

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6+618.3.06

В.Т. Ерофеев, Д.В. Комнатный

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КОРПУСЕ С ОТВЕРСТИЕМ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разрабатывается методика для расчета электростатических полей в системах трехмерных тонкостенных корпусов и тонких экранов, выполненных из идеально проводящих материалов. Для численного решения краевой задачи экранирования применяется метод интегральных уравнений. Численное решение этих уравнений проведено с использованием метода граничных элементов. Приводятся результаты вычислительного эксперимента. Исследуется эффективность экранирования потенциала внешнего электростатического поля заряженной пластины, проникающего через отверстие внутрь защитного корпуса.

Введение

В настоящее время метод граничных элементов находит все более широкое применение для решения задач электрофизики и электротехники. В существующих публикациях этим методом были выполнены расчеты электростатического поля в конструкциях разнообразных высоковольтных устройств [1, 2], численно оценены емкости тел сложной геометрической формы [3], произведен анализ электромагнитной совместимости микроэлектронных узлов [4]. Таким образом, метод граничных элементов имеет широкую и многообразную область применения. Одним из вопросов реализации метода является вычисление интегралов по поверхностям граничных элементов от достаточно сложных функций. В известных монографиях по методу граничных элементов [5–7] в качестве универсального предлагается численное интегрирование.

В настоящей работе рассмотрен вариант метода граничных элементов, в котором все интегралы в расчетной системе алгебраических уравнений вычислены аналитически. Эта методика применяется к решению различных краевых задач, возникающих на практике. В частности, в настоящей работе она применена к решению краевой задачи, которая описывает проникновение электростатического поля заряженного источника внутрь тонкостенного корпуса с прямоугольным отверстием. К необходимости решения такой краевой задачи приводит рассмотрение экранирующих свойств корпусов с отверстиями при воздействии внешнего электростатического поля, создаваемого техническими средствами с высоким напряжением. Решение этой проблемы необходимо при конструировании конкурентоспособной электронной техники, отвечающей современным нормативным требованиям.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модельную задачу. В пространстве размещены два технических объекта: источник электростатического поля в виде плоского идеально тонкого прямоугольника $S_{\text{ист}}$ и рецептор помех, представляющий собою корпус в форме параллелепипеда с идеально тонкими стенками из идеального проводника. Поверхность корпуса обозначается $S_{\text{реп}}$. В корпусе имеется отверстие $S_{\text{отв}}$ прямоугольной формы с размерами, сравнимыми с длинами ребер корпуса. Источник заряжен до постоянного потенциала U , а корпус заземлен, т. е. его потенциал равен нулю.

Вводятся следующие обозначения областей: $D = R^3 \setminus (\overline{S_{\text{ист}}} \cup \overline{S_{\text{реп}}})$ – область, в которой распространяется электростатическое поле; $D_{\text{вн}}$ – область внутри корпуса. Для вычисления потенциала электростатического поля в области D поставим краевую задачу. Требуется найти функцию $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, имеющую смысл потенциала электростатического поля, которая удовлетворяет:

– уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ в } D; \quad (1)$$

– граничным условиям

$$u(P)|_{P \in S_{\text{ист}}} = U, \quad (2)$$

$$u(Q)|_{Q \in S_{\text{рец}}} = 0; \quad (3)$$

– условиям на бесконечности

$$u(M) \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty. \quad (4)$$

После определения потенциала $u(M)$ ставится задача вычисления величин, характеризующих электростатическое поле в области $D_{\text{вн}}$.

Решение задачи (1)–(4) ищется в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\int_{S_{\text{рец}}} \frac{\sigma(Q)}{R_{MQ}} dS_Q + \int_{S_{\text{ист}}} \frac{\sigma(P)}{R_{MP}} dS_P \right), M \in D, \quad (5)$$

где $\sigma(Q)$ – поверхностная плотность заряда на рецепторе, Кл/м²;
 $\sigma(P)$ – поверхностная плотность заряда на источнике, Кл/м²;
 ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость среды;
 ϵ_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м;
 R_{MQ} – расстояние между точками M и Q , м.

Для потенциала (5) условия (1) и (4) выполнены. Удовлетворяя граничным условиям (2) и (3), получим систему интегральных уравнений

$$\int_{S_{\text{рец}}} \frac{\bar{\sigma}(Q)}{R_{MQ}} dS_Q + \int_{S_{\text{ист}}} \frac{\bar{\sigma}(P)}{R_{MP}} dS_P = 0, M \in S_{\text{рец}}; \quad (6)$$

$$\int_{S_{\text{рец}}} \frac{\bar{\sigma}(Q)}{R_{MQ}} dS_Q + \int_{S_{\text{ист}}} \frac{\bar{\sigma}(P)}{R_{MP}} dS_P = U, M \in S_{\text{ист}},$$

где $\bar{\sigma}(Q) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sigma(Q)$, $\bar{\sigma}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sigma(P)$ – нормированные поверхностные плотности заряда на рецепторе и на источнике соответственно, В/м.

2. Основные принципы построения метода решения задачи

Для численного решения системы уравнений (6) поверхности $S_{\text{ист}}$ и $S_{\text{рец}}$ разбиваются на прямоугольные граничные элементы $S_{\text{рец}} = \bigcup_i S_i$; $S_{\text{ист}} = \bigcup_j G_j$. Обозначим Q_i – центр элемента S_i ;

P_j – центр элемента G_j . Методом коллокаций получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_i^{N_{\text{рец}}} \bar{\sigma}(Q_i) \int_{S_i} \frac{1}{R_{Q_i Q}} dS_Q + \sum_j^{N_{\text{ист}}} \bar{\sigma}(P_j) \int_{G_j} \frac{1}{R_{Q_i P}} dS_P = 0, l = \overline{1, N_{\text{рец}}}; \quad (7)$$

$$\sum_i^{N_{\text{рец}}} \bar{\sigma}(Q_i) \int_{S_i} \frac{1}{R_{P_k Q}} dS_Q + \sum_j^{N_{\text{ист}}} \bar{\sigma}(P_j) \int_{G_j} \frac{1}{R_{P_k P}} dS_P = U, k = \overline{1, N_{\text{ист}}},$$

где $N_{\text{ист}}$, $N_{\text{рец}}$ – число граничных элементов на рецепторе и на источнике.

Систему (7) запишем в виде

$$[u] = [A][\bar{\sigma}], \quad (8)$$

где $[u] = \begin{bmatrix} u_{\text{рец}} \\ u_{\text{ист}} \end{bmatrix}$ – матрица-столбец потенциалов в центрах граничных элементов; все элементы столбца $[u_{\text{рец}}]$ равны нулю, все элементы столбца $[u_{\text{ист}}]$ равны U ;
 $[A]$ – матрица коэффициентов уравнений;
 $[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{\text{рец}} \\ \bar{\sigma}_{\text{ист}} \end{bmatrix}$ – матрица-столбец нормированной поверхностной плотности зарядов граничных элементов.

Коэффициенты матрицы $[A]$ имеют характерный вид

$$I(M_j) = \int_{S_i} \frac{dS_Q}{R_{M_j Q}}, \quad Q \in S_i, \quad (9)$$

где $M_j = P_j$ или Q_i .

Для вычисления интеграла вида (9) рассматривается геометрия одного граничного элемента. На рис. 1 показаны граничный элемент S_i , центр граничного элемента Q_i , точка наблюдения M_j , произвольная точка на поверхности любого элемента M . Вводятся следующие векторы: $\vec{M}_j M = \vec{\xi}$, $\vec{Q}_i M = \vec{v}$, $\vec{M}_j Q_i = \vec{\eta}$. При этом $\vec{\xi} = \vec{v} + \vec{\eta}$.

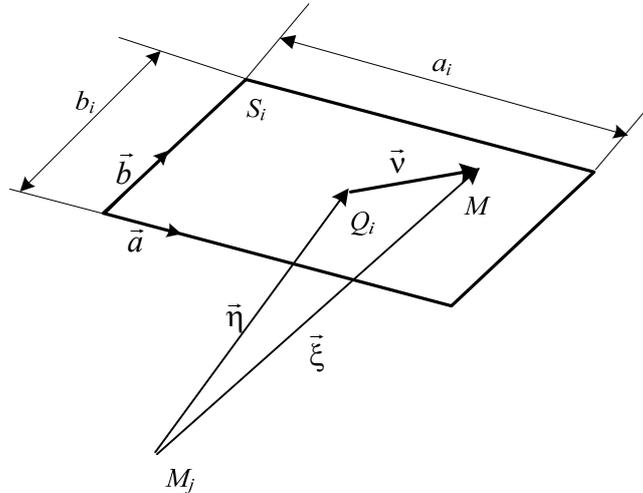


Рис. 1. Векторные соотношения для граничного элемента

На граничном элементе вводится локальная система координат x' , y' с началом в центре граничного элемента. В качестве ортов этой системы приняты единичные векторы \vec{a} и \vec{b} , направления которых совпадают со сторонами граничного элемента длины a_i и b_i соответственно.

Тогда

$$\vec{v} = x' \vec{a} + y' \vec{b}.$$

Следовательно,

$$\vec{\xi} = \vec{\eta} + x' \vec{a} + y' \vec{b}. \quad (10)$$

Расстояние $R_{M_j M}$ выражается через скалярное произведение $R_{M_j M} = |\vec{\xi}| = \sqrt{(\vec{\xi}, \vec{\xi})}$.

Принимая во внимание формулу (10), получаем выражение для скалярного произведения. В нем учитывается, что скалярное произведение орт локальной системы координат $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. В результате

$$(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = (x' + p_1)^2 + \alpha,$$

где $p_1 = (\vec{n}, \vec{a})$, $p_2 = (\vec{n}, \vec{b})$, $\alpha = (y' + p_2)^2 + |\vec{n}|^2 - p_1^2 - p_2^2$.

Тогда интеграл (9) может быть представлен в виде

$$I = \iint_{S_i} \frac{1}{\sqrt{(x' + p_1)^2 + \alpha}} dS_Q = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{dx'}{\sqrt{(x' + p_1)^2 + \alpha}} \right] dy'. \quad (11)$$

Вычисляя внутренний интеграл в (11), получим

$$I = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ \ln \left| c^{(+)} + \sqrt{(y' + p_2)^2 + d^{(+)}} \right| - \ln \left| c^{(-)} + \sqrt{(y' + p_2)^2 + d^{(-)}} \right| \right\} dy', \quad (12)$$

где введены обозначения $c^{(\pm)} = p_1 \pm \frac{a}{2}$, $d^{(\pm)} = \left(p_1 \pm \frac{a}{2} \right)^2 + |\vec{n}|^2 - p_1^2 - p_2^2$.

Первообразная подынтегральной функции в (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \int \ln \left| c + \sqrt{y^2 + d} \right| dy = F(c, d, y) = -\sqrt{d - c^2} \operatorname{Arctg} \left(\frac{cy}{\sqrt{d - c^2} \sqrt{d + y^2}} \right) + \\ + \sqrt{d - c^2} \operatorname{Arctg} \left(\frac{y}{\sqrt{d - c^2}} \right) + y \ln \left(c + \sqrt{d + y^2} \right) + c \ln \left(2 \left(\sqrt{d + y^2} + y \right) \right) - y. \end{aligned} \quad (13)$$

Поэтому интеграл (12) может быть представлен в виде

$$I = F \left(c^+, d^+, p_2 + \frac{b}{2} \right) - F \left(c^+, d^+, p_2 - \frac{b}{2} \right) - \left(F \left(c^-, d^-, p_2 + \frac{b}{2} \right) - F \left(c^-, d^-, p_2 - \frac{b}{2} \right) \right). \quad (14)$$

В случае совпадения точки наблюдения M_j с точкой $Q_i \in S_i$ подынтегральная функция в (9) имеет особенность. Если точка Q_i размещена в центре пластины, интеграл (9) может быть выражен согласно [8] следующим образом:

$$I = \left(2a_i \operatorname{Arsh} \frac{b_i}{a_i} + 2b_i \operatorname{Arsh} \frac{a_i}{b_i} \right). \quad (15)$$

Формулы (14) и (15) позволяют вычислить коэффициенты системы (7) с ее последующим компьютерным решением.

Если распределение нормированной поверхностной плотности заряда по корпусу рецептора и на поверхности источника известно, потенциал электростатического поля в произвольной точке M внутри корпуса вычисляется по формуле

$$u(M) = \sum_j^{N_{\text{ист}}} \bar{\sigma}(P_j) \int_{G_j} \frac{1}{R_{MP}} dS_P + \sum_i^{N_{\text{рец}}} \bar{\sigma}(Q_i) \int_{S_i} \frac{1}{R_{MQ}} dS_Q, \quad (16)$$

где $M \in D_{\text{вн}}$.

Интегралы в формуле (16) вычисляются также с помощью (14).

3. Вычислительный эксперимент

Для вычислительного анализа экранирующей системы конфигурация источника и рецептора показана на рис. 2. Размеры источника $c_{\text{ист}} = 0,5$ м, $b_{\text{ист}} = 0,5$ м были приняты согласно [9], чтобы рассматриваемая задача соответствовала испытательному оборудованию, имеющемуся на практике. Размеры рецептора $a_{\text{рец}} = 0,2$ м, $b_{\text{рец}} = 0,45$ м, $c_{\text{рец}} = 0,35$ м были приняты соответствующими размерам корпуса персонального компьютера. К этим размерам близки размеры корпусов и других выпускающихся промышленностью электронных технических средств. В корпусе рецептора было предусмотрено одно отверстие размером $a_{\text{отв}} = 0,1$ м, $c_{\text{отв}} = 0,05$ м, так как согласно требованиям к современной электронной аппаратуре промышленного и военного назначения в ее корпусах должно быть минимальное количество отверстий, щелей и разъемов. Расстояния отверстия от краев корпуса рецептора составили $h_1 = 0,1$ м, $h_2 = 0,15$ м. Взаимное расположение рецептора и источника, а также расстояние $h = 0,1$ м между ними выбирались в соответствии с указаниями [9]. Для расчетов было принято значение $U = 1$ В, поскольку полученное при этом решение может быть легко пересчитано для других значений потенциала источника поля. При расчетах выбиралось $\varepsilon = 1$.

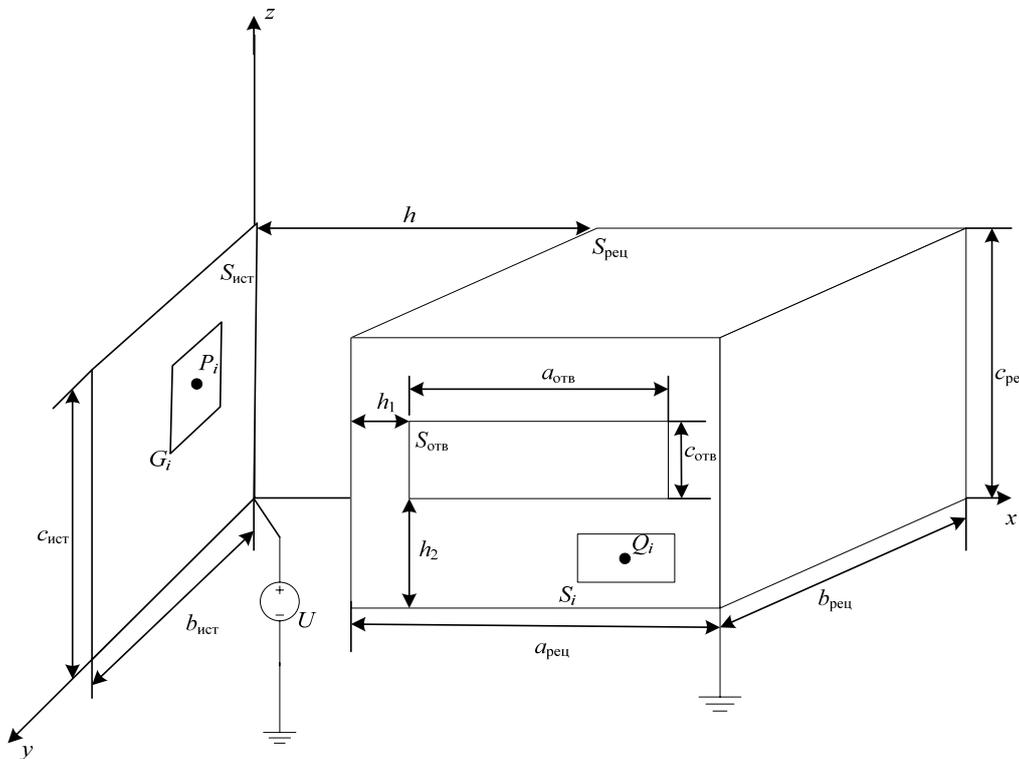


Рис. 2. Расположение объектов в модельной задаче

На поверхностях источника и рецептора формировалась сетка из прямоугольных граничных элементов с равными сторонами, так чтобы густота сетки была одинакова на всех граничных поверхностях задачи. Длина стороны граничного элемента определялась в зависимости от величины частного от деления наименьшей стороны среди сторон прямоугольных фрагментов граничных поверхностей на целое число, задающее густоту сетки. После этого координаты граничных элементов вычислялись методами аналитической геометрии. Сетка, на которой выполнялись расчеты, содержала 1408 элементов, из них 400 элементов на источнике и 1008 на рецепторе.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (8) применялся итерационный метод Некрасова, подробно описанный в [10], в силу его удобства для алгоритмизации.

Расчеты распределения поверхностной плотности заряда и значения потенциала в произвольной точке внутри корпуса были выполнены на специально разработанном программно-математическом обеспечении. В процессе решения модельной задачи исследовались ход процесса последовательных приближений и значения погрешностей расчета потенциалов в центрах граничных элементов. Для расчета задач такого класса могут быть использованы пакеты компьютерных программ сторонних организаций [11, 12].

В процессе последовательных приближений полученные на каждом этапе значения нормированной поверхностной плотности зарядов граничных элементов подставлялись в уравнения системы (8) и по ним вычислялась матрица $[u]_{\text{расч}}$ потенциалов в центрах граничных элементов. Затем вычислялась среднеквадратичная погрешность выполнения граничных условий (2) и (3):

$$\delta q = \sqrt{\frac{\sum_i^{N_{\text{рец}}} (u_i - u_{i\text{расч}})^2 + \sum_j^{N_{\text{ист}}} (u_j - u_{j\text{расч}})^2}{N_{\text{рец}} + N_{\text{ист}}}}, \quad (17)$$

где $u_i = 0$ $u_j = U$ – точные значения потенциала на поверхностях $S_{\text{рец}}$ и $S_{\text{ист}}$ согласно условиям (2) и (3).

Результаты вычислений показали, что в ходе последовательных приближений среднеквадратичная погрешность δq (выражена в относительных единицах) гладко убывает и достигает значения 0,09 (рис. 3).

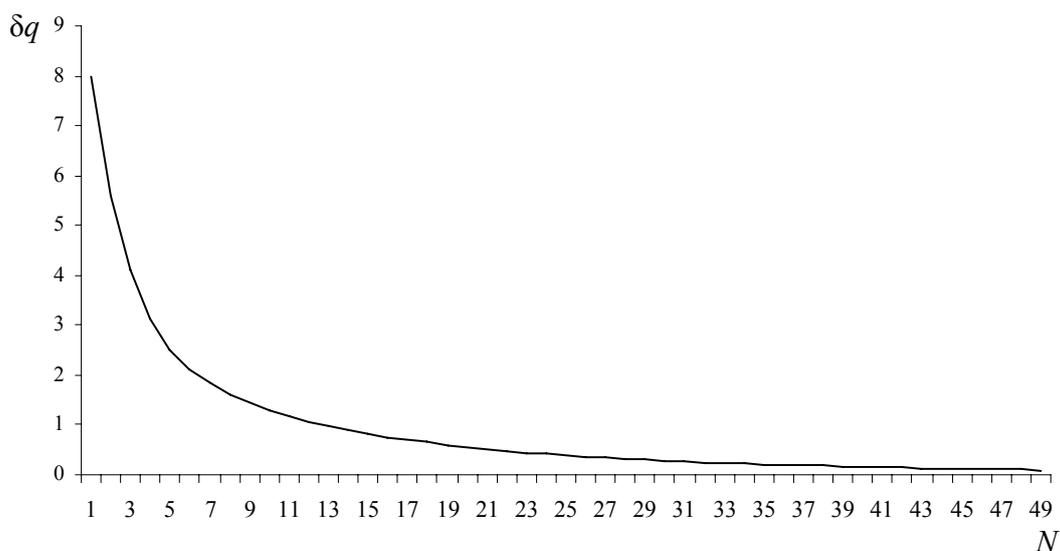


Рис. 3. График изменения погрешности расчета δq с ростом числа итераций N

Следовательно, предлагаемый способ расчета коэффициентов системы (8) не приводит к расходимости итерационного процесса.

По достижении δq значения, меньшего наперед заданной точности расчета, полученные значения нормированной поверхностной плотности зарядов граничных элементов вновь подставляются в уравнения (8) и матрица $[u]_{\text{расч}}$ переычисляется. Затем формируется таблица, в которой для каждого элемента выводятся значения заданного по граничному условию и рассчитанного потенциалов. Если для граничного элемента справедливо граничное условие (2), то вычисляется и относительная погрешность расчета.

Относительная погрешность расчета потенциала в центрах граничных элементов на источнике составляет от 10 до 7 % (что соответствует абсолютной погрешности от 0,1 до 0,07 В) и может быть уменьшена путем выполнения большего числа итераций. Абсолютная погрешность расчета потенциала в центрах граничных элементов, размещенных на корпусе рецептора, имеет порядок 10^{-3} В. Эти результаты допустимы для практики.

Таким образом, полученное решение позволяет анализировать экранирующие свойства корпуса. Для анализа были выбраны несколько точек на отрезке прямой линии, параллельной оси Oy и расположенной внутри корпуса над отверстием. В каждой точке рассчитаны значения потенциала по (10), а затем эффективность экранирования по формуле

$$\Xi = \frac{u_0}{u_{\Xi}},$$

где u_0 – потенциал в точке при отсутствии экрана, В;

u_{Ξ} – потенциал в точке при наличии экрана, В.

Результаты расчетов сведены в таблицу.

Результаты расчета экранирующих свойств корпуса

Точка	Координаты точки, м			Потенциал при наличии экрана u_{Ξ} , В	Потенциал при отсутствии экрана u_0 , В	Эффективность экранирования
	x	y	z			
1	0,2	0,4	0,25	0,036	0,78	21,7
2	0,2	0,35	0,25	0,039	0,79	20,3
3	0,2	0,3	0,25	0,038	0,69	18,2
4	0,2	0,25	0,25	0,038	0,73	19,2
5	0,2	0,20	0,25	0,037	0,75	20,3
6	0,2	0,15	0,25	0,035	0,75	21,4

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что метод граничных элементов дает возможность решать задачи вида (1)–(4), возникающие в различных областях техники, в том числе при конструировании корпусов-экранов электронных технических средств. Решение задачи (1)–(4) может быть получено с требуемой для практики точностью. Рассмотренный метод исследования экранирующих свойств корпуса применим для различных конструкций корпусов электронной аппаратуры.

Можно также сделать вывод, что рассчитанная конструкция корпуса обладает достаточно высокими экранирующими свойствами (табл. 1). Наименьшим потенциалом обладают точки, находящиеся или очень близко к стенке с отверстием, или у стенки, противоположной отверстию. Потенциал точек, находящихся на некотором расстоянии от стенки с отверстием, убывает с удалением точки наблюдения от отверстия. Следовательно, отверстие не снижает существенно эффективность экранирования. Аналогично могут быть проанализированы и свойства корпусов других конструкций.

Статья ориентирована на развитие методики применительно к решению задач экранирования низкочастотных полей тонкостенными оболочками с отверстиями [13].

Работа выполнена по заданию № 20110838 ГПНИ «Информатика и космос».

Авторы выражают искреннюю благодарность заведующему кафедрой «Энергоснабжение» ГГТУ им. П.О. Сухого к. т. н. О.Г. Широкову за предоставленное техническое обеспечение исследований и студенту ГГТУ им. П.О. Сухого Е.А. Плотникову за существенную помощь в разработке и отладке программно-математического обеспечения.

Список литературы

1. Ильин, В.П. Численные методы решения задач электрофизики / В.П. Ильин. – М. : Наука, 1985. – 334 с.
2. Тозони, О.В. Метод вторичных источников в электротехнике / О.В. Тозони. – М. : Энергия, 1975. – 295 с.
3. Das, V.N. Calculation of the Electrical Capacitance of a Truncated Cone / V.N. Das, S.V. Chakrabarty // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. – 1997. – Vol. 39, № 4. – P. 371–374.
4. John, W. EMC of Printed Circuit Boards and Microelectronic Engineering Techniques / W. John // Thirteen International Wroclaw Symposium and Exhibition on Electromagnetic Compatibility / IEEE, Wroclaw Polytechnic Institute. – Wroclaw : Wroclaw Polytechnic Institute, 1996. – P. 14–52.
5. Беннерджи, П.К. Методы граничных элементов в прикладных науках / П.К. Беннерджи, Р. Баттерфильд. – М. : Мир, 1983. – 494 с.
6. Власова, Е.А. Приближенные методы математической физики / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2001. – 700 с.
7. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Телес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
8. Иоссель, Ю.Я. Расчет электрической емкости / Ю.Я. Иоссель, И.С. Кочанов, М.Г. Струнский. – М. : Энергия, 1969. – 240 с.
9. Устойчивость к электростатическим разрядам. Требования и методы испытаний : ГОСТ Р 51317.4.2–99. Взамен ГОСТ 29191–91 ; введ. 1999–12–24. – М. : Изд-во стандартов, 2000. – 26 с.
10. Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. – М. : Физматгиз, 1960. – 656 с.
11. Программы triangle.exe [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle>. – Дата доступа : 10.12.10.
12. ANSYS Emag 12.0. Generates Solutions // ANSYS Advantage. – 2009. – Vol. III, iss. 1. – P. 14.
13. Ерофеенко, В.Т. Экранирование низкочастотного магнитного поля незамкнутой тонкостенной сферической оболочкой / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская, Г.Ч. Шушкевич // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80, вып. 9. – С. 8–15.

Поступила 28.01.11

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by*

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого,
Гомель, пр. Октября, 48
e-mail: toe4031@gstu.by*

V.T. Erofeenko, D.V. Komnatny

**ELECTROSTATIC FIELD CALCULATION IN CABINET WITH AN OPENING
BY BOUNDARY ELEMENT METHOD**

A method is developed for electrostatic field calculation in the system of three-dimensional thin-walled packages and thin screens made from perfect conductive material. The integral equations method is adopted for boundary problem of screening numeric solution. The numeric solution of these equations is carried out with the use of boundary element method. Results of computation experiment are shown. The screening coefficients for potential of outside electrostatic field penetrating through the opening into the protective package are studied.