ИНФОРМАТИКА

2011 июль-сентябрь № 3

УДК 539.3

О.Л. Швед

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАКОНА МУРНАГАНА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ В ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ

Приводятся соотношения закона Мурнагана для изотропного первоначально и анизотропного вследствие пластической деформации материала. Вычисляется функционал вариационного принципа в варьируемой актуальной конфигурации и дается пример численного моделирования.

Введение

Наиболее совершенным геометрически нелинейным законом упругости, вероятно, является закон Мурнагана [1, 2]. Поэтому его следует использовать при обобщении модели упругого материала на упругопластический. Потенциал напряжений, имеющий смысл накопленной энергии упругой деформации, и упругий закон понимаются тогда как обобщенные [3], т. е. вместо деформационного градиента используется заменяющий его неособенный тензор $\mathbf{F}_e$. Для изотропного материала эти тензоры совпадают. В упругом состоянии их материальные производные совпадают, а в пластическом состоянии $\mathbf{F}_e$ определяется с использованием определяющих уравнений из полярного разложения $\mathbf{F}_e = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{O}$ – собственно ортогональный тензор, сопровождающий упругую деформацию, а $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – меры упругих искажений. Вследствие пластической деформации изотропный материал становится анизотропным. Представляет интерес описание явления развития анизотропии. Закон Мурнагана требуется представить для этого в удобном виде. Будут получены соотношения для общего вида анизотропии и ее частных случаев. С использованием вариационного принципа в варьируемой актуальной конфигурации изучено упругое поведение материала при повторном простом растяжении в направлении, ортогональном первоначальному, которое сопровождалось пластической деформацией. Поскольку в работах [1, 2] имеется разнобой в обозначениях, будем придерживаться обозначений и языка «прямого» тензорного исчисления монографии [2]. При выводе соотношений используются средства символьных вычислений системы Mathcad-8.

1. Изотропный материал

Для изотропного материала потенциал напряжений и пятиконстантный закон упругости Мурнагана можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} э_I &= 4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3)I_1 + 4^{-1}(2\lambda + 4\mu - 3\nu_1 - 10\nu_2 - 8\nu_3)I_1^2 + \\ &+(-2\mu + 3\nu_2 + 4\nu_3)I_2 - (\nu_2 + 2\nu_3)I_1 I_2 + 12^{-1}(\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3)I_1^3 + 2\nu_3 I_3); \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{T} = 2(\sqrt{I_3})^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э_I}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} = 2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2) \\ (\varphi_0 = a_0 I_3,\ \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2,\ \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1); \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} a_0 = 2^{-1}\nu_3,\ \ b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3),\ \ b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \\ b_2 = 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2),\ \ b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3),\ \ c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3),\ \ c_1 = -b_3, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор; $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши; $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}$ – меры деформации Коши – Грина и Фингера; I_1, I_2, I_3 – их главные первый, второй и третий инварианты; λ, μ – постоянные Ляме второго и ν_1, ν_2, ν_3 – третьего порядков. Используя теорему Гамильтона – Кэли $\mathbf{V}^3 = L_3\mathbf{E} - L_2\mathbf{V} + L_1\mathbf{V}^2$ ($\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}$) и формулы $I_1 = L_1^2 - 2L_2$, $I_2 = L_2^2 - 2L_1L_3$, $I_3 = L_3^2$ (L_1, L_2, L_3 – соответствующие главные инварианты $\mathbf{V}$), преобразуем соотношение (2):

$$\begin{gathered}\mathbf{T} = 2L_3^{-1}(\psi_0\mathbf{E} + \psi_1\mathbf{V} + \psi_2\mathbf{V}^2)(\psi_0 = a_0L_3^2 + c_0L_1L_3 + c_1L_1L_3I_1, \psi_1 = c_0(L_3 - L_1L_2) + c_1(-L_1^3L_2 + \\ + L_1^2L_3 - 2L_2L_3 + 2L_1L_2^2), \psi_2 = b_0 + b_1I_1 + b_2I_1^2 + c_0(L_1^2 - L_2) + c_1(L_1^4 - 3L_1^2L_2 + L_2^2 + 2L_1L_3)).\end{gathered} \tag{4}$$

2. Триклинный материал

Подход Мурнагана заключается в представлении удельной потенциальной энергии деформации полиномом по степеням компонент тензора Коши – Грина $\mathbf{C} = 2^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{E})$. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ – неподвижный ортонормированный триэдр. Учитывая анизотропные структуры до третьей степени, введем потенциал упругих напряжений в форме Мурнагана [1]:

$$э = э_I + \mathbf{b} \cdot\cdot \mathbf{C} + э_2 + э_3 - э_0\,; \tag{5}$$

$$\begin{gathered}э_2 = \sum_{i=1}^{3}(\delta_i(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i)^2 + \delta_{3+i}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{11+i}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i + \delta_{15+i}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_i) + \\ + \delta_7(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{11}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{15}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_8\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_9\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{10}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{19}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{20}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{21}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2;\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}э_3 = \delta_{22}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^3 + \delta_{23}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^3 + \delta_{24}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \delta_{25}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ + \delta_{26}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{27}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \delta_{28}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{29}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1 + \delta_{30}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{31}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{32}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{33}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{34}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \\ + \delta_{35}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{36}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{37}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \\ + \delta_{38}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{39}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{40}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{41}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{42}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{43}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{44}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{45}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{46}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{47}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{48}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{49}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{50}(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{51}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{52}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \\ + \delta_{53}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^2 + \delta_{54}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2)^3 + \delta_{55}(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \delta_{56}(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^3 + \\ + \delta_{57}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{58}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \delta_{59}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3)^2 + \\ + \delta_{60}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{61}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{62}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{63}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{64}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{65}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{66}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2 + \delta_{67}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{68}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{69}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{70}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{71}\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{72}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{73}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{74}\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \\ + \delta_{75}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{76}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3 + \delta_{77}\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}_3,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathbf{b} \cdot\cdot \mathbf{C}, э_2, э_3$ – анизотропные структуры первой, второй и третьей степеней; $э_0$ – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $э \geq 0$. Начальные значения параметров анизотропии

$\delta_j = 0$, симметричного тензора $\mathbf{b} = 0$, тогда э с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал $э_I$.

Из выражений (2)–(7), переходя к мере $\mathbf{G}$, поскольку представление через тензор деформации $\mathbf{C}$ более громоздкое, получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} = 2L_3^{-1}(\psi_0\mathbf{E} + \psi_1\mathbf{V} + \psi_2\mathbf{V}^2) + L_3^{-1}\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{V} + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j, \tag{8}$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{O}$ – тензор остаточных микронапряжений, возникающих вследствие пластической деформации. Выражения для тензоров $\mathbf{T}_j$ несложно вычисляются и поэтому для краткости здесь опускаются. При рассмотрении частных видов анизотропии они будут приведены ниже. В покомпонентном представлении в базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ тензора $\mathbf{C}$ и «повернутого» тензора $\mathbf{C}'$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= x_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + x_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + x_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + x_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2);\\
\mathbf{C}' &= y_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 + y_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 + y_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3 + y_4(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1) + y_5(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1) + y_6(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2).
\end{aligned} \tag{9}$$

Из (6), (9) и (7), (9) получаем соответственно

$$\begin{aligned}
&э_2(\mathbf{C}) - э_2(\mathbf{C}') = \delta_1(x_1^2 - y_1^2) + \delta_2(x_2^2 - y_2^2) + \delta_3(x_3^2 - y_3^2) + \delta_7(x_4^2 - y_4^2) + \delta_{11}(x_5^2 - y_5^2) +\\
&+\delta_{15}(x_6^2 - y_6^2) + \delta_4(x_1x_4 - y_1y_4) + \delta_5(x_2x_4 - y_2y_4) + \delta_6(x_3x_4 - y_3y_4) + \delta_8(x_1x_2 - y_1y_2) +\\
&+\delta_9(x_2x_3 - y_2y_3) + \delta_{10}(x_1x_3 - y_1y_3) + \delta_{12}(x_1x_5 - y_1y_5) + \delta_{13}(x_2x_5 - y_2y_5) +\\
&+\delta_{14}(x_3x_5 - y_3y_5) + \delta_{16}(x_1x_6 - y_1y_6) + \delta_{17}(x_2x_6 - y_2y_6) + \delta_{18}(x_3x_6 - y_3y_6) +\\
&+\delta_{19}(x_4x_5 - y_4y_5) + \delta_{20}(x_4x_6 - y_4y_6) + \delta_{21}(x_5x_6 - y_5y_6);
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&э_3(\mathbf{C}) - э_3(\mathbf{C}') = \delta_{22}(x_1^3 - y_1^3) + \delta_{23}(x_2^3 - y_2^3) + \delta_{24}(x_3^3 - y_3^3) + \delta_{25}(x_1^2x_2 - y_1^2y_2) +\\
&+\delta_{26}(x_1^2x_3 - y_1^2y_3) + \delta_{27}(x_2^2x_1 - y_2^2y_1) + \delta_{28}(x_2^2x_3 - y_2^2y_3) + \delta_{29}(x_3^2x_1 - y_3^2y_1) +\\
&+\delta_{30}(x_3^2x_2 - y_3^2y_2) + \delta_{31}(x_1x_2x_3 - y_1y_2y_3) + \delta_{32}(x_5^2x_1 - y_5^2y_1) + \delta_{33}(x_5^2x_2 - y_5^2y_2) +\\
&+\delta_{34}(x_5^2x_3 - y_5^2y_3) + \delta_{35}(x_4^2x_5 - y_4^2y_5) + \delta_{36}(x_4^2x_6 - y_4^2y_6) + \delta_{37}(x_5^2x_4 - y_5^2y_4) +\\
&+\delta_{38}(x_5^2x_6 - y_5^2y_6) + \delta_{39}(x_6^2x_4 - y_6^2y_4) + \delta_{40}(x_6^2x_5 - y_6^2y_5) + \delta_{41}(x_4x_5x_6 - y_4y_5y_6) +\\
&+\delta_{42}(x_1^2x_4 - y_1^2y_4) + \delta_{43}(x_1^2x_5 - y_1^2y_5) + \delta_{44}(x_1^2x_6 - y_1^2y_6) + \delta_{45}(x_2^2x_4 - y_2^2y_4) +\\
&+\delta_{46}(x_2^2x_5 - y_2^2y_5) + \delta_{47}(x_2^2x_6 - y_2^2y_6) + \delta_{48}(x_3^2x_4 - y_3^2y_4) + \delta_{49}(x_3^2x_5 - y_3^2y_5) +\\
&+\delta_{50}(x_3^2x_6 - y_3^2y_6) + \delta_{51}(x_4^2x_1 - y_4^2y_1) + \delta_{52}(x_4^2x_2 - y_4^2y_2) + \delta_{53}(x_4^2x_3 - y_4^2y_3) +\\
&+\delta_{54}(x_4^3 - y_4^3) + \delta_{55}(x_5^3 - y_5^3) + \delta_{56}(x_6^3 - y_6^3) + \delta_{57}(x_6^2x_1 - y_6^2y_1) + \delta_{58}(x_6^2x_2 -\\
&-y_6^2y_2) + \delta_{59}(x_6^2x_3 - y_6^2y_3) + \delta_{60}(x_1x_2x_4 - y_1y_2y_4) + \delta_{61}(x_1x_2x_5 - y_1y_2y_5) +\\
&+\delta_{62}(x_1x_2x_6 - y_1y_2y_6) + \delta_{63}(x_1x_3x_4 - y_1y_3y_4) + \delta_{64}(x_1x_3x_5 - y_1y_3y_5) + \delta_{65}(x_1x_3x_6 -\\
&-y_1y_3y_6) + \delta_{66}(x_2x_3x_4 - y_2y_3y_4) + \delta_{67}(x_2x_3x_5 - y_2y_3y_5) + \delta_{68}(x_2x_3x_6 - y_2y_3y_6) +\\
&+\delta_{69}(x_1x_4x_5 - y_1y_4y_5) + \delta_{70}(x_1x_4x_6 - y_1y_4y_6) + \delta_{71}(x_1x_5x_6 - y_1y_5y_6) + \delta_{72}(x_2x_4x_5 -\\
&-y_2y_4y_5) + \delta_{73}(x_2x_4x_6 - y_2y_4y_6) + \delta_{74}(x_2x_5x_6 - y_2y_5y_6) + \delta_{75}(x_3x_4x_5 - y_3y_4y_5) +\\
&+\delta_{76}(x_3x_4x_6 - y_3y_4y_6) + \delta_{77}(x_3x_5x_6 - y_3y_5y_6).
\end{aligned} \tag{11}$$

3. Трансверсально-изотропный материал

Изотропный скаляр в этой группе симметрии остается неизменным при преобразовании поворота на любой угол φ вокруг направления $\mathbf{c}$ – оси трансверсальной изотропии. Пусть $\mathbf{c}=\mathbf{c}_2: э(\mathbf{C})-э(\mathbf{C}')=0,\ \mathbf{C}'=(\mathbf{E}\cos\varphi+(1-\cos\varphi)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_2\times\mathbf{E}\sin\varphi)\cdot\mathbf{C}\cdot(\mathbf{E}\cos\varphi+(1-\cos\varphi)\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_2\times\mathbf{E}\sin\varphi)$. Обозначим $a=\sin\varphi, b=\cos\varphi$ и с учетом (10), (11) находим

$$\begin{gathered} y_1 = y_1 b^2 + x_3 a^2 - 2x_5 ab,\quad y_2 = x_2,\quad y_3 = x_1 a^2 + x_3 b^2 + 2x_5 ab,\\ y_4 = x_4 b - x_6 a,\quad y_5 = (x_1 - x_3)ab + x_5(b^2 - a^2),\quad y_6 = x_6 b + x_4 a. \end{gathered} \tag{12}$$

Если первоначально материал был изотропным, получаем $\mathbf{b}=b\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$. Положим $\varphi=\pi/4$. Приравнивая нулю коэффициенты при $x_n x_m$ и $x_n x_m x_k$ форм (10)–(12), получаем две системы однородных линейных уравнений относительно δ_j:

$$\begin{gathered} -4\delta_4+(7\sqrt{2}-8)\delta_6+(3\sqrt{2}-4)\delta_{16}+3\sqrt{2}\delta_4-(1+\sqrt{2})\delta_{18}=0, \delta_{12}+2\delta_{30}-\delta_3+\delta_1=0,\\ 2\delta_3+3\delta_{12}-\delta_{14}-2\delta_1=0, 3\delta_{14}-\delta_{12}+2\delta_3-2\delta_1=0, -\delta_1+\delta_{11}-\delta_3+\delta_{10}=0,\\ 2\delta_1+\delta_{12}-\delta_3-\delta_{11}-\delta_{10}+\delta_{14}=0, -\delta_{12}-\delta_{14}-\delta_{11}+3\delta_3-\delta_{10}-\delta_1=0, \delta_6-\delta_4+\delta_{19}=0,\\ \delta_9-\delta_{13}-\delta_8=0, \delta_{21}+\delta_{16}-\delta_{18}=0, \delta_9-\delta_8=0, \delta_6-\delta_4=0, \delta_3-\delta_1=0, \delta_{18}-\delta_{16}=0,\\ \delta_{21}=\delta_{19}=\delta_{13}=0; \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \delta_{28}-\delta_{27}=0, \delta_{67}+2\delta_{30}-2\delta_{25}+\delta_{61}=0, \delta_{73}-\delta_{52}+\delta_{58}=0, \delta_{64}+4\delta_{24}-4\delta_{22}=0,\\ \delta_{76}+\delta_{53}-\delta_{51}+\delta_{59}-\delta_{57}-\delta_{70}-2\delta_{35}=0, \delta_{34}+\delta_{26}+\delta_{24}-4\delta_{22}=0,\\ -\delta_{51}+\delta_{76}-\delta_{40}-\delta_{53}-\delta_{59}+2\delta_{41}-\delta_{35}+\delta_{70}+3\delta_{57}=0, \delta_{33}-\delta_{25}-\delta_{30}+\delta_{31}=0,\\ \delta_{65}+\delta_{63}-\delta_{42}-\delta_{44}-\delta_{48}+\sqrt{2}\delta_{37}-\delta_{50}=0, \delta_{29}-\delta_{26}-\delta_{24}+\delta_{22}=0,\\ \sqrt{2}\delta_{77}-\sqrt{2}\delta_{75}-2\sqrt{2}\delta_{63}+\sqrt{2}\delta_{38}-(2+\sqrt{2})\delta_{37}-\sqrt{2}\delta_{69}+\sqrt{2}\delta_{71}+\\ +(2\sqrt{2}-8)\delta_{44}+2\sqrt{2}\delta_{50}=0, \delta_{32}-3\delta_{24}+\delta_{26}=0,\\ \delta_{36}=\delta_{39}=\delta_{43}=\delta_{45}=\delta_{46}=\delta_{47}=\delta_{49}=\delta_{54}=\delta_{55}=\delta_{56}=0. \end{gathered} \tag{14}$$

Решая системы (13), (14), находим, что ненулевыми могут быть только параметры δ_j, где $j\in\{1-3,7-11,15,22-34\}$, и справедливы равенства

$$\begin{gathered} \delta_1=\delta_3,\quad \delta_9=\delta_8,\quad \delta_{11}=2\delta_1-\delta_{10},\quad \delta_7=\delta_{15};\\ \delta_{22}=\delta_{24}=\delta_{26}=\delta_{29},\quad \delta_{25}=\delta_{30}=\delta_{31},\quad \delta_{27}=\delta_{28},\quad \delta_{32}=\delta_{34}=2\delta_{22},\quad \delta_{33}=\delta_{25}. \end{gathered} \tag{15}$$

Необходимые условия трансверсально-изотропного материала (15) с учетом нулевых значений δ_j являются и достаточными, как следует из тождеств, полученных из (10)–(12) и (15):

$$\begin{gathered} э_2(\mathbf{C})-э_2(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(\delta_3 a^2 x_3^2+\delta_{10}a^2 x_1 x_3+\delta_3 a^2 x_1^2+2\delta_3 a^2 x_5^2-\delta_{10}a^2 x_5^2-\delta_{10}b^2 x_5^2+\\ +\delta_8 x_2 x_3+\delta_8 x_1 x_2+\delta_{10}b^2 x_1 x_3+\delta_7 x_6^2+\delta_3 b^2 x_3^2+\delta_7 x_4^2+2\delta_3 b^2 x_5^2+\delta_3 b^2 x_1^2+\delta_3 x_3^2+\\ +\delta_{10}x_1 x_3+\delta_3 x_1^2+2\delta_3 b^2 x_5^2+\delta_3 b^2 x_1^2); \end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\text{э}_3(\mathbf{C})-\text{э}_3(\mathbf{C}')=(1-a^2-b^2)(\delta_{22}(a^2x_1^2x_3+2a^2x_5^2x_3+x_1^3+2a^2x_5^2x_3+x_3^3+7x_2^2x_1+a^4x_1^3+a^2x_1^3+\\
+b^4x_3^3+x_1^2x_3+b^4x_1^3+b^2x_1^3+a^4x_3^3+a^2x_3^3+b^2x_3^3+2x_5^2x_1+x_3^2x_1+b^4x_3^2x_1+2b^2x_5^2x_1+\\
+2b^4x_5^2x_3+b^2x_3^2x_1+2b^4x_5^2x_1+2b^2x_5^2x_3+b^2x_1^2x_3+b^4x_1^2x_3+a^4x_3^2x_1+2a^4x_5^2x_1+a^4x_1^2x_3+\\
+2a^4x_5^2x_3+2a^2b^2x_3^3+2a^2b^2x_1^2x_3+4a^2b^2x_5^2x_1+4a^2b^2x_5^2x_3+2a^2b^2x_3^2x_1+2a^2b^2x_1^3+\\
+a^2x_3^2x_1+2a^2x_5^2x_1)+\delta_{25}(x_1x_2x_3+x_5^2x_2+x_3^2x_2+x_1^2x_2+b^2x_5^2x_2+b^2x_1x_2x_3+b^2x_1^2x_2+\\
+b^2x_3^2x_2+a^2x_5^2x_2+a^2x_1x_2x_3+a^2x_1^2x_2+a^2x_3^2x_2)+\delta_{28}x_2^2x_3).
\end{gathered}
$$

Также переходя в (5)–(7) к мере $\mathbf{G}$, находим потенциал напряжений

$$
\begin{gathered}
\text{э}=\text{э}_I+2^{-1}\mathbf{b}\cdot\cdot\mathbf{G}+4^{-1}(\delta_1\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-2)+\delta_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-2)+\delta_3\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-2)+\\
+\delta_8(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2)+\delta_9(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)+\\
+\delta_{10}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)+\delta_7(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2)^2+\delta_{11}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{15}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2)+\\
+8^{-1}(\delta_{22}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^3+1)+\delta_{23}((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^3+1)+\delta_{24}((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^3+1)+\delta_{25}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-\\
-1)+1)+\delta_{26}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)+1)+\delta_{27}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)+1)+\\
+\delta_{28}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)+1)+\delta_{29}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)+1)+\\
\delta_{30}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)+1)+\delta_{31}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)+1)+\\
+\delta_{32}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{33}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{34}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2)-\text{э}_0.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Из (16), используя формулу $\dfrac{\partial\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j}{\partial\mathbf{G}}=2^{-1}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j+\mathbf{c}_j\mathbf{c}_i)$ [2], получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши (8), в котором

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}_i=L_3^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V},\ \mathbf{T}_8=L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V};\\
\mathbf{T}_9=L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V};\\
\mathbf{T}_{10}=L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3)\cdot\mathbf{V};\\
\mathbf{T}_7=L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V},\mathbf{T}_{11}=L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V};\\
\mathbf{T}_{15}=L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3)\cdot\mathbf{V},\mathbf{T}_{21+i}=4^{-1}3L_3^{-1}(\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V};\\
\mathbf{T}_{25}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V});\\
\mathbf{T}_{26}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V});\\
\mathbf{T}_{27}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V});\\
\mathbf{T}_{28}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V});\\
\mathbf{T}_{29}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V});\\
\mathbf{T}_{30}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V});\\
\mathbf{T}_{31}=4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\\
+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V});
\end{gathered}
\tag{17}
$$

$$\mathbf{T}_{32}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V});$$

$$\mathbf{T}_{33}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V});$$

$$\mathbf{T}_{34}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V})$$

$$(\mathbf{C}_i=\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{c}_i=\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{O},\ i=1,2,3).$$

Отметим, что если осью трансверсальной изотропии является $\mathbf{c}=\mathbf{c}_1$, то согласно (6), (7) и (15) ненулевыми могут быть только параметры δ_j, где $j\in\{1-3,7-11,15,22-31,57-59\}$ и (15) переписывается следующим образом:

$$\begin{gathered}\delta_2=\delta_3,\ \ \delta_{10}=\delta_8,\ \ \delta_{15}=2\delta_2-\delta_9,\ \ \delta_7=\delta_{11};\\ \delta_{23}=\delta_{24}=\delta_{28}=\delta_{30},\ \ \delta_{27}=\delta_{29}=\delta_{31},\ \ \delta_{25}=\delta_{26},\ \ \delta_{58}=\delta_{59}=2\delta_{23},\ \ \delta_{57}=\delta_{27}.\end{gathered}\tag{18}$$

Последние слагаемые в (16) и три последних равенства в (17) заменяются соответственно на

$$\delta_{57}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{58}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2+\delta_{59}(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2);$$

$$\begin{gathered}\mathbf{T}_{57}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V});\\ \mathbf{T}_{58}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V});\\ \mathbf{T}_{59}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V}).\end{gathered}\tag{19}$$

4. Ортотропный материал

Установим зависимости для параметров анизотропии при условии, что материал является ортотропным и ортонормированные векторы $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ определяют оси симметрии материала. Скаляр, инвариантный в рассматриваемой группе симметрии, остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\varphi=\pi$ вокруг направления осей $\mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c}_3$ [2]:

$$э(\mathbf{C})-э(\mathbf{C}')=0,\ \ \mathbf{C}'=(-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2)\cdot\mathbf{C}\cdot(-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2);\tag{20}$$

$$э(\mathbf{C})-э(\mathbf{C}')=0,\ \ \mathbf{C}'=(-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)\cdot\mathbf{C}\cdot(-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3).\tag{21}$$

Для оси $\mathbf{c}_1$ указанное условие выполняется автоматически, так как справедливо равенство $(-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2)\cdot(-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)=-\mathbf{E}+2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$ $(\mathbf{E}=\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$. В покомпонентном представлении (9) в базисе $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3$ тензора $\mathbf{C}$ и «повернутого» тензора $\mathbf{C}'$ имеем соответственно

$$y_1=x_1,y_2=x_2,y_3=x_3,y_4=-x_4,y_5=x_5,y_6=-x_6;\tag{22}$$

$$y_1=x_1,y_2=x_2,y_3=x_3,y_4=x_4,y_5=-x_5,y_6=-x_6.\tag{23}$$

Как следует из (22) и (23), тензор $\mathbf{b}=b_{11}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+b_{22}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+b_{33}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$. Из (10), (11) и (22) находим

$$\delta_4x_1x_4+\delta_5x_2x_4+\delta_6x_3x_4+\delta_{16}x_1x_6+\delta_{17}x_2x_6+\delta_{18}x_3x_6+\delta_{19}x_4x_5+\delta_{21}x_5x_6=0;\tag{24}$$

$$\begin{gathered}\delta_{62}x_1x_2x_6+\delta_{63}x_1x_3x_4+\delta_{65}x_1x_3x_6+\delta_{66}x_2x_3x_4+\delta_{68}x_2x_3x_6+\delta_{54}x_5^2x_1+\delta_{56}x_5^2x_3+\delta_{48}x_3^2x_4+\\ +\delta_{50}x_3^2x_6+\delta_{36}x_4^2x_6+\delta_{37}x_5^2x_4+\delta_{38}x_5^2x_6+\delta_{39}x_6^2x_4+\delta_{42}x_1^2x_4+\delta_{44}x_1^2x_6+\delta_{45}x_2^2x_4+\delta_{47}x_2^2x_6+\\ +\delta_{69}x_1x_4x_5+\delta_{71}x_1x_5x_6+\delta_{72}x_2x_4x_5+\delta_{74}x_2x_5x_6+\delta_{75}x_3x_4x_5+\delta_{77}x_3x_5x_6+\delta_{60}x_1x_2x_4=0.\end{gathered}\tag{25}$$

Аналогично из (10), (11) и (23) получаем

$$\delta_{12}x_1x_5+\delta_{13}x_2x_5+\delta_{14}x_3x_5+\delta_{16}x_1x_6+\delta_{17}x_2x_6+\delta_{18}x_3x_6+\delta_{19}x_4x_5+\delta_{20}x_5x_6=0; \qquad (26)$$

$$\begin{gathered}\delta_{55}x_5^2x_2+\delta_{56}x_5^2x_3+\delta_{35}x_4^2x_5+\delta_{49}x_3^2x_5+\delta_{50}x_3^2x_6+\delta_{36}x_4^2x_6+\delta_{38}x_5^2x_6+\delta_{40}x_6^2x_5+\delta_{43}x_1^2x_5+\\ +\delta_{44}x_1^2x_6+\delta_{46}x_2^2x_5+\delta_{47}x_2^2x_6+\delta_{69}x_1x_4x_5+\delta_{70}x_1x_4x_6+\delta_{72}x_2x_4x_5+\delta_{73}x_2x_4x_6+\delta_{75}x_3x_4x_5+\\ +\delta_{76}x_3x_4x_6+\delta_{61}x_1x_2x_5+\delta_{62}x_1x_2x_6+\delta_{64}x_1x_3x_5+\delta_{65}x_1x_3x_6+\delta_{67}x_2x_3x_5+\delta_{68}x_2x_3x_6=0.\end{gathered} \qquad (27)$$

Из (24)–(27) в силу произвольности компонент x_ix_j и $x_ix_jx_k$ находим, что ненулевыми могут быть только параметры анизотропии δ_j, где $j\in\{1-3,7-11,15,22-34,41,51-53,57-59\}$. Следовательно, для ортотропного материала соотношение (16) надо дополнить слагаемым

$$8^{-1}(\delta_{41}((\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)-1)+\sum_{i=1}^{3}(\delta_{50+i}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_{i1}+\delta_{56+i}(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i)),$$

а (17) – следующими равенствами:

$$\mathbf{T}_{41}=4^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V});$$

$$\mathbf{T}_{50+i}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1)\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V});$$

$$\mathbf{T}_{56+i}=4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_i\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3)\cdot\mathbf{V}+(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)^2\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_i\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}).$$

5. Функционал вариационного принципа

При исследовании нелинейно упругого поведения материала часто оказывается полезным вариационный принцип в варьируемой актуальной конфигурации [2]. Для трансверсально-изотропного материала вычислим функционал вариационного принципа и рассмотрим пример численного моделирования.

Здесь будет удобнее использовать (2) вместо (4) в соотношении (8). Запишем материальную производную тензора $\mathbf{F}_e$: $\dot{\mathbf{F}}_e=\nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}_e$ [2], где $\mathbf{v}$ – вектор скорости; $\nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}}$ – его градиент. Вычислим материальные производные мер упругой деформации Коши – Грина и Фингера:

$$\dot{\mathbf{G}}=(\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}_e)^{\cdot}=\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot(\nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}}+\nabla\mathbf{v})\cdot\mathbf{F}_e=2\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}_e,\ \dot{\mathbf{F}}=(\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{F}_e^{\mathbf{T}})^{\cdot}=\nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{v}, \qquad (28)$$

где $\mathbf{D}$ – тензор скорости деформаций.

Учитывая, что материальные производные инвариантов имеют вид

$$\dot{I}_1=\mathbf{E}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}=2\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D},\ \dot{I}_2=(\mathbf{E}I_1-\mathbf{F})\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}=2(I_1\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D}-\mathbf{F}^2\cdot\cdot\mathbf{D}),\ \dot{I}_3=I_3\mathbf{F}^{-1}\cdot\cdot\dot{\mathbf{F}}=2I_3\nabla\cdot\mathbf{v},$$

вычислим материальную производную тензора $\mathbf{T}_0=2(\sqrt{I_3})^{-1}(\varphi_0\mathbf{E}+\varphi_1\mathbf{F}+\varphi_2\mathbf{F}^2)$. Получаем

$$((\sqrt{I_3})^{-1})^{\cdot}=-2^{-1}((\sqrt{I_3})^{-3})2I_3\nabla\cdot\mathbf{v}=-(\sqrt{I_3})^{-1}\nabla\cdot\mathbf{v},$$

$$(\varphi_0\mathbf{E}+\varphi_1\mathbf{F}+\varphi_2\mathbf{F}^2)^{\cdot}=\dot{\varphi}_0\mathbf{E}+\dot{\varphi}_1\mathbf{F}+\dot{\varphi}_2\mathbf{F}^2+\varphi_1(\nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{v})+\varphi_2(\nabla\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{F}^2+\mathbf{F}^2\cdot\nabla\mathbf{v}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}),$$

$$\dot{\varphi}_1=(b_0+b_1I_1+b_2I_1^2+b_3I_2)^{\cdot}=2((b_1+(2b_2+b_3)I_1)\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D}+c_1\mathbf{F}^2\cdot\cdot\mathbf{D}),$$

$$\dot{\varphi}_0 = (a_0 I_3)^{\cdot} = 2a_0 I_3 \nabla \cdot \mathbf{v}\,, \quad \dot{\varphi}_2 = (c_0 + c_1 I_1)^{\cdot} = 2c_1 \mathbf{F} \cdot\cdot \mathbf{D}\,,$$

$$\dot{\mathbf{T}}_0 = -\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0 \cdot \nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}_0 + 4L_3^{-1}(a_0 I_3 \nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{E} + ((b_1 + (2b_2 + b_3) I_1)\mathbf{F} \cdot\cdot \mathbf{D} +$$
$$+ c_1 \mathbf{F}^2 \cdot\cdot \mathbf{D})\mathbf{F} + c_1 \mathbf{F} \cdot\cdot \mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \varphi_0 \mathbf{D} + \varphi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}).$$

Далее вычислим

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V})^{\cdot} = (\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}})^{\cdot} = \nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} + \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathbf{T}} \cdot \nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \cdot \nabla\mathbf{v}.$$

Материальные производные тензоров $\mathbf{T}_j$ в (17) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{T}}_j = -\nabla \cdot \mathbf{v}\mathbf{T}_j + \nabla\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{T}_j + \mathbf{T}_j \cdot \nabla\mathbf{v} + \mathbf{S}_j\,.$$

Находим тензоры $\mathbf{S}_j$, используя соотношения $(\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_s)^{\cdot} = (\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_s)^{\cdot} = 2\mathbf{C}_k \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_s$:

$$\mathbf{S}_i = 2\delta_1 L_3^{-1} \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \;\; (i = 1,2,3);$$

$$\mathbf{S}_7 = \delta_7 L_3^{-1} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}\,;$$

$$\mathbf{S}_8 = \delta_8 L_3^{-1}(\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V})\,;$$

$$\mathbf{S}_9 = \delta_9 L_3^{-1}(\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V})\,;$$

$$\mathbf{S}_{10} = \delta_{10} L_3^{-1}(\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V})\,;$$

$$\mathbf{S}_{11} = \delta_{11} L_3^{-1} \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_1\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{V}\,;$$

$$\mathbf{S}_{15} = \delta_{15} L_3^{-1} \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot (\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}\,;$$

$$\mathbf{S}_{21+i} = 3L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}\,;$$

$$\mathbf{S}_{25} = L_3^{-1}((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} +$$
$$+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{26} = L_3^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} +$$
$$+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{27} = L_3^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} +$$
$$+ (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{28} = L_3^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} +$$
$$+ (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{29} = L_3^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} +$$
$$+ (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{30} = L_3^{-1}((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} +$$
$$+ (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{31}=2^{-1}L_3^{-1}(\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+$$
$$+\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+$$
$$+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-1)\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}).$$

Аналогично несложно вычисляются и другие тензоры $\mathbf{S}_j$. В частности, из (18) имеем

$$\mathbf{S}_{57}=2^{-1}L_3^{-1}(4\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_1-$$
$$-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V})+\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_1\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V});$$

$$\mathbf{S}_{58}=2^{-1}L_3^{-1}(4\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_2-$$
$$-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V})+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_2\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V});$$

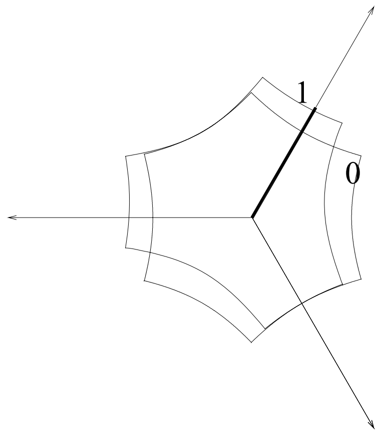
$$\mathbf{S}_{59}=2^{-1}L_3^{-1}(4\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}+\mathbf{C}_2\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3(\mathbf{c}_3\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3-$$
$$-1)\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V})+\mathbf{C}_3\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_3\mathbf{c}_2\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_3\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_2\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\mathbf{C}_2)\cdot\mathbf{V}).$$

Материальную производную тензора $\mathbf{T}$ (8) теперь можно записать в виде $\dot{\mathbf{T}}=-\nabla\cdot\mathbf{vT}+$ $+\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{v}+\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}+4L_3^{-1}\,(2a_0I_3\nabla\cdot\mathbf{vE}+((b_1+(2b_2+b_3)I_1)\,\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D}+c_1\mathbf{F}^2\cdot\cdot\mathbf{D})\mathbf{F}+c_1\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{DF}^2-\varphi_0\mathbf{D}+\varphi_2\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})+$ $+\sum_j\delta_j\mathbf{S}_j$. Отсюда получаем соотношение для тензора $\mathbf{\Theta}=\dot{\mathbf{T}}+\mathbf{T}\nabla\cdot\mathbf{v}-\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$, заменяющего тензор напряжений Коши в варьируемой актуальной конфигурации, и функционала вариационного принципа при условии, что на части поверхности тела в актуальной конфигурации заданы перемещения, а другая часть свободна от нагрузок [2]:

$$\mathbf{\Theta}=\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{T}+\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{v}-\mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}+4L_3^{-1}(a_0I_3\nabla\cdot\mathbf{vE}+((b_1+(2b_2+b_3)I_1)\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{D}+c_1\mathbf{F}^2\cdot\cdot\mathbf{D})\mathbf{F}+$$
$$+c_1\mathbf{F}\cdot\cdot\mathbf{DF}^2-\varphi_0\mathbf{D}+\varphi_2\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})+\sum_j\delta_j\mathbf{S}_j,\qquad \psi=\int_V 2^{-1}\mathbf{\Theta}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}dV, \tag{29}$$

где V – объем, занимаемый телом; dV – элемент объема.

Рассмотрим пример. В качестве материала выбран вольфрам. Считаем, что предел текучести на растяжение у него совпадает с пределом прочности и равен $\sigma=900$ МПа. Пределы текучести при растяжении и сжатии совпадают. Постоянные Ляме взяты из [2]: $\lambda=1{,}63,\ \mu=1{,}37,\ \nu_1=-4{,}29,\ \nu_2=-2{,}58,\ \nu_3=-2{,}67(10^5\,\text{МПа})$. Вольфрамовый образец растягивался в направлении оси $\mathbf{c}_1$ с относительным удлинением 1 %. Изотропный материал становится трансверсально-изотропным с осью $\mathbf{c}=\mathbf{c}_1$. Имеют место условия (18) и $\mathbf{b}=b\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$. С учетом определяющих уравнений [4] верхняя часть равенств в (18) преобразуется: $\delta_2=\delta_3=\delta_9=\delta_{15}$, $\delta_8=\delta_9$, $\delta_7=\delta_{11}=\kappa\delta_1(\kappa=0,76)$. Независимых параметров анизотропии было семь: $\delta_2=267,6$, $\delta_2=-535,3$, $\delta_8=-398,5$, $\delta_{22}=-535,3$, $\delta_{27}=336,8$, $\delta_{25}=-490,6$, $\delta_{23}=-267,6$ (МПа) и $b=0,008$ (МПа). Затем была проведена полная разгрузка (удалена упругая деформация), и образец стали растягивать в направлении $\mathbf{c}=\mathbf{c}_2$ (рисунок). Начальные условия повторного нагружения составляли: тензора напряжений $\mathbf{T}=\mathbf{B}=b\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$, деформационного градиента $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=x_0\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+y_0(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$, тензора $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}=\mathbf{E}$. Обозначим текущие значения тензорных величин $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}=x\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+y\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+z\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, $\mathbf{F}_e=\mathbf{V}=V_1\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+V_2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+V_3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$, $\mathbf{D}=\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}=\nabla\mathbf{v}=\dot{x}x^{-1}\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1+\dot{y}y^{-1}\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2+\dot{z}z^{-1}\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3$. Расчет упругого поведения материала (до выхода точки процесса в пространстве напряжений на кривую пластичности) проводился на основе вариационного принципа (29) малыми шагами по времени. Из условий стационарности функционала $\psi = \psi(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ находятся величины $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и затем новые значения x, y, z. Дальше из (28) получаем $(\mathbf{V}^2)^{\cdot} = \nabla \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot \nabla \mathbf{v}$, откуда находим $\dot{V}_1 = \dot{x} x^{-1} V_1, \dot{V}_2 = \dot{y} y^{-1} V_2, \dot{V}_3 = \dot{z} z^{-1} V_3$ и затем новые значения V_1, V_2, V_3. Согласно (3), (8), (17) определяем новые значения тензора напряжений $\mathbf{T}$.



Кривые пластичности, полученные в результате первого растяжения,
и проекция траектории точки процесса в пространстве напряжений на двухмерное
подпространство девиаторов (утолщенная линия) при повторном растяжении

При построении девиаторного сечения поверхности текучести, в частности кривой пластичности, применяется векторное представление девиаторов симметричных тензоров второго ранга. На рисунке стрелками отмечены проекции на двухмерное подпространство, порожденное «ортонормированными векторами» $\mathbf{W}_1 = (\sqrt{6})^{-1}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3)$ и $\mathbf{W}_2 = (\sqrt{2})^{-1}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1)$ ($\mathbf{W}_1 \cdot\cdot \mathbf{W}_2 = 0, \mathbf{W}_1 \cdot\cdot \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 \cdot\cdot \mathbf{W}_2 = 1$), базисных диад $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i$; проекция $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$ направлена вверх, а проекция $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$ – вниз. Кривая пластичности для изотропного вольфрама обозначена 0, кривая пластичности после первоначального одноосного растяжения – 1. Согласно рисунку длина отрезка, отсекаемого кривой 0 от проекции $\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$, меньше длины отрезка, отсекаемого кривой 1 от проекции $\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$. Это означает, что описывается недоступный линейной теории экспериментальный факт: простое растяжение действует больше в смысле упрочнения на повторное растяжение в направлении, ортогональном первоначальному [5]. Траектория точки процесса в пространстве напряжений при повторном растяжении, в отличие от линейной теории, уже не является прямолинейной, хотя первоначальная траектория таковой была, как следует из расчета также с использованием вариационного принципа. Выход точки процесса на кривую пластичности при выполнении критерия текучести означает начало активного процесса, т. е. ограничение в виде поверхности текучести (кривой пластичности) становится активным. При дальнейшем растяжении материал будет ортотропным.

Заключение

Для математического моделирования явления развития анизотропии вследствие пластической деформации представлены соотношения обобщенного упругого закона Мурнагана (5)–(8), (15)–(19), включая и соотношения для ортотропного материала. Можно показать, что полученные уравнения удовлетворяют принципу материальной объективности [2], т. е. независимости от выбора системы отсчета (этот вопрос частично рассмотрен в [6]). Дальше потребуется задание эволюционного уравнения для параметров анизотропии в активном процессе нагружения. Вычислен функционал вариационного принципа в варьируемой актуальной конфигурации, который позволяет описать поведение материала в пассивном процессе (29). Установлено, что траектория точки процесса в пространстве напряжений при повторном растяжении в направлении, ортогональном первоначальному, уже не является прямолинейной, но близка к ней.

Список литературы

1. Murnaghan, F.D. Finite deformation of an elastic solid / F.D. Murnaghan. – N.Y. : John Wiley, 1951. – 140 p.
2. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512 с.
3. Левитас, В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев : Наукова думка, 1987. – 232 с.
4. Швед, О.Л. О хрупком разрушении материала / О.Л. Швед // Труды XIV Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». – Ростов-на-Дону, Азов : Изд-во ЮФУ. – Т. 2. – С. 304–307.
5. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М. : Гос. изд. техн.-теор. лит, 1956. – 324 с.
6. Швед, О.Л. Об объективности уравнений в нелинейных теориях деформируемого твердого тела / О.Л. Швед // Вестник БНТУ. – 2008. – № 1. – С. 57–60.

Поступила 20.04.11

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: swed@newman.bas-net.by

O.L. Shved

PRESENTATION OF THE MURNAGAN LAW FOR THE USE IN CONSTITUTIVE RELATIONS OF ELASTOPLASTICITY

The relationships of Murnaghan law for initially isotropic and anisotropic due to plastic deformation of the material are considered. Calculations for a functional of a variation principle an varying configuration and an example of computational modeling are presented.