ИНФОРМАТИКА

2011 **апрель-июнь** **№ 2**

УДК 519.854.2

Ю.С. Мазаник, В.М. Котов

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ЗАВЕРШЕНИЯ ПРОЕКТА НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЕ С РАЗЛИЧНЫМИ СКОРОСТЯМИ ПРОЦЕССОРОВ

Предлагается алгоритм решения задачи минимизации времени завершения проекта на многопроцессорной системе с различными скоростями процессоров. Доказывается, что значение асимптотического коэффициента эффективности предлагаемого алгоритма не превосходит двух.

Введение

В классической задаче минимизации времени завершения проекта на многопроцессорной системе рассматривается система из $m>1$ приборов $M_1,...,M_m$ с соответствующими им скоростями $s_1,...,s_m$ и *n* требований с неотрицательными временами обслуживания $a_1,...,a_n>0$. Требуется построить расписание назначений требований на приборы таким образом, чтобы время их обслуживания было минимальным.

В онлайн-версии данной задачи все требования поступают последовательно и каждое из них необходимо назначать на обслуживание одним из приборов сразу после поступления, не имея никакой информации о последующих требованиях. Поскольку их последовательность заранее неизвестна, оптимальное решение данной задачи, вообще говоря, не определено.

Существует несколько способов оценки эффективности решения онлайн-задачи. Стандартной является оценка качества предложенного алгоритма относительно оптимального алгоритма решения офлайн-задачи. Такой коэффициент принято называть коэффициентом эффективности, а метод оценивания – сравнительным анализом.

Обозначим через $opt(a_1,...,a_n)$ длину расписания, построенного оптимальным алгоритмом для решения офлайн-задачи, а через $A(a_1,...,a_n)$ – длину расписания предлагаемого алгоритма решения онлайн-задачи. Тогда формула для вычисления асимптотического по количеству требований коэффициента эффективности имеет вид $R(A)=\lim_{n\to\infty}\sup_{(a_1,...a_n)}\dfrac{A(a_1,...,a_n)}{opt(a_1,...,a_n)}$. Данная проблема была исследована Р. Ли и Л. Ши [1], которые разработали алгоритм, имеющий оценку не менее $\dfrac{3m-1}{m+1},\forall m\geq 4$.

В работе [2] был предложен алгоритм с оценкой 2,45 для рассматриваемой ниже задачи.

1. Постановка задачи, обозначения и базовые формулы

В настоящей работе рассмотрен частный случай классической онлайн-задачи, когда $s_1=...=s_{m-1}=1,\ 1<s_m=s\leq 2$.

Введем стандартные обозначения:

m – количество приборов;

X_i – *i*-й прибор из множества приборов $\{X_1, \ldots, X_m\}$;

s_i – скорость обслуживания требований на приборе X_i, $s_1=...=s_{m-1}=1,\ 1<s_m=s\leq 2$;

a_i – время обслуживания *i*-го требования на приборе со скоростью 1 (в дальнейшем ради упрощения записи будем отождествлять требование с его временем обслуживания, т. е. употреблять выражение «требование a_i» вместо «требование *i* с временем обслуживания a_i»);

$a_{j\max}$ – максимальное из требований, поступивших на шагах от 1 до *j* включительно;

$a_{j\max 2}$ – время обслуживания второго по длительности требования среди поступивших на шагах от 1 до j включительно;

$L_j(X)$ – загрузка прибора X на шаге j до назначения j-го требования, т. е. результат деления суммы времен обслуживания всех назначенных на прибор X (до j-го шага) требований на скорость прибора X;

$\overline{L}_j(X)$ – загрузка прибора X на шаге j после назначения j-го требования, т. е. $\overline{L}_j(X) = L_{j+1}(X)$;

LB_n – нижняя оценка длины расписания, определяемого оптимальным алгоритмом офлайн-задачи для поступивших n требований, которая может быть вычислена [3] по формуле

$$LB_j = \max\left\{\sum_{i=1}^{j}\frac{a_i}{m+s-1}, \frac{a_{j\max}}{s}, a_{j\max 2}\right\} \quad \forall\, j. \tag{1}$$

Обозначим через $(a_n) = (a_j)\big|_{j=1}^{n}$ последовательность поступающих требований, а через $\{a_n\} = \{a_j\}\big|_{j=1}^{n}$ – совокупность всех ее элементов, включая повторяющиеся. Под длиной расписания, задаваемого алгоритмом А, в случае онлайн-задачи для m приборов $\{X_1, \ldots, X_m\}$ и последовательности требований (a_n) будем понимать величину $A_m((a_n)) = \max\{\overline{L}_n(X_1), \ldots, \overline{L}_n(X_m)\}$, а под $opt(\{a_n\})$ – длину расписания, задаваемого оптимальным алгоритмом решения соответствующей офлайн-задачи. Следуя [2, 3], эффективность алгоритма А решения онлайн-задачи будем оценивать величиной $R_m(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{(a_1,\ldots a_n)}\frac{A_m((a_n))}{opt(\{a_n\})}$. Поскольку $\sup\limits_{(a_1,\ldots a_n)}\frac{A_m((a_n))}{opt(\{a_n\})} \le \sup\limits_{(a_1,\ldots a_n, a_{n+1})}\frac{A_m((a_{n+1}))}{opt(\{a_{n+1}\})}$, указанный предел всегда существует (конечный или бесконечный) как предел монотонной последовательности.

Определение. Асимптотическим по количеству приборов коэффициентом эффективности алгоритма решения онлайн-задачи относительно оптимального алгоритма решения соответствующей офлайн-задачи будем назвать предел $\rho(A) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}} R_m(A)$.

2. Алгоритм назначения

Поскольку нас интересует асимптотическая оценка коэффициента $R_m(A)$, то, не нарушая общности, считаем $m \ge 15$. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{\ln(2/\alpha)}{\ln(1+\alpha/2)}+3\right). \tag{2}$$

Так как функция $f(\alpha)$, очевидно, строго убывает на промежутке $(0;1]$ и $f(1) > 14$, $\lim\limits_{\alpha\to+0} f(\alpha) = +\infty$, для каждого фиксированного $m \ge 15$ существует единственное значение $\alpha = \alpha(m)$, такое, что $m = f(\alpha(m))$. При этом

$$\lim_{m\to+\infty}\alpha(m) = 0. \tag{3}$$

Положим

$$h = \left[\frac{\ln(2/\alpha)}{\ln(1+\alpha/2)}\right] + 2. \tag{4}$$

Пусть $m \geq 15$. Положим $\alpha = \alpha(m)$, где $\alpha(m)$ такое (см. (2)), что $m = f(\alpha(m))$. При этом, как было показано выше, $0 < \alpha < 1$.

Разобьем множество всех приборов на две группы E и F: $E = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, $F = \{F_1, F_2, ..., F_h\}$, $m = k + h$, F_1 – прибор со скоростью s.

Требование a_j назовем обычным, если $a_j \leq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j$, и сложным, если $a_j > \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j$.

Рассмотрим следующий алгоритм назначений требований на приборы.

Алгоритм А. Обычные требования последовательно назначаются на приборы группы E. При этом требование a_j назначается на тот прибор, который имеет наименьший номер из всех приборов, для которых $L_j(E_i) + a_j \leq (2+\alpha) LB_j$. Сложные требования последовательно назначаются на приборы группы F (считаем, что $F_{i+h} = F_i$).

Лемма 1. В любой момент поступления обычного требования a_j существует, по крайней мере, один из приборов E_{i_0} группы E, такой, что $L_j(E_{i_0}) + a_j \leq (2+\alpha) LB_j$.

Доказательство. Предположим от противного, что в момент поступления обычного требования a_j загрузка всех приборов из группы E такова, что

$$L_j(E_i) + a_j > (2+\alpha) LB_j, \forall i = \overline{1,k}.$$

Тогда в силу неравенства $a_j \leq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j$ имеем

$$L_j(E_i) > (2+\alpha) LB_j - a_j \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j, \ \forall i = \overline{1,k}.$$

Следовательно, общая загрузка всех приборов на j-м шаге (до назначения требования a_j) удовлетворяет условию

$$sL_j(F_1) + \sum_{i=2}^{h} L_j(F_i) + \sum_{i=1}^{k} L_j(E_i) \geq \sum_{i=1}^{k} L_j(E_i) = k\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j.$$

Тогда среднее время обслуживания на j-м шаге удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{j} a_i}{m+s-1} &= \frac{\sum_{i=1}^{k} L_j(E_i) + sL_j(F_1) + \sum_{i=2}^{h} L_j(F_i) + a_j}{m+s-1} \geq \frac{k}{m+s-1}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j \geq \\ &\geq \frac{k}{m+1}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j = \frac{m-h}{m+1}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j = \left(1 - \frac{h+1}{m+1}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) LB_j. \end{aligned} \tag{5}$$

Однако по определению $m = \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{\ln(2/\alpha)}{\ln(1+\alpha/2)} + 3\right)$ и в силу условия (4) $h + 1 = \left[\frac{\ln(2/\alpha)}{\ln(1+\alpha/2)}\right] + 3 \leq \frac{\ln(2/\alpha)}{\ln(1+\alpha/2)} + 3.$ Поэтому

$$\left(1-\frac{h+1}{m+1}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)>\left(1-\frac{h+1}{m}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\geq\left(1-\frac{1}{1+\frac{2}{\alpha}}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)=1.$$

Следовательно, из соотношений (1) и (5) получаем $LB_j > LB_j$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 2. На шаге назначения любого сложного требования a_j на прибор F_{i_0} выполнено неравенство $L_j(F_{i_0}) \leq \alpha LB_j$. При этом $\overline{L}_j(F_{i_0}) \leq (2+\alpha)LB_j$. (Считаем $F_{i+th} = F_i$ для любых $t \geq 1,\ i = \overline{1,h}$.)

Доказательство. Для упрощения записи будем обозначать сложные требования символами b_p, а подпоследовательность (a_{i_p}) последовательности (a_i) через последовательность (b_p), LB_p^* обозначим LB_{i_p}.

Рассмотрим сложное требование $b_{(t-1)h+j},\ t \geq 1,\ \ j = \overline{1,h}$. Если бы $b_{(t-1)h+j} \neq a_{i_{(t-1)h+j}\max}$, то $b_{(t-1)h+j} \leq a_{i_{(t-1)h+j}\max 2} \leq LB^*_{(t-1)h+j}$, что противоречит условию сложности требования $b_{(t-1)h+j}$. Поскольку первое сложное требование, очевидно, является максимальным среди требований $a_1,\ldots,a_{i_1-1},a_{i_1} = b_1$, это означает, что каждое последующее сложное требование является максимальным для всех уже поступивших требований. Заметим, что

$$b_p \leq \left[b_p = a_{i_p\max} \leq a_{i_{p+1}\max 2} \leq LB^*_{p+1}\right] \leq LB^*_{p+1} < \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-1} b_{p+1},\ \ \forall p \geq 1.$$

Отсюда следует неравенство

$$b_p < \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{-l} b_{p+l},\ \forall p \geq 1,\ \ \forall l \geq 1. \tag{6}$$

Первое сложное требование b_1 назначим на прибор F_1, которым является прибор со скоростью обработки s.

Итерацией назовем последовательные назначения h сложных требований. Легко видеть, что на первой итерации загрузка каждого прибора $F_i, i = \overline{1,h}$, равна 0 до назначения на этот прибор очередного требования b_j. Это означает, что неравенство

$$L_j(F_i) \leq \alpha LB_j,\ i = \overline{1,h}, \tag{7}$$

выполнено на первой итерации назначений сложных требований. Индукцией по числу итераций покажем, что неравенство (7) выполнено при назначении любого сложного требования на приборы группы F.

Пусть (7) выполнено для всех итераций от 1 до t, $t \geq 1$. Рассмотрим состояние прибора $F_i, i = \overline{1,h}$ на (t+1)-й итерации. Согласно рассматриваемому алгоритму сложное требование $b_{th+r},\ r = \overline{1,h},$ назначается на прибор F_r. Для любого $r = \overline{2,h}$ имеем

$$L_{i_{th+r}}(F_r) = L_{i_{(t-1)h+r}}(F_r) + b_{(t-1)h+r} \le \alpha LB^*_{(t-1)h+r} + b_{(t-1)h+r} \le \left[b_{(t-1)h+r} = a_{i_{(t-1)h+r}\max} \le sLB^*_{(t-1)h+r} \right] \le$$

$$\le (s+\alpha)LB^*_{(t-1)h+r} \le (2+\alpha)LB^*_{(t-1)h+r} = 2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)LB^*_{(t-1)h+r} \le \left[2 \le \alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{h-1} \right] \le$$

$$\le \alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{h} LB^*_{(t-1)h+r} \le [\text{см. } (6)] \le \alpha b_{(t-1)h+r+h-1} = \alpha b_{th+r-1} \le$$

$$\le [b_{th+r-1} = a_{i_{th+r}\max 2} \le LB^*_{th+r}] \le \alpha LB^*_{th+r}.$$

Аналогично при назначении сложного требования на прибор F_1 имеем

$$L_{i_{th+1}}(F_1) = L_{i_{(t-1)h+1}}(F_1) + \frac{b_{(t-1)h+1}}{s} \le \alpha LB^*_{t(h-1)+1} + \frac{b_{(t-1)h+1}}{s} \le (1+\alpha)LB^*_{(t-1)h+1} < (2+\alpha)LB^*_{(t-1)h+1} =$$

$$= 2\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)LB^*_{(t-1)h+1} \le \alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{h} LB^*_{(t-1)h+1} \le \alpha\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^{h-1} b_{(t-1)h+1} < \alpha b_{(t-1)h+1+h-1} = \alpha b_{th} \le \alpha LB^*_{th+1}.$$

Полученные неравенства показывают, что неравенство (7) выполнено для всех приборов множества F на $(t+1)$-й итерации. Следовательно, по индукции оно выполнено в любой момент поступления сложного требования.

Кроме того, из неравенства (7) следует, что

$$\overline{L}_{i_{th+r}}(F_r) = L_{i_{th+r}}(F_r) + b_{th+r} \le \alpha LB^*_{th+r} + b_{th+r} \le \left[b_{th+r} = a_{i_{th+r}\max} \le sLB^*_{i_{th+r}} \right] \le$$

$$\le (s+\alpha)LB^*_{th+r} \le (2+\alpha)LB^*_{th+r}, \ \forall r = \overline{2,h}, \ \forall t \ge 0,$$

и

$$\overline{L}_{i_{th+1}}(F_1) = L_{i_{th+1}}(F_1) + \frac{b_{th+1}}{s} \le \alpha LB^*_{th+1} + \frac{b_{th+1}}{s} \le \left[b_{th+1} = a_{i_{th+1}\max} \le sLB^*_{th+1} \right] \le LB^*_{th+1} + \alpha LB^*_{th+1} =$$

$$= (1+\alpha)LB^*_{th+1} < (2+\alpha)LB^*_{th+1}, \ \forall t \ge 0.$$

Лемма доказана.

Теорема. *Асимптотический по количеству приборов коэффициент эффективности алгоритма A решения онлайн-задачи относительно оптимального алгоритма решения соответствующей офлайн-задачи не превосходит двух.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что каждое обычное требование может быть назначено на приборы множества E, причем время обслуживания требований на каждом из приборов $E_i, i = \overline{1,k}$, на каждом шаге j не превосходит $(2+\alpha)LB_j$, т. е.

$$\overline{L}_j(E_i) \le (2+\alpha)LB_j, \ \forall j \ge 1, \ \forall i = \overline{1,k}. \quad (8)$$

Аналогично из леммы 2 следует, что каждое сложное требование может быть назначено на прибор множества F, причем время обслуживания требований на каждом из приборов $F_i, i=\overline{1,h}$, на каждом j-м шаге не превосходит $(2+\alpha)LB_j^*$, т. е.

$$\overline{L}_j(F_i) \le (2+\alpha)LB_j^*,\ \forall j \ge 1,\ \forall i=\overline{1,h}. \quad (9)$$

Поскольку $A_m((a_n)) = \max_{X \in E \cup F} \overline{L}_n(X)$, из (8) и (9) следует, что $A_m((a_n)) \le (2+\alpha)LB_n$ для любой последовательности (a_n). Кроме того, по определению $opt(\{a_n\}) \ge LB_n$ также для любой последовательности (a_n). Поэтому $R_m(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{(a_1,\dots a_n)} \frac{A_m((a_n))}{opt(\{a_n\})} \le (2+\alpha)$. Переходя в этом неравенстве к верхнему пределу при $m\to\infty$ и учитывая (3), получаем $\rho(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}} R_m(A) \le 2$. Теорема доказана.

Заключение

В работе построен алгоритм решения задачи минимизации времени завершения проекта на многопроцессорной системе со скоростями процессоров 1 и s, $1< s \le 2$. Доказано, что оценка эффективности представленного алгоритма для любого количества машин $m \ge 15$ не превосходит $2+\alpha(m)$, где $\alpha(m) \to 0$ при $m\to\infty$.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (проект Ф10ФП-001).

Список литературы

1. Rongheng, Li. An on-line algorithm for some uniform processor Scheduling / Li Rongheng, Shi Lijie // Computer Science. – 1995. – Vol. 959. – P. 627–632.

2. Kotov, V. A new algorithm for online uniform-machine scheduling to minimize the makespan / V. Kotov, T.C.E. Cheng, C.T. Ng // Information Processing Letters. – 2006. – Vol. 99. – P. 102–105.

3. Graham, R.L. Bounds on multiprocessing timing anomalies / R.L. Graham // SIAM J. Appl. Math. – 1969. – № 17. – P. 263–269.

Поступила 22.12.10

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: mazanik@gmail.com

Y.S. Mazanik, V.M. Kotov

MINIMIZING THE PROJECT EXECUTION TIME ON A MULTI-PROCESSOR SYSTEM WITH VARYING PROCESSING SPEED

In this paper we consider a problem of time minimization for project execution on a multi-processor system with varying processing speed. An approximation algorithm of solving the problem is suggested. It is proven that the algorithm has an asymptotic coefficient of efficiensy which is less than or equal to 2.