{,}55t^5 + 30{,}534t^4 - \\ -121{,}47t^3 + 274{,}763t^2 - 314{,}882t + 143{,}25. \quad (10)$$

Опишем, как можно использовать рассмотренную выше методику при прогнозировании доходов ТП. Пусть, например, $M=3$, $K=4$, $\mu_1=5{,}0$, $\mu_{1_1}=1{,}5$, $\mu_2(t)$ имеет вид (10). Схема перевозок показана на рис. 2.

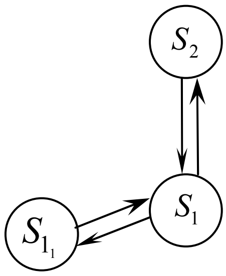


Рис. 2. Схема транспортировки товара при трех системах обслуживания

Под системой «склад грузоотправителя» будем подразумевать склад некоторого грузоотправителя, например ОДО «Фирма АВС», компании «Балтика» (на рис. 2 это система $S_1$), а под «грузополучателем» – склад некоторого грузополучателя, например фирмы «НП-Сервис», ООО «Евроопт» и других предприятий (на рис. 2 это система $S_{1_1}$), система $S_2$ – это само ТП.

Предположим, что доходы от переходов между состояниями не зависят от состояний и времени. Матрицы вероятностей переходов заявок между СМО сети и одношаговых доходов при переходе заявок между СМО имеют соответственно вид

$$P=\left\|p_{ij}\right\|_{3\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ R=\left\|r_{ij}\right\|_{3\times 3}=\begin{pmatrix}3 & 1{,}2 & 3{,}2\\ 1{,}8 & 5{,}1 & 0\\ 0 & 2{,}5 & 1{,}9\end{pmatrix}.$$

Поскольку сеть замкнута, число ее состояний $l=C_{3+4-1}^{3-1}=15$.

Зададим вектор начальных состояний $V(0)=(0,0,...,0)$. Вектор состояний имеет вид $(k,t)=(k_1,k_2,K-k_1-k_2)$. Состояниями рассматриваемой сети будут $(4,0,0)$, $(3,1,0)$, $(3,0,1)$, $(2,2,0)$, $(2,1,1)$, $(2,0,2)$, $(1,3,0)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,0,3)$, $(0,4,0)$, $(0,3,1)$, $(0,2,2)$, $(0,1,3)$, $(0,0,4)$. Переобозначим их соответственно 1, …, 15. В данном случае система уравнений (8) принимает вид

$$\frac{dv_2(1,t)}{dt}=-5v_2(1,t)+2v_2(2,t)+3v_2(3,t)+2{,}7\,;$$

$$\frac{dv_2(2,t)}{dt}=\mu_2(t)v_2(1,t)-(5+\mu_2(t))v_2(2,t)+2v_2(4,t)+3v_2(5,t)+1{,}8\mu_2(t)+2{,}7\,;$$

$$\frac{dv_2(3,t)}{dt}=1{,}5v_2(1,t)-6{,}5v_2(3,t)+2v_2(5,t)+3v_2(6,t)+2{,}7\,;$$

$$\frac{dv_2(4,t)}{dt}=\mu_2(t)v_2(2,t)-(5+\mu_2(t))v_2(4,t)+2v_2(7,t)+3v_2(8,t)+1{,}8\mu_2(t)+2{,}7\,;$$

$$\frac{dv_2(5,t)}{dt}=1{,}5v_2(2,t)+\mu_2(t)v_2(3,t)-(6{,}5+\mu_2(t))v_2(5,t)+2v_2(8,t)+3v_2(9,t)+1{,}8\mu_2(t)+2{,}7\,;$$

$$\frac{dv_2(6,t)}{dt}=1{,}5v_2(3,t)-6{,}5v_2(6,t)+2v_2(9,t)+3v_2(10,t)+2{,}7\,;$$

$$\frac{dv_2(7,t)}{dt} = \mu_2(t)v_2(4,t) - (5+\mu_2(t))v_2(7,t) + 2v_2(11,t) + 3v_2(12,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 2{,}7 ;$$

$$\frac{dv_2(8,t)}{dt} = 1{,}5v_2(4,t) + \mu_2(t)v_2(5,t) - (6{,}5+\mu_2(t))v_2(8,t) + 2v_2(12,t) + 3v_2(13,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 2{,}7 ;$$

$$\frac{dv_2(9,t)}{dt} = 1{,}5v_2(5,t) + \mu_2(t)v_2(6,t) - (6{,}5+\mu_2(t))v_2(9,t) + 2v_2(13,t) + 3\cdot v_2(14,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 2{,}7 ;$$

$$\frac{dv_2(10,t)}{dt} = 1{,}5v_2(6,t) - 6{,}5v_2(10,t) + 2v_2(14,t) + 3v_2(15,t) + 2{,}7 ;$$

$$\frac{dv_2(11,t)}{dt} = \mu_2(t)v_2(7,t) - \mu_2(t)v_2(11,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 5{,}1 ;$$

$$\frac{dv_2(12,t)}{dt} = 1{,}5v_2(7,t) + \mu_2(t)v_2(8,t) - (\mu_2(t)+1{,}5)v_2(12,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 5{,}1 ;$$

$$\frac{dv_2(13,t)}{dt} = 1{,}5v_2(8,t) + \mu_2(t)v_2(9,t) - (\mu_2(t)+1{,}5)v_2(13,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 5{,}1 ;$$

$$\frac{dv_2(14,t)}{dt} = 1{,}5v_2(9,t) + \mu_2(t)v_2(10,t) - (\mu_2(t)+1{,}5)v_2(14,t) + 1{,}8\mu_2(t) + 5{,}1 ;$$

$$\frac{dv_2(15,t)}{dt} = 1{,}5v_2(10,t) - 1{,}5v_2(15,t) + 5{,}1 .$$

Изменение дохода системы «ТП» $v_2(k,t)$ в зависимости от времени при начальном состоянии сети $k=(2,0,2)$ можно найти с помощью пакета Mathematica 5.1 и встроенной функции DSolve (рис. 3).

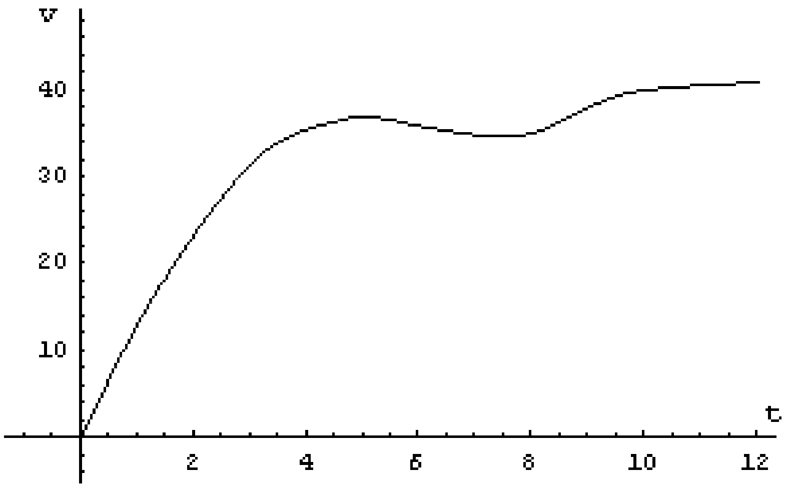


Рис. 3. Изменение дохода системы «ТП» $v_2(1,2,1,t)$

**3. Применение *НМ*-сетей при проектировании складских помещений**

Отметим, что *НМ*-сети можно использовать не только для прогнозирования ожидаемых доходов субъектов ЛТС, но и для проектирования площадей складских помещений, нахождения количества бригад транспортно-складских рабочих, занимающихся погрузкой и разгрузкой грузов. Приведем следующий пример. Пусть субъектами ЛТС являются $n$ складов $S_1$, $S_2$, …, $S_n$, между которыми осуществляется перевозка грузов. Для погрузки и разгрузки автомобилей на складе $S_i$ создано $m_i$ бригад, $i=\overline{1,n}$. Для простоты предположим, что одна и та же бригада занимается и разгрузкой автомобиля, и погрузкой в него новой продукции для дальнейшего транспортирования, чтобы простой автомобиля был минимальным. Транспортировка товара от одного субъекта к другому приносит последнему некоторый случайный доход, и соответственно доход первого субъекта уменьшается на эту случайную величину (СВ). Под доходом склада в данном случае будем понимать площадь (или объем), который занимают в нем товары. Рассмотрим динамику изменения доходов системы $S_i$ сети (склада $S_i$ ЛТС). Обозначим через $V_i(t)$ доход системы $S_i$ в момент времени $t$, а через $v_{i0}=V_i(0)$ – ее доход в начальный момент времени. Тогда доход системы $S_i$ в момент времени $t+\Delta t$ можно представить в виде

$$V_i(t+\Delta t)=V_i(t)+\Delta V_i(t,\Delta t), \tag{11}$$

где $\Delta V_i(t,\Delta t)$ – изменение дохода СМО $S_i$ на интервале времени $[t,t+\Delta t)$. Для нахождения этой величины выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время $\Delta t$, и изменение доходов системы $S_i$, связанные с данными событиями:

1. С вероятностью $\lambda(t)p_{0i}\Delta t+o(\Delta t)$ в систему $S_i$ из внешней среды поступит заявка (на склад $S_i$ – автомобиль), которая принесет ей доход $r_{0i}$, т. е. занятая площадь склада $S_i$ увеличится на величину $r_{0i}$, где $r_{0i}$ – СВ с математическим ожиданием (м. о.) $M\{r_{0i}\}=a_{0i}$, $i=\overline{1,n}$.

2. С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка из системы $S_i$ уйдет во внешнюю среду, при этом доход СМО $S_i$ уменьшится на величину $R_{i0}$ (занятая площадь склада $S_i$ уменьшится на эту величину), где $R_{i0}$ – СВ с м. о. $M\{R_{i0}\}=b_{i0}$, $i=\overline{1,n}$.

3. С вероятностью $\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка системы $S_j$ перейдет в систему $S_i$, при этом доход системы $S_i$ (занятая площадь склада $S_i$) возрастет на величину $r_{ji}$, а доход $S_j$ (занятая площадь склада $S_j$) уменьшится на величину $r_{ji}$, где $r_{ji}$ – СВ с м. о. $M\{r_{ji}\}=a_{ji}$, $i,j=\overline{1,n},\ i\neq j$.

4. С вероятностью $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t+o(\Delta t)$ заявка из системы $S_i$ переходит в систему $S_j$, при этом доход $S_i$ (занятая площадь склада $S_i$) уменьшится на величину $R_{ij}$, а доход $S_j$ (занятая площадь склада $S_j$) возрастет на величину $R_{ij}$, где $R_{ij}$ – СВ с м. о. $M\{R_{ij}\}=b_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$, $i\neq j$.

5. С вероятностью $1-(\lambda(t)p_{0i}+\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji})\ \Delta t+o(t)$ на отрезке времени $[t,t+\Delta t)$ изменение состояния системы $S_i$ не произойдет (занятая площадь склада $S_i$ не изменится), $i=\overline{1,n}$.

Очевидно, что $r_{ji}=R_{ji}$ с вероятностью 1, т. е. $a_{ji}=b_{ji},\ i,j=\overline{1,n}.$ Тогда из сказанного выше следует

$$\Delta V_i\ (t,\Delta t)=\begin{cases} r_{0i} & \text{с вероятностью} \quad \lambda(t)p_{0i}\Delta t+o(\Delta t); \\ -R_{i0} & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{i0}\Delta t+o(\Delta t); \\ r_{ji} & \text{с вероятностью} \quad \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}\Delta t+o(\Delta t); \\ -R_{ij} & \text{с вероятностью} \quad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))p_{ij}\Delta t+o(\Delta t). \end{cases} \tag{12}$$

При фиксированной реализации процесса $k(t)$, учитывая (12), можно записать

$$M\{\Delta V_i(t,\Delta t)/k(t)\} = \left[\lambda(t)p_{0i}a_{0i} - \mu_i(k_i(t))u(k_i(t))\left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ij}b_{ij}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mu_j(k_j(t))u(k_j(t))p_{ji}a_{ji}\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Усредняя по $k(t)$ с учетом условия нормировки $\sum_k P(k(t)=k)=1$, для изменения ожидаемого дохода субъекта $S_i$ получаем

$$M\{\Delta V_i(t,\Delta t)\} = \sum_k P(k(t)=k)M\{\Delta V_i(t,\Delta t)/k(t)\} =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty} P(k(t)=(k_1(t),k_2(t),\ldots,k_n(t)))\ M\{\Delta V_i(t,\Delta t)/k(t)=(k_1(t),k_2(t),\ldots,k_n(t))\} =$$

$$= \left[\lambda(t)p_{0i}a_{0i} - \left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ij}b_{ij}\right)\sum_k P(k(t)=k)\,\mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ji}a_{ji}\sum_k P(k(t)=k)\,\mu_j(k_j(t))u(k_j(t))\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Далее будем считать, что интервалы времени обслуживания заявки в системе $S_i$ (интервалы разгрузки-погрузки одного автомобиля на складе $S_i$) распределены по показательному закону с параметрами $\mu_i$, $i=\overline{1,n}$, и $\lambda(t)=\lambda$. В этом случае

$$\mu_i(k_i(t)) = \begin{cases} \mu_i k_i(t), & k_i(t)\le m_i;\\ \mu_i m_i, & k_i(t) > m_i, \end{cases} \qquad \mu_i(k_i(t))u(k_i(t)) = \mu_i\min(k_i(t),m_i),\ i=\overline{1,n}.$$

Также будем предполагать, что усреднение выражения $\mu_i(k_i(t))u(k_i(t))$ дает $\mu_i\min(N_i(t),m_i)$, т. е.

$$M\min(k_i(t),m_i) = \min(N_i(t),m_i),$$

где $N_i(t)$ – среднее число заявок (ожидающих и обслуживающихся) в $S_i$ в момент времени $t$, $i=\overline{1,n}$. С учетом этого предположения получаем приближенное соотношение

$$M\{\Delta V_i(t,\Delta t)\} = \Bigg[\lambda(t) p_{0i} a_{0i} - \mu_i \min(N_i(t), m_i)\Bigg(p_{i0} b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} p_{ij} b_{ij}\Bigg) + \tag{13}$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j \min(N_j(t), m_j) p_{ji} a_{ji}\Bigg] \Delta t + o(\Delta t).$$

Поскольку в сеть поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda$, среднее число заявок, поступивших извне в $S_i$ за время $\Delta t$, равно $\lambda p_{0i} \Delta t$. Обозначим через $\rho_i(t)$ среднее число занятых линий обслуживания в $S_i$ в момент времени $t$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $\mu_i \rho_i(t) \Delta t$ – среднее число заявок, покинувших $S_i$ за время $\Delta t$, а $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j \rho_j(t) p_{ji} \Delta t$ – среднее число заявок, поступивших в $S_i$ из других субъектов за время $\Delta t$. Поэтому

$$N_i(t+\Delta t) - N_i(t) = \lambda p_{0i} \Delta t + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j \rho_j(t) p_{ji} \Delta t - \mu_i \rho_i(t) \Delta t,\ i = \overline{1,n},$$

откуда при $\Delta t \to 0$ вытекает система ОДУ для $N_i(t)$:

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j \rho_j(t) p_{ji} - \mu_i \rho_i(t) + \lambda p_{0i},\ i = \overline{1,n}. \tag{14}$$

Величину $\rho_i(t)$ найти точно не представляется возможным, поэтому аппроксимируем ее выражением

$$\rho_i(t) = \begin{cases} N_i(t),\ N_i(t) \le m_i; \\ m_i, N_i(t) > m_i, \end{cases} = \min(N_i(t),\ m_i).$$

В данном случае система уравнений (14) примет вид

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j p_{ji} \min(N_j(t), m_j) - \mu_i \min(N_i(t), m_i) + \lambda p_{0i},\ i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Это система линейных неоднородных ОДУ с разрывными правыми частями. Решать ее нужно путем разбиения фазового пространства на ряд областей и нахождения решения в каждой из них. Систему (15) можно решить, например, используя средства системы компьютерной математики Maple 8.

Введем обозначение $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$, $i = \overline{1,n}$. Из (11), (13) получаем

$$v_i(t+\Delta t) = v_i(t) + M\{\Delta V_i(t,\Delta t)\} =$$

$$= v_i(t) + \left[\lambda p_{0i}a_{0i} - \mu_i \min(N_i(t), m_i)\left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} p_{ij}b_{ij}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \min(N_j(t), m_j) p_{ji}a_{ji}\right]\Delta t + o(\Delta t).$$

Далее, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим неоднородные линейные ОДУ первого порядка

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = -\mu_i \min(N_i(t), m_i)\left(p_{i0}b_{i0} + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}b_{ij}\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mu_j \min(N_j(t), m_j) p_{ji}a_{ji} + \lambda p_{0i}a_{0i}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (16)$$

Задав начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1,n}$, можно найти ожидаемые доходы систем сети (величины занятых в среднем площадей на складах).

Рассмотрим модельный пример.

***Пример 2.*** Пусть замкнутая сеть (рис. 4) состоит из $n = 15$ однолинейных СМО, $K = 80$ – число заявок в сети. Интенсивности обслуживания заявок в системах сети $\mu_1 = \mu_{13} = 2{,}9$, $\mu_6 = 5$, $\mu_4 = \mu_8 = \mu_{12} = \mu_{14} = 1{,}9$, $\mu_7 = \mu_{11} = \mu_{15} = 4{,}1$, $\mu_3 = \mu_9 = \mu_{10} = 4{,}5$, $\mu_2 = \mu_5 = 3$, а вероятности переходов заявок между СМО сети – $p_{15\,i} = 1/14$, $p_{i\,15} = 1$, $i = \overline{1,14}$, определим также $p_{ii} = -1$, $i = \overline{1,15}$, остальные $p_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1,15}$.

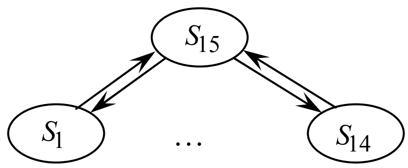


Рис. 4. Схема сети для примера 2

Предположим, что при работе сети в периферийных СМО в среднем не наблюдается очередей, а центральная СМО функционирует в условиях высокой нагрузки. Тогда система РДУ для среднего числа заявок в системах сети (14) перепишется как

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{14} \mu_j p_{ji} N_j(t) + \mu_{15} p_{15i}, \quad i = \overline{1,15}. \qquad (17)$$

Зададим значения математических ожиданий доходов от переходов между состояниями сети в виде

$$a_{15\,i} = 0,45,\ i = \overline{1,6};\ \ a_{15i} = 0,9,\ i = \overline{7,14};\ a_{15\,14} = 1,6\ ;$$

$$a_{i\,15} = (13,12,18,20,29,10,8,15,11,9,12,17,4,13,14),\ i = \overline{1,14}\,.$$

Тогда ожидаемые доходы систем сети, найденные с помощью пакета Mathematica 5.1, при условии, что в начальный момент времени $v_i(0) = 50,\ i = \overline{1,14},\ v_{15}(0) = 500$, и начальных условиях $N_i(0) = 3,\ i = 4,6,8,12$; $N_i(0) = 2,\ i = 1,3,7,11$; $N_i(0) = 5,\ i = 2,13,14$; $N_i(0) = 4,\ i = 5,9,10$; $N_{15}(0) = 25$ ведут себя так, как показано на рис. 5.

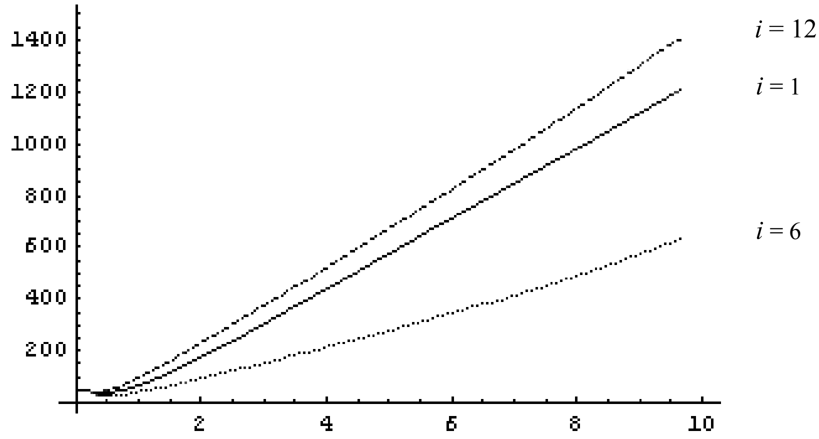


Рис. 5. Ожидаемые доходы систем $S_1$, $S_6$, $S_{12}$

**Заключение**

Случайные транспортные потоки между различными субъектами ЛТС, случайные длительности интервалов времени, необходимых для погрузки-разгрузки транспорта, случайные объемы перевозимых грузов и занимаемые ими площади в складских помещениях предопределили необходимость использования сетей МО для разработки математических моделей функционирования ЛТС. В данной работе для прогнозирования ожидаемых доходов и площадей складских помещений субъектов ЛТС используется новый класс сетей МО – марковские *НМ*-сети с доходами, причем в отличие от ранее проведенных исследований рассматривается случай, когда интенсивность поступающего в ЛТС потока автомобилей и интенсивности их обслуживания в субъектах зависят от времени.

Перспективы дальнейшей работы в данной области связаны с развитием методов анализа произвольных (немарковских) сетей с доходами и различными особенностями, решением задач управления для них.

**Список литературы**

1. Неруш, Ю.М. Коммерческая логистика / Ю.М. Неруш. – М. : Банки и биржи: ЮНИТИ, 1997. – 271 с.

2. Pankov, A. Computer simulation of income in queueing networks and its application / A. Pankov // Computer Science. – 2005. – Vol. 5, № 9. – P. 29–36.

3. Маталыцкий, М.А. *НМ*-сети как новые стохастические модели прогнозирования доходов различных объектов / М.А. Маталыцкий, С.Э. Статкевич // Вестник ГрГУ. Сер. 5. – 2009. – № 1. – С. 107–115.

4. Китурко, О.М. О прогнозировании доходов в одной логистической транспортной системе / О.М. Китурко // Вестник ГрГУ. Сер. 5. – 2010. – № 1. – С. 107–113.

5. Маталыцкий, М.А. О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применении / М.А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 10. – С. 97–113.

6. Advanced Grapher [Electronic resource] / Alentum Software. Inc. – Mode of access : www.alentum.com/agrapher. – Date of access : 01.10.2009.

**Поступила 27.05.10**

*Гродненский государственный*
*университет им. Я. Купалы,*
*Гродно, ул. Ожешко, 22*
*e-mail: m.matalytski@gmail.com,*
*sytaya_om@mail.ru*

**M.A. Matalytski, O.M. Kiturko**

## ON APPLICATION OF QUEUING NETWORKS WITH INCOMES FOR THE SOLUTION OF TRANSPORT LOGISTICS PROBLEMS

In this paper a technique of estimation and forecasting the expected incomes, the areas of storage rooms of subjects of logistical transport systems (LTS) based on application of *HM*-queuing networks with incomes is suggested. A new class of QN – Markov *HM*-networks with incomes is used for forecasting the expected incomes and the squares of LTS subjects warehouse. Unlike the previous research results, the case of time dependency of the intensity of car stream arriving in LTS and the intensity of their service in subjects is considered.