

УДК 539.3

О.Л. Швед

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ВОЛЬФРАМА ПРИ ОДНООСНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

На основе разрабатываемой геометрически нелинейной упругопластической модели материала выполняется численное моделирование одноосных нагружений вольфрама на путях «растяжение», «сжатие», «сжатие-растяжение» и «растяжение-сжатие» при возможном наложении условий всестороннего равномерного сжатия. Описываются экспериментальные факты. Деформированный на сжатие материал разрушается при меньшей деформации растяжения, чем исходный. Деформация растяжения уменьшает пластическую деформацию при сжатии. Наложение условий всестороннего равномерного сжатия при одноосном растяжении увеличивает пластичность материала. Подтверждается свойственный малопластичным в обычных условиях материалам экспериментальный факт существования порогового гидростатического давления, до которого увеличение пластичности не наблюдается. Показывается, что пластическая деформация является геометрически обратимым и физически необратимым явлением.

Введение

Выдающийся ученый-экспериментатор П.В. Бриджмен установил много интересных опытных фактов [1–3], которые хотя бы частично следует учитывать при разработке теоретических моделей нелинейной пластичности. Это направление исследований в настоящее время продолжает оставаться актуальным. Если теория нелинейно-упругого поведения материалов фактически достаточно разработана [4, 5] и специалисты занимаются решением конкретных задач, то для неупругих материалов имеет место иная ситуация [6]. Несмотря на большое число работ, постоянно появляются публикации, в которых предпринимаются попытки пересмотра основ теории, что, очевидно, свидетельствует о ее несовершенстве. Нелинейная теория пластичности представляет собой сложную и противоречивую область исследований [7, 8]. В этой области, что вполне естественно, имеются противоположные точки зрения по принципиальным вопросам. Например, в отличие от линейной теории, определение понятия пластической деформации вызывает серьезные затруднения и далеко не однозначно, что приводит к существенным различиям в результатах модельных расчетов [9]. По мнению П.М. Нахди, ни одно из существующих исследований не в состоянии дать законченное определение пластической деформации [7]. В связи с этим возникает вопрос: необходимо ли определять ее в общем случае? Так, разрабатываемую модель материала [10–16] можно было бы назвать теорией упругопластических деформаций с неизвестной обычно пластической деформацией. Пластическая деформация может определяться для элемента нагруженного тела. Если все тело деформируется как один элемент, что имеет место в рассматриваемых ниже нагружениях, то все упрощается, упругую деформацию путем разгрузки можно удалить и всегда вычисляемая общая деформация совпадает в этом случае с пластической. Возможно, это единственный благоприятный случай, когда пластическую деформацию можно найти абсолютно точно.

Целью настоящей работы является моделирование одноосных нагружений и теоретическое описание опытных фактов, установленных в [1, 3]. В качестве материала для простоты выбран вольфрам. Это трудно деформируемый малопластичный в обычных условиях металл. При комнатной температуре и простом растяжении вольфрамовый образец разрывается при относительном удлинении 2 % без образования шейки. Считаем, что предел текучести на растяжение у него совпадает с пределом прочности и равен $\sigma = 900$ МПа. Величина эффекта Баушингера (отношение пределов текучести при растяжении и сжатии) принята равной единице.

1. Обозначения и основные соотношения

Назовем условно обобщенным «градиентом» упругой деформации неособенный тензор \mathbf{F}_e . Для изотропного материала он совпадает с деформационным градиентом. В упругом состоянии материальные производные этих тензоров совпадают, а при течении \mathbf{F}_e находится из полярного разложения $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{U}$, где \mathbf{O} – собственно ортогональный тензор; \mathbf{V}, \mathbf{U} – меры упругих искажений с использованием определяющих уравнений.

Обозначим $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ неподвижный ортонормированный триэдр, a^1, a^2, a^3 – декартовы координаты. Пусть растяжение и сжатие происходят, например, по оси \mathbf{c}_2 . Радиус-векторы места частицы в отчетной и актуальной конфигурациях будут $\mathbf{r} = a^i \mathbf{c}_i$, $\mathbf{R} = x(a^1 \mathbf{c}_1 + a^3 \mathbf{c}_3) + ya^2 \mathbf{c}_2$; начальные значения исходного векторного базиса в актуальной конфигурации $\mathbf{R}_i = \mathbf{c}_i$; деформационный градиент $\overset{0}{\nabla} \mathbf{R}^T = x(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3) + y \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2$ [4]. При одноосном растяжении и сжатии имеем $\mathbf{O} = \mathbf{O}^T = \mathbf{E}$ – единичный тензор. Обозначим I_i, L_i i -е главные инварианты мер $\mathbf{G} = \mathbf{U}^2$ и $\mathbf{F} = \mathbf{V}^2$, \mathbf{U} и \mathbf{V} . Учитывая анизотропные структуры до третьей степени и переходя затем к мере \mathbf{G} , находим потенциал упругих напряжений в форме Мурнагана [4, 5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \varepsilon_7 + 2^{-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{G} + 4^{-1} (\delta_1 \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 2) + \delta_2 \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 2) + \delta_3 \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 2) + \\ & + \delta_8 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2) + \delta_9 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \\ & + \delta_{10} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3) + \delta_7 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \\ & + 8^{-1} (\delta_{22} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^3 + 1) + \delta_{23} ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^3 + 1) + \delta_{24} ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^3 + 1) + \delta_{25} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \times \\ & \times (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{26} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{27} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \\ & + \delta_{28} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \delta_{29} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) + 1) + \\ & + \delta_{30} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) + 1) + \delta_{31} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) + 1) + \\ & + \delta_{32} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{33} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{34} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2) - \\ & - \varepsilon_0 (\varepsilon_7 = 4^{-1} (4^{-1} (-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3) I_1 + 4^{-1} (2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3) I_1^2 + \\ & + (-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3) I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3) I_1 I_2 + 12^{-1} (\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3) I_1^3 + 2\nu_3 I_3)), \end{aligned} \quad (1)$$

где λ, μ – постоянные Ляме второго, а ν_1, ν_2, ν_3 – третьего порядка. Начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$, симметричного тензора второго ранга $\mathbf{b} = 0$, тогда ε с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал ε_I ; ε_0 – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\varepsilon \geq 0$. При одноосном растяжении образца материал становится трансверсально-изотропным. Поэтому получается, что ненулевыми могут быть параметры δ_j , где $j \in \{1 - 3, 7 - 11, 15, 22 - 34\}$ (общее их число 77), и справедливы равенства [14–16]:

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_3, \delta_9 = \delta_8, \delta_{11} = 2\delta_1 - \delta_{10}, \delta_7 = \delta_{15}, \\ \delta_{22} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{29}, \delta_{25} = \delta_{30} = \delta_{31}, \delta_{27} = \delta_{28}, \delta_{32} = 2\delta_{22}, \delta_{33} = \delta_{25}, \delta_{34} = 2\delta_{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = 2L_3^{-1} (\psi_0 \mathbf{E} + \psi_1 \mathbf{V} + \psi_2 \mathbf{V}^2) + L_3^{-1} \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \sum_{j=1}^{34} \delta_j \mathbf{T}_j \quad (\mathbf{B} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}), \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_i = L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_8 = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T}_9 = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T}_{10} = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T}_7 = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{11} = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T}_{15} = L_3^{-1} 2^{-1} \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{21+i} = 4^{-1} 3 L_3^{-1} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{T}_{25} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{26} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{27} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{28} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{29} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{30} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{31} = 4^{-1} L_3^{-1} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \times \\ \times (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{32} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{33} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{T}_{34} = 4^{-1} L_3^{-1} (2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3)^2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V});$$

$$\psi_0 = a_0 L_3^2 + c_0 L_1 L_3 + c_1 L_1 L_3 I_1, \quad \psi_1 = c_0 (L_3 - L_1 L_2) + c_1 (-L_1^3 L_2 + L_1^2 L_3 - 2L_2 L_3 + 2L_1 L_2^2),$$

$$\psi_2 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + c_0 (L_1^2 - L_2) + c_1 (L_1^4 - 3L_1^2 L_2 + L_2^2 + 2L_1 L_3), \quad I_1 = L_1^2 - 2L_2;$$

$$a_0 = 2^{-1} v_3, \quad b_0 = 16^{-1} (-12\lambda - 8\mu + 9v_1 + 18v_2 + 8v_3), \quad b_1 = 8^{-1} (2\lambda - 3v_1 - 4v_2), \quad b_2 = 16^{-1} (v_1 + 2v_2),$$

$$c_0 = 4^{-1} (2\mu - 3v_2 - 4v_3), \quad c_1 = 4^{-1} (v_2 + 2v_3), \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

При одноосном нагружении выполняется $\mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2$ и $\mathbf{b} = b \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2$.

Рассмотрим дальше активный процесс и состояние течения. Обозначим $\nabla \mathbf{v}^T$ градиент скорости, \mathbf{W} – тензор вихря, \mathbf{D} – тензор скорости деформаций. Вводится объективная О-производная тензора \mathbf{T} : $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}$, где $\mathbf{\Omega} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}$ – тензор упругого спина [10]. Критерий пластического состояния в регулярной точке поверхности текучести задается условием $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} > 0$, где \mathbf{N} – девиатор внешней нормали к поверхности текучести ($\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$), $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ является О-производной $\text{dev } \mathbf{T}$ – девиатора тензора \mathbf{T} (3). Данная производная вычисляется при условии несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ по соотношениям $\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{F}_e$ и $\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - (L_1 L_2 - L_3)^{-1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + L_1 L_3 (\mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^1 - \mathbf{V}^1 \cdot \mathbf{D}))$, если тензор $(\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega})$ имеет потенциал (т. е. суще-

стает такой скаляр $\omega = \omega(\mathbf{D})$, что выполняется $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{D}} = (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega})$. В противном случае соотношение для $\mathbf{\Omega}$ изменится с целью сохранения потенциальности [12], но здесь этот случай не реализуется. Несложно проверить, что аналогично вычисленная яуманнская производная тензора $\text{dev } \mathbf{T}$ имеет потенциал [11]. В явном виде получаем

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}) = (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) + \mathbf{Q}_0(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_1(\mathbf{D}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{D}), \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \text{dev}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + 4L_3^{-1}(d\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D})\mathbf{F} + c_1\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F})$$

$$(\varphi_0 = a_0I_3, d = b_1 + (2b_2 - c_1)I_1, \varphi_2 = c_0 + c_1I_1),$$

$$\mathbf{Q}_1 = L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((2\delta_1\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_4\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 +$$

$$+ \delta_{10}\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 + (2\delta_2\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_5\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_8\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 +$$

$$+ \delta_9\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 + (2\delta_3\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_6\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_9\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 +$$

$$+ \delta_{10}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3 + \delta_7\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) +$$

$$+ \delta_{11}\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) + \delta_{15}\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)) \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{Q}_2 = L_3^{-1} \text{dev}(\mathbf{V} \cdot ((3\delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + \delta_{27}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 +$$

$$+ \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{25}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 -$$

$$- 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{26}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) +$$

$$+ \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2))\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1 +$$

$$+ (3\delta_{23}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{25}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 +$$

$$+ \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{27}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 -$$

$$- 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \delta_{28}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) +$$

$$+ \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1))\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2 +$$

$$+ (3\delta_{24}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{26}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 +$$

$$+ \delta_{28}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \delta_{29}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 -$$

$$- 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \delta_{30}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) +$$

$$+ \delta_{31}2^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2))\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}).$$

В выражении для \mathbf{Q}_2 опущены неиспользуемые члены, содержащие параметры $\delta_{32}, \delta_{33}, \delta_{34}$.

Для определения девиатора \mathbf{N} вводится девиатор \mathbf{M} , который получается из девиатора \mathbf{Q} , линейно зависящего от компонент тензора \mathbf{D} , после замены в (4) величин \mathbf{D} на \mathbf{N} . Для любого девиатора \mathbf{D} справедливо соотношение $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{M}$. Девиатор \mathbf{M} с такими свойствами определяется однозначно [13]. При построении девиаторного сечения поверхности текучести применяется «векторное» представление девиаторов симметричных тензоров второго ранга. Для этого задается ортонормированный тензорный базис $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_3 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_4 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{W}_5 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$. Два любых таких девиатора, в частности \mathbf{N} и \mathbf{M} , для двухмерного напряженно-деформированного состояния представляются в тензорном виде $\mathbf{N} = n_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + n_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - (n_1 + n_2)\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + n_3(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$, $\mathbf{M} = m_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + m_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - (m_1 + m_2)\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + m_3(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$ и векторном виде $\mathbf{N} = w_1\mathbf{W}_1 + w_2\mathbf{W}_2 + w_3\mathbf{W}_3$, $\mathbf{M} = v_1\mathbf{W}_1 + v_2\mathbf{W}_2 + v_3\mathbf{W}_3$. В поком-

понентном представлении \mathbf{M} получаем $m_j = \sum_{i=1}^3 a_{ji} n_i (j=1,2,3)$, где a_{ji} – вычисляемые скаляры. В векторном представлении $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$; удалив с диагонали матрицы (a_{ji}) величину a_{11} , получаем [13]

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + 2k_2 & \sqrt{3}k_2 & k_3 \\ \sqrt{3}k_2 & -k_1 + 2k_2 & k_4 \\ k_3 & k_4 & k_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $k_1 = 2^{-1}(a_{12} + a_{21})$, $k_2 = -2^{-1}(a_{12} - a_{21})$, $k_3 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{13} + a_{23})$, $k_4 = -2^{-1}(a_{13} - a_{23})$, $k_5 = a_{33} - a_{11}$.

В регулярной точке поверхности текучести постулируется при течении основное дифференциальное определяющее уравнение

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}. \quad (6)$$

Тензор $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ имеет потенциал по модельному предположению о сохранении потенциальной природы упругой деформации. Тензор \mathbf{Q} имеет потенциал по построению [10]. Следовательно, согласно (6) и тензор $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{M} \mathbf{N}$ имеет потенциал. Задача определения девиатора нормали, как нетрудно показать [13], сводится к задаче о нахождении собственных значений и собственных векторов симметричного матричного оператора (5). По двум различным (а такие всегда имеются) собственным значениям находятся два собственных вектора, а третий определяется их векторным произведением. Девиатор нормали к поверхности текучести выбирается из этих трех векторов. Разработана такая процедура выбора на основе близости соответствующих триэдров собственных векторов до и после расчетного шага, а также для близких точек девиаторного сечения.

При одноосном растяжении по второй оси имеем $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(-\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3) = 2^{-1} \mathbf{W}_1 + 2^{-1} \sqrt{3} \mathbf{W}_2$, при сжатии $\mathbf{N} = -\mathbf{N}_1$. Тензоры $\mathbf{Q}, \mathbf{N}, \text{dev } \mathbf{T}, \mathbf{D}$ согласно точным и численным (поскольку закон Мурнагана не обращается аналитически) расчетам пропорциональны, и, значит, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$ ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$). Справедливо также $\mathbf{W} = 0, \mathbf{\Omega} = 0$. О-производные тензоров \mathbf{T}, \mathbf{B} совпадают с их материальными производными, $\mathbf{E}_e = \mathbf{V} = V_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3) + V_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2, \mathbf{B} = b \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2$. Следовательно, дифференциальные определяющие уравнения для напряжений (6), потенциала напряжений $(L_3^{-1} \vartheta) \dot{\cdot} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \alpha \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}$ и остаточных микронапряжений $\overset{\Omega}{\mathbf{B}} = -\gamma p' \mathbf{E} + \beta \mathbf{N}$ ($\beta \geq 0$, при сжатии, растяжении $\gamma = \pm (p' \sqrt{6})^{-1} \beta$, p' – множитель Лагранжа условия несжимаемости), дополнив «проблемным» определяющим уравнением для параметров анизотропии, можно записать теперь в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= 0, (L_3^{-1} \vartheta) \dot{\cdot} = (1 - \alpha) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}; \\ \mathbf{B} &= \pm \sqrt{3} (\sqrt{2})^{-1} \beta \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2; \\ \dot{\delta}_j &= k_j K \text{dev } \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}_j (\sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j})^{-1} (\mathbf{T}_j \neq 0), \end{aligned} \quad (7)$$

где в третьем уравнении (7) при растяжении берется знак «+», а при сжатии «-». Функцию α ($0 < \alpha \leq 1$) и постоянную $K > 0$ требуется задать в рассматриваемых экспериментах, причем α имеет смысл относительной части рассеиваемой работы деформации на малом временном шаге. Девизорная часть скорости изменения \mathbf{V} определяется, как в [7]. Скаляр β вычисляется с помощью соотношений (1), (3), (7). Тензоры \mathbf{T}_j в (7) нормированы, поскольку все параметры δ_j равноправны, и введены коэффициенты k_j . Как правило, полагаем $k_j = 1$. Однако возможна ситуация, когда не выполняется необходимое условие $\beta \geq 0$. В такой ситуации следует изменить знак величин k_j у минимального числа параметров. Возможная неопределенность устраняется в результате вычислительных экспериментов. В случае $\mathbf{T}_j = 0$ надо привлекать соотношение (2). Из (7) находим $\delta_{10} = \delta_1$, а из (2) тогда имеем $\delta_{11} = \delta_{10} = \delta_1$.

Для описания явления увеличения пластичности материала при растяжении в условиях всестороннего сжатия выбиралось $\delta_7 = \delta_{15} = 2^{-1}\delta_1$ [15, 16]. Однако при этом не описывался известный экспериментальный факт: при повторном растяжении в направлении, ортогональном первоначальному, имеет место увеличение предела текучести [17]. Вычислительные эксперименты показали, что для описания этого опытного факта для вольфрама коэффициент κ в соотношении $\delta_7 = \kappa\delta_1$ достаточно увеличить до значения $\kappa = 0,76$. Таким образом, полагаем $\delta_7 = \delta_{15} = 0,76\delta_1$. Независимых параметров анизотропии будет семь: $\delta_1, \delta_2, \delta_8, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{25}, \delta_{27}$.

Функционал вариационного принципа при течении [11] для данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi = & p' \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \cdot (2^{-1} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}^T - \mathbf{D}^2) + 2^{-1} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{D} + \\ & + 4L_3^{-1} (-\varphi_0 2^{-1} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^2) + \varphi_2 2^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} + d 2^{-1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D})^2 + c_1 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \mathbf{F}^2 \cdot \mathbf{D}) + \psi, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \psi = & L_3^{-1} (\delta_1 (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)^2 + \delta_2 (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)^2 + \delta_8 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\ & + \delta_3 (\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)^2 + \delta_9 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \delta_{10} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3) + \\ & + L_3^{-1} (2^{-1} 3 (\delta_{22} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)^2 + \delta_{23} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)^2 + \\ & + \delta_{24} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) (\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)^2) + 2^{-1} \delta_{31} ((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \\ & + \delta_{25} (2^{-1} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)^2 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\ & + \delta_{26} (2^{-1} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1)^2 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \\ & + \delta_{27} (2^{-1} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)^2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 + \\ & + \delta_{28} (2^{-1} (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2)^2 + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \\ & + \delta_{29} (2^{-1} (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1) (\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)^2 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + \\ & + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2) + \\ & + \delta_{30} (2^{-1} (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1) (\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3)^2 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1) \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3). \end{aligned}$$

Из условий стационарности функционала $\varphi = \varphi(\dot{x}_1, \dot{y}, p')$ (8) находим скаляр p' и тензор $\mathbf{D} = \dot{x}x^{-1}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3) + \dot{y}y^{-1}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$. Дифференцируя (1), (3) по времени, с учетом (7) получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения величин $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \beta$:

$$b_{11}\dot{V}_1 + b_{12}\dot{V}_2 + b_{13}\beta = b_{21}\dot{V}_1 + b_{22}\dot{V}_2 + b_{23}\beta = 0, b_{31}\dot{V}_1 + b_{32}\dot{V}_2 + b_{33}\beta = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot \mathbf{D},$$

где b_{km} – вычисляемые скаляры. Так, малыми шагами по времени ($\Delta t = 10^{-4} c$, $\dot{\gamma} = \pm 10^{-2} m/c$ при растяжении, сжатии) рассчитывается упругопластический процесс при течении. Мера пластических искажений составляет $(x/V_1)(c_1c_1 + c_3c_3) + (y/V_2)c_2c_2$.

Вследствие пластической деформации возникает анизотропия, в состоянии течения происходит упрочнение материала. В рамках модельных предположений оно состоит из пластического упрочнения (изменяется поверхность текучести, в частности ее девиаторное сечение, и лежащая на нем кривая пластичности, содержащая точку процесса в пространстве напряжений) и упругого упрочнения (изменяются параметры анизотропии и остаточное напряжение, входящие в обобщенный упругий закон). В упругом состоянии материала упрочнение отсутствует. Согласно П.В. Бриджмену [1], существует предельное упрочнение, когда материал не может дальше пластически деформироваться, приводящее к макроразрушению. Для несжимаемых в пластическом состоянии материалов с достоверно заданными упругими постоянными, пределом текучести при растяжении и величиной эффекта Баушингера первоначально всегда имеется указанное замкнутое девиаторное сечение поверхности текучести. В момент достижения предельного упрочнения рассматриваемое девиаторное сечение вырождается, утрачивая необходимое свойство замкнутости [14–16]. Как показали все вычислительные эксперименты, необходимым условием разрушения является появление вырожденного собственного значения симметричного матричного оператора (5).

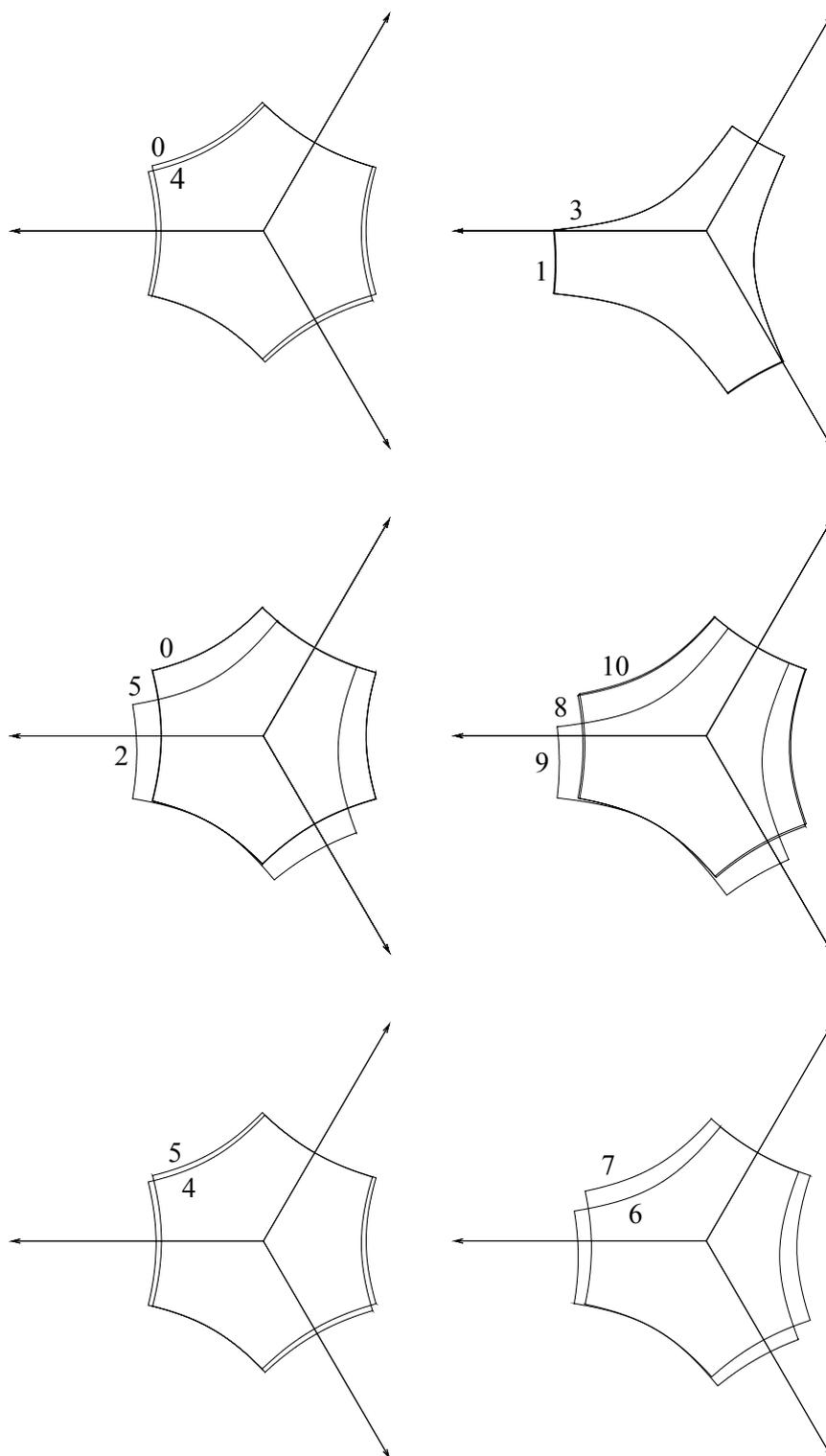
2. Результаты численного моделирования

На основе изложенных выше соотношений разработаны алгоритмы и комплексы программ на языке Фортран для численного моделирования.

Данные о постоянных Ляме взяты из [4], для рекристаллизованного вольфрама $\lambda = 1,63$, $\mu = 1,37$, $\nu_1 = -4,29$, $\nu_2 = -2,58$, $\nu_3 = -2,67(10^5 \text{ МПа})$. Функцию α зададим постоянной до момента разрушения $\alpha = \alpha_0 - c$, $c = 110(1 - \alpha_0)$, при простом растяжении $\alpha_0 = 0,9999979$, при простом сжатии $\alpha_0 = 0,999999$. Начиная с момента разрушения при растяжении, для описания явления увеличения пластичности материала в условиях всестороннего равномерного сжатия полагаем $\alpha = 1 - (1 - \alpha_0 + c)((M - m) / (M - 1))^{0,5}$, $m = 1, 2, \dots, M$, – номер шага по времени, $M = 3000$. Функция α монотонно возрастает и стремится к значению 1, поскольку вся работа деформации в пределе должна тогда рассеиваться. Постоянную K в (7) определим ее минимальным значением при допустимом росте остаточного напряжения: $K = 10^9$.

Значения коэффициентов k_j в (7) выбирались так: при обычном растяжении $k_2 = k_{23} = -1$, а остальные $k_j = 1$; при растяжении в условиях всестороннего сжатия все $k_j = 1$, кроме величин $k_1 = -1$; во всех других случаях $k_2 = -1$, а остальные $k_j = 1$.

На рисунке изображены для краткости только расчетные кривые пластичности в плоскости $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$. Стрелками отмечены проекции базисных диад $c_i c_i$, проекция $c_2 c_2$ направлена вверх. В таблице приведены соответствующие кривым значения параметров анизотропии и остаточного напряжения. Кривая пластичности строится с использованием пространства $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$. Расчетная точка перемещается из точек в плоскости $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$, соответствующих одноосному растяжению и сжатию, по девиаторному сечению в плоскостях $(\mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$ до пересечения с плоскостью $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)$. Таким способом определяются еще две точки. С учетом симметрии относительно проекции $c_2 c_2$ по указанным четырем точкам строится кривая пластичности. Кривая 0 для изотропного вольфрама близка к шестиугольнику – кривой пластичности А.Ю. Ишлинского.



Кривые пластичности: 0 – изотропного вольфрама, 1 – перед разрушением при простом растяжении за 180 шагов, 2 – после растяжения за 90 шагов, 3 – перед разрушением при растяжении за 160 шагов после сжатия за 300 шагов, 4 – после сжатия за 300 шагов, 5 – после растяжения под гидростатическим давлением $2,2\sigma$ за 800 шагов, 6 – сжатия за 90 шагов после растяжения за 90 шагов, 7 – сжатия за 800 шагов после растяжения за 800 шагов, 8 – после простого сжатия за 1200 шагов, 9 – сжатия за 1200 шагов после растяжения за 90 шагов, 10 – сжатия за 1200 шагов после растяжения за 800 шагов

Эволюция обобщенного упругого закона при одноосных нагружениях, МПа

Номер кривой	$\delta_1 \cdot 10^{-2}$	$\delta_2 \cdot 10^{-2}$	$\delta_8 \cdot 10^{-2}$	$\delta_{22} \cdot 10^{-2}$	$\delta_{23} \cdot 10^{-2}$	$\delta_{25} \cdot 10^{-2}$	$\delta_{27} \cdot 10^{-2}$	$b \cdot 10^3$
1	5,306	-10,612	-7,896	-5,306	-10,612	6,674	-9,721	15,918
2	2,676	-5,353	-3,985	-2,676	-5,353	3,368	-4,906	8,029
3	5,363	-10,725	-7,980	-4,361	-10,725	5,483	-7,989	13,083
4	0,5007	-1,001	-0,745	0,501	-1,001	-0,631	0,918	-1,502
5	-1,479	-2,957	-2,953	-1,476	2,957	2,949	2,955	4,436
6	2,822	-5,645	-4,202	-2,530	-5,645	3,183	-4,639	7,591
7	-0,219	-5,475	-4,827	-0,219	4,389	1,361	5,261	0,658
8	2,096	-4,192	-3,120	2,096	-4,192	-2,643	3,840	-6,288
9	4,735	-9,469	-7,045	-0,618	-9,469	0,774	-1,140	1,854
10	0,446	-6,807	-5,817	0,446	-0,893	0,521	6,481	-1,339

Перечислим основные факты, полученные в результате вычислительных экспериментов.

При одноосных нагружениях изотропный материал становится существенно анизотропным. На необходимость учета этого явления в теоретических исследованиях не раз указывал П.В. Бриджмен [1].

Кривым пластичности 1 и 3 соответствовало увеличение пластического искажения по второй оси при повторном нагружении в 1,0179 и 1,0164 раз. Следовательно, деформированный на сжатие материал разрушается при меньшей как пластической, так и общей деформации растяжения, чем исходный.

Кривым пластичности 8, 9 и 10 соответствовало уменьшение пластического искажения по второй оси при повторном нагружении в 0,8797, 0,8808 и 0,8886 раз, т. е. деформация растяжения уменьшает пластическую деформацию при сжатии и большей предварительной деформации соответствует меньшая пластическая деформация.

Относительное удлинение по второй оси, соответствующее кривой 5, составило 8 %. Показано, что наложение условий всестороннего равномерного сжатия при одноосном растяжении увеличивает пластичность материала. Для описания этого явления в (1) необходимо учитывать анизотропные структуры третьей степени, содержащие параметры $(\delta_{22} - \delta_{34})$. При сравнении кривых 9 и 10 на рисунке также заметно положительное влияние высокого гидростатического давления как проявление явления самозалечивания [1, 15].

Подтверждается свойственный малопластичным в обычных условиях материалам экспериментальный факт существования порогового гидростатического давления приблизительно $2,2\sigma$, до которого увеличение пластичности не наблюдается. В количественном отношении это несколько больше, чем в физических экспериментах [3]. Для лучшего соответствия математического моделирования и существующего опыта, вероятно, надо выбрать функцию α не постоянной величиной при простом растяжении, а монотонно убывающей до момента разрушения. Кроме того, поскольку эта функция регулирует часть рассеиваемой работы деформации, то в момент разрушения выделялось бы большое количество энергии. Это согласуется с [1], где в качестве одного из важных выводов отмечено, что хрупкое разрушение сопровождается именно таким явлением.

Пластическая деформация является геометрически обратимым явлением. При предварительном растяжении (сжатии) и последующем сжатии (растяжении) можно получить исходный образец, но это уже будет совсем другой материал, обладающий иными упругопластическими свойствами в зависимости от пути нагружения [1]. Эти свойства характеризуются кривыми 0, 6, 7 на рисунке и соответствующими этим кривым значениями параметров анизотропии и остаточного напряжения в таблице. Для проверки совпадения деформированных образцов с исходным величина расчетного шага по времени уменьшалась до $\Delta t = 10^{-10}$ с.

Описывается экспериментальный факт: при повторном сжатии в направлении, ортогональном первоначальному сжатию, имеет место уменьшение предела текучести (кривые 4, 10) [1]. Как

было отмечено выше, при растяжении наблюдается противоположный эффект [17], который также в настоящей работе учитывается.

Заключение

Для разработки модели нелинейной пластичности выбран подход, который ранее, вероятно, не использовался. Разрабатываемая конструкция материала является прямым обобщением модели геометрически нелинейной упругости [5] и не связывается, как обычно, с какой-либо моделью линейной пластичности. Возможности аппарата нелинейной теории упругости не игнорируются для упрощения, а активно используются. Сохраняется потенциальная природа упругой деформации и, несмотря на возникающую громоздкость соотношений, необходимая общность используемого упругого закона Мурнагана (3). Проблемное для нелинейной теории понятие пластической деформации может не определяться, поскольку оно не используется при расчете упругопластического процесса. Из теоретических соображений находятся девиаторные сечения поверхности текучести, которыми она определяется с использованием экспериментальных данных. Вырождение сечения, содержащего точку процесса в пространстве напряжений, отождествляется с макроразрушением материала, вызванным предельным его упрочнением. Критерий разрушения позволяет описать явление увеличения пластичности при одноосном растяжении под гидростатическим давлением. Описываются численно и другие нетривиальные экспериментальные факты, установленные П.В. Бриджменом, авторами работы [3] и отмеченные в [17].

Список литературы

1. Бриджмен, П.В. Исследование больших пластических деформаций и разрыва / В.П. Бриджмен. – М. : Ин. лит., 1955. – 444 с.
2. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. II. Конечные деформации / Дж. Ф. Белл. – М. : Наука, 1984. – 432 с.
3. Пластичность и прочность твердых тел при высоких давлениях / Б.И. Береснев [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 161 с.
4. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
5. Murnaghan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnaghan. – N.Y. : John Wiley, 1951. – 140 p.
6. Жилин, П.А. Основные уравнения неупругих сред / П.А. Жилин // Актуальные проблемы механики. Труды XXVIII летней школы. – СПб., 2001. – С. 14–58.
7. Naghdi, P.M. A critical review of the state of finite plasticity / P.M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
8. Левитас, В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев : Наукова думка, 1987. – 232 с.
9. Семенов, А.С. Циклическая нестабильность при расчетах больших упругопластических деформаций / А.С. Семенов, Б.Е. Мельников, М.Ю. Горохов // Ведомости. – СПб. : СПбГУ, 2003. – № 3 (33). – С. 129–143.
10. Швед, О.Л. Двойственное описание упругопластического процесса / О.Л. Швед // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2007. – № 2. – С. 88–93.
11. Швед, О.Л. О вариационном принципе в нелинейной теории пластичности / О.Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 66–72.
12. Швед, О.Л. Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности / О.Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 52–58.
13. Швед, О.Л. О потенциальных направлениях в пространстве девиаторов / О.Л. Швед // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2007. – № 1. – С. 83–87.
14. Швед, О.Л. Об условии разрушения металла при пластической деформации / О.Л. Швед // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : тр. Второй Междунар. конф., Казань, 8–11 декабря 2009 г. – Казань, 2009. – С. 381–383.

15. Швед, О.Л. Численное моделирование явления увеличения пластичности металла при растяжении в условиях всестороннего сжатия / О.Л. Швед // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела : тр. Второй Междунар. конф., Казань, 8–11 декабря 2009 г. – Казань, 2009. – С. 384–386.

16. Швед, О.Л. О хрупком разрушении материала / О.Л. Швед // Труды XIV Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 19–24 июня 2010 г., Ростов-на-Дону. – Азов : Изд-во ЮФУ, 2010. – Т. 2. – С. 304–307.

17. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 324 с.

Поступила 15.02.11

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by*

O.L. Shved

**MATHEMATICAL MODELING
THE PHENOMENON OF PLASTIC DEFORMATION
UNDER UNEASILY LOADING TUNGSTEN**

Based on the developed geometrically nonlinear elastic-plastic theoretical model of material, the numerical simulation of uneasily loading-stresses of tungsten in the ways of «dilation», «compression», «compression and dilation» and «dilation and compression» with possible imposition of conditions of the full uniformity of the first compression is considered. Some experimental results are provided. It is demonstrated that deformation by compression destroying the material at smaller tensile strain than the original one. Tensile strain reduces the plastic deformation during compression with higher pre-strain corresponding to less plastic deformation. Applying conditions of full uniform compression under uneasily tension increases the plasticity of the material. Confirmed typical maloplasticity under normal conditions of materials, the experimental fact of the existence of the threshold of hydrostatic pressure to which the increase in plasticity is observed. It was shown that plastic deformation is a geometrically reversible and physically irreversible phenomenon.