

УДК 658.512.2:621.9.06

Г.М. Левин, Б.М. Розин

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ МНОГОИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ПРИ ГРУППОВОЙ СМЕНЕ ИНСТРУМЕНТОВ

Предлагаются математическая модель и декомпозиционный метод решения задачи совместной оптимизации режимов многоинструментальной обработки деталей на агрегатном оборудовании и стратегии групповой смены инструментов с учетом основных конструктивно-технологических ограничений и требуемой производительности. В качестве целевой функции может выступать один из следующих показателей: себестоимость обработки, суммарные затраты на инструмент, штучное время.

Введение

Задача выбора режимов работы инструментов является частью более общей задачи проектирования технологического процесса обработки детали на металлорежущем оборудовании. Принимаемые режимы резания в значительной степени определяют структуру технологического процесса, типы и количество оборудования, типоразмеры его основных узлов. В свою очередь, выбранная структура технологического процесса, технические характеристики основных узлов оборудования накладывают ограничения на возможные значения параметров режимов резания. При поэтапном решении этой общей задачи предварительно принятые значения режимов резания служат исходной информацией для определения структуры технологического процесса и выбора оборудования, которые, в свою очередь, служат исходной информацией для получения окончательных значений режимов работы инструментов на последующих стадиях проектирования.

Определение оптимальных режимов работы всех инструментов многоинструментальной наладки в совокупности с учетом как кинематических, пространственно-временных связей между инструментами, так и сложного характера взаимосвязи искомых параметров с технико-экономическими характеристиками процесса в целом сводится к решению достаточно сложных и громоздких экстремальных задач, формулируемых обычно в терминах нелинейного программирования. Подобные постановки рассматриваются во многих публикациях (см., в частности, [1–12]). В этих публикациях, как правило, предполагается автономная смена каждого из инструментов по истечении его расчетного периода стойкости, зависящего от условий работы инструмента и принимаемых режимов работы.

В последние годы большое внимание уделяется также и вопросам оптимальной стратегии смены изношенных инструментов при заданных условиях их работы в процессе функционирования оборудования [13–17]. Так, в [14] процесс смены инструмента при одноинструментальной обработке представляется случайным процессом восстановления и оптимальный момент смены инструмента определяется минимизацией математического ожидания средней стоимости единицы рабочего времени, получаемой как отношение ожидаемой средней стоимости цикла к математическому ожиданию длины цикла.

Стратегии смены инструментов подразделяются на два основных типа: смена осуществляется исходя из динамически отслеживаемой степени износа инструментов (см., например, [15]) либо превентивно исходя из их расчетного периода стойкости [16, 17]. В работе [16] предложены модели для определения эффективных диапазонов режимов обработки (скорости подачи, частоты вращения шпинделя) и моментов превентивной смены инструмента для одноинструментальной обработки. Оптимальные режимы обработки определяются и анализируются для трех различных постановок задачи: минимизации ожидаемого циклового времени, минимизации ожидаемой себестоимости производства или максимизации ожидаемой прибыли при превентивной смене инструмента по истечении его нормально распределенного периода стойкости. Предложен алгоритм поиска оптимального решения. Показано, что во всех трех случаях решения, получаемые при превентивной смене инструмента, предпочтительнее по указанным

критериям в реальных ситуациях, когда превентивная смена инструмента снижает связанные с его сменой затраты.

Стратегии превентивной смены варьируются от смены каждого инструмента в момент истечения его расчетного периода стойкости до смены всех инструментов в момент, когда истекает период стойкости хотя бы одного из инструментов. Промежуточные стратегии этого типа включают смену инструментов группами. В работе [17] рассмотрена задача выбора группирования инструментов для совместной смены, минимизирующего суммарные потери от снижения производительности при заданных режимах обработки. Для ее решения используется генетический алгоритм. В общем случае объединение инструментов в группы для их одновременной смены позволяет сократить суммарные затраты на смену и общее время простоя оборудования.

Значительный научный и практический интерес представляет решение в рамках единой задачи двух взаимосвязанных подзадач: определения оптимальных в совокупности режимов обработки и стратегии смены инструментов с учетом конкретных производственных условий. Ниже рассматривается один из возможных подходов к такой комплексной задаче применительно к многоинструментальным наладкам одно- и многопозиционных многошпиндельных агрегатных станков и заблокированных линий из них. Этот тип оборудования широко применяется в условиях крупносерийного производства для обработки деталей различной конфигурации. Число силовых узлов на таком оборудовании может достигать нескольких десятков, таким же может быть и число инструментов на каждом из них. Инструменты, как правило, значительно отличаются друг от друга по типу, условиям работы, характеру их нагружения. Рассматривается стратегия превентивной смены изношенного инструмента с учетом возможности группирования инструментов для их совместной смены. Предполагается, что при группировании инструментов для их совместной смены каждый инструмент может попасть ровно в одну группу, определяемую заданным числом обработанных между сменами деталей. При этом не учитывается возможность объединения инструментов из различных групп, если соответствующие числа обработанных деталей для них имеют общее кратное число, либо возможность объединения при «близких» числах деталей для инструментов из различных групп. Это может служить предметом дальнейшего исследования. Отметим, что полученное в результате решения задачи группирование инструментов можно использовать также в качестве начального приближения при динамической стратегии смены первого типа.

Основные идеи предлагаемого подхода докладывались на ряде конференций [18–20].

1. Постановка задачи и ее математическая модель

Рассматриваемая инструментальная наладка состоит из множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$ параллельно работающих блоков инструментов. Каждый блок $i \in I$ образуется множеством $J_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ параллельно работающих инструментов, подача которых осуществляется от одного силового узла, также обозначаемого в дальнейшем как $i \in I$. Предполагается, что принимаемые в результате решения задачи значения скорости S_i минутной подачи силового узла $i \in I$ и скорости резания w_{ij} инструмента $j \in J_i$ в процессе обработки деталей не изменяются. Ниже для краткости вместо «инструмент $j \in J_i$ » может использоваться «инструмент ij ».

В дальнейшем $x_{ij} = (S_i, w_{ij})$ – искомый режим обработки инструментом ij ; $X_i = (S_i, w_{i1}, \dots, w_{im_i})$ – соответственно режим обработки инструментами i -го силового узла; $X = (X_1, \dots, X_n)$ – искомый режим обработки инструментами наладки в целом. Предполагаются заданными диапазоны $[\underline{S}_i, \bar{S}_i]$, $[\underline{w}_{ij}, \bar{w}_{ij}]$, $[\underline{s}_{ij}, \bar{s}_{ij}]$ возможных значений параметров S_i , w_{ij} и подач на оборот $s_{ij} = S_i / \gamma_{ij} w_{ij}$, где γ_{ij} – константа, связывающая скорость резания w_{ij} инструментом ij с частотой его вращения.

В результате решения рассматриваемой задачи помимо определения значения X режима обработки инструментами наладки в целом все множество инструментов должно быть разбито на непересекающиеся группы одновременно сменяемых инструментов, причем в каждую такую группу могут входить инструменты различных блоков (силовых узлов). Ограничимся случаем, когда эти группы в процессе работы оборудования не меняются и смена всех инструментов группы осуществляется в превентивном режиме, т. е. принудительно после обработки ими не-

которого рассчитываемого искомого числа деталей, для которого не превышен период стойкости любого инструмента группы, рассчитанный исходя из выбранных режимов обработки. Это расчетное число деталей для инструмента ij обозначим через y_{ij} . Таким образом, в одну группу одновременно сменяемых инструментов включаются все инструменты наладки с одним и тем же значением числа деталей y_{ij} .

Рассматривается случай, когда в силу сблокированности оборудования смена любой группы инструментов требует его остановки на время T_0 . Предполагается также, что исходя из организационно-технических условий эксплуатации оборудования принимаемое значение y_{ij} для каждого инструмента ij наладки должно выбираться только из заданного множества $\mathbf{H} = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ чисел деталей, после обработки каждого из которых допустима остановка оборудования для смены инструментов, где $h_v < h_{v+1}$, $v = 1, \dots, k - 1$. Помимо общего времени T_0 на смену каждого инструмента ij одной и той же группы дополнительно тратится время g_{2ij} . Аналогично стоимость смены инструментов одной группы складывается из постоянной величины C_0 , связанной с остановкой линии, и суммы затрат g_{1ij} на смену каждого инструмента группы, включая отнесенную к одной переточке стоимость этого инструмента.

При принятых предположениях режим работы инструментальной наладки в целом определяется вектором X (т. е. величинами S_i минутных подач силовых узлов i и скоростями резания w_{ij} инструментов ij , $i \in I, j \in J_i$) и вектором $Y = (Y_i | i \in I)$, где $Y_i = (y_{ij} | j \in J_i)$ и $y_{ij} \in \mathbf{H}$ – число деталей, обрабатываемых инструментом ij за период между его сменами. Вектор Y определяет разбиение множества всех инструментов на непересекающиеся группы одновременно сменяемых инструментов. В дальнейшем $\mathbf{Y}_i = \{Y_i | y_{ij} \in \mathbf{H}, j \in J_i\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y | y_{ij} \in \mathbf{H}, i \in I, j \in J_i\}$.

Задача заключается в определении таких значений векторов X и Y , которые в совокупности минимизируют зависящую от их значений часть технологической себестоимости обработки при условии обеспечения заданной производительности и выполнения основных технических и технологических ограничений.

Анализ условий работы многоинструментальных наладок агрегатного оборудования показал, что в рамках рассматриваемой задачи ограничения на возможные значения компонент искомого вектора X режимов обработки условно могут быть разделены на несколько групп, типичных для широкого класса металлорежущего оборудования. Эти группы включают ограничения, связанные:

а) с работой каждого инструмента наладки в отдельности. Ограничения учитывают такие факторы, как возможные в данных условиях обработки режимы резания и целесообразный диапазон поиска их оптимальных значений; период стойкости инструмента при выбранных режимах работы и заданных условиях обработки и требованиях к ее качеству; предельные значения выделенных физических характеристик процесса, определяемые исходя из требований технологического процесса, прочности, жесткости системы станок – приспособление – инструмент – деталь и т. д.;

б) работой группы инструментов с приводом подачи от одного силового узла. Поскольку силовые узлы агрегатного оборудования обычно выбираются таким образом, чтобы обеспечить требуемые суммарные усилие подачи и мощность резания, ниже из этой группы ограничений учитываются лишь диапазоны возможных минутных подач силовых узлов;

в) обеспечением требуемой производительности;

г) принимаемой стратегией групповой смены инструментов.

Как и в [5], зависимости расчетного периода стойкости $T'_{ij}(s_{ij}, w_{ij})$ инструмента ij и рассматриваемых физических характеристик $R'_{p_{ij}}(s_{ij}, w_{ij})$, $p \in P_{ij}$, процесса резания (например, усилия резания, шероховатости, температуры в зоне резания и т. д.) от его параметров s_{ij} и w_{ij} аппроксимируются функциями

$$T'_{ij}(s_{ij}, w_{ij}) = \min \{ C'_{iju} / (s_{ij}^{n_{iju}} w_{ij}^{u_{iju}} + G'_{iju}) | u = 1, \dots, \bar{u}_{ij} \}; \quad (1)$$

$$R'_{p_{ij}}(s_{ij}, w_{ij}) = C''_{p_{ij}} s_{ij}^{\alpha'_{p_{ij}}} w_{ij}^{\beta'_{p_{ij}}}, \quad (2)$$

где значения C'_{iju} , η'_{iju} , μ'_{iju} , G'_{iju} , C''_{rij} , α'_{rij} , β'_{rij} , \bar{u}_{ij} считаются известными для конкретных условий обработки и C'_{iju} , G'_{iju} , C''_{rij} положительны; P_{ij} – заданное для каждого инструмента ij множество индексов характеристик процесса обработки. Принятая форма (1) стойкостной зависимости (рис. 1) отражает имеющее место на практике снижение скорости возрастания стойкости инструмента при снижении интенсивности обработки, а также существование некоторого максимального значения периода стойкости (так называемой предельной стойкости).

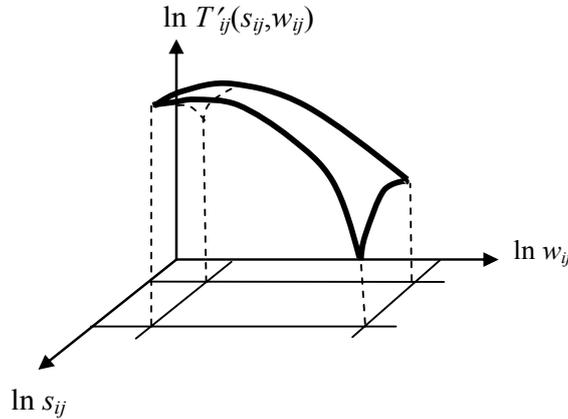


Рис. 1. Зависимость расчетного периода стойкости от режимов обработки

При фиксированных значениях x_{ij} режимов время резания $\tau_i(x_{ij})$ при обработке одной детали инструментом ij равно l_{ij} / S_i , где l_{ij} – длина резания для ij -го инструмента. С использованием (1) получаем следующую аппроксимацию зависимости от режимов резания x_{ij} числа деталей $D_{ij}(x_{ij})$, обрабатываемых инструментом ij за период его расчетной стойкости $T_{ij}(x_{ij}) = T'_{ij}(S_i / \gamma_{ij} w_{ij}, w_{ij})$:

$$D_{ij}(x_{ij}) = 1 / \max_{u=1, \bar{u}} b_{iju} (S_i^{\eta_{iju}} w_{ij}^{\mu_{iju}} + G_{iju} / S_i), \quad (3)$$

где значения b_{iju} , η_{iju} , μ_{iju} , G_{iju} однозначно определяются значениями l_{ij} , γ_{ij} , C'_{iju} , η'_{iju} , μ'_{iju} , G'_{iju} .

Аналогично из (2) получаем аппроксимацию зависимости от x_{ij} физических характеристик $R_{rij}(x_{ij})$, $p \in P_{ij}$, процесса резания для инструмента ij :

$$R_{rij}(x_{ij}) = C_{rij} S_i^{\alpha_{rij}} w_{ij}^{\beta_{rij}}, \quad (4)$$

где значения C_{rij} , α_{rij} , β_{rij} также однозначно определяются значениями C''_{rij} , α'_{rij} , β'_{rij} .

Искомые параметры x_{ij} и y_{ij} связаны условием $D_{ij}(x_{ij}) \geq y_{ij}$, обеспечивающим смену каждого инструмента ij до истечения его расчетного периода стойкости при фиксированных режимах x_{ij} . Введем функцию $z_v(Y)$, полагая $z_v(Y) = 1$, если h_v является одной из компонент вектора Y , и $z_v(Y) = 0$ в противном случае. Следовательно, при $z_v(Y) = 1$ после обработки каждой h_v деталей оборудование останавливается для смены соответствующей группы (либо групп) инструментов. В дальнейшем $D_i(X_i) = (D_{ij}(x_{ij}) | j \in J_i)$ и $D(X) = (D_i(X_i) | i \in I)$.

При фиксированном значении режимов X время обработки одной детали инструментами i -го силового узла $t_i(X_i) = L_i / S_i$, где L_i – величина рабочего хода этого силового узла. Соответственно для рассматриваемого типа оборудования общее цикловое время обработки одной детали

$$t(X) = \max \{L_i / S_i + t_b | i \in I\}, \quad (5)$$

где t_b – общее вспомогательное время холостых перемещений силовых узлов и транспортного устройства.

При предположениях, аналогичных принятым в [5], зависящие от искомым параметров X и Y части технологической себестоимости $\Theta_1(X, Y)$ и времени $\Theta_2(X, Y)$ на обработку одной детали определяются соотношением

$$\Theta_q(X, Y) = E_q t(X) + \sum_{v=1}^k \varphi_{qv} z_v(Y) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} g_{qij} / y_{ij}, \quad q = 1, 2, \quad (6)$$

где E_q – заданные параметры, учитывающие (в зависимости от значения индекса q) такие факторы, как надежность оборудования, зарплата обслуживающего персонала, амортизационные отчисления и т. д.; $\varphi_{1v} = C_0 / h_v$, $\varphi_{2v} = T_0 / h_v$. Коэффициенты E_q и g_{qij} можно рассматривать как постоянные (не зависящие от значения режимов резания) положительные величины в каждой конкретной задаче.

Предполагаем заданными максимально допустимое (исходя из требуемой производительности) значение t_0 переменной (зависящей от искомым параметров) части штучного времени и максимально допустимые значения $\bar{R}_{p_{ij}}$ характеристики $p \in P_{ij}$ процесса обработки (например, усилия резания, шероховатости, температуры в зоне резания и т. д.) для всех инструментов.

Тогда рассматриваемая задача определения оптимальных значений X^* и Y^* искомым параметров X и Y режимов работы инструментальной наладки может быть представлена следующей математической моделью:

$$\Theta_1(X, Y) \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$\Theta_2(X, Y) \leq t_0; \quad (8)$$

$$\underline{S}_i \leq S_i \leq \bar{S}_i, \quad i \in I; \quad (9)$$

$$\underline{w}_{ij} \leq w_{ij} \leq \bar{w}_{ij}, \quad i \in I, j \in J_i; \quad (10)$$

$$\gamma_{ij} \underline{S}_i \leq S_i / w_{ij} \leq \gamma_{ij} \bar{S}_i, \quad i \in I, j \in J_i; \quad (11)$$

$$R_{p_{ij}}(x_{ij}) \leq \bar{R}_{p_{ij}}, \quad p \in P_{ij}, \quad i \in I, j \in J_i; \quad (12)$$

$$D(X) \geq Y \in Y. \quad (13)$$

В этой модели соотношение (7) отражает стремление минимизировать себестоимость обработки, ограничение (8) обеспечивает требуемую производительность, ограничения (9)–(12) – соблюдение заданных конструктивно-технологических ограничений, а ограничения (13) – смену каждого из инструментов после обработки им выбираемого числа деталей в рамках периода расчетной стойкости этого инструмента. Неравенства (10)–(12) описывают ограничения на режимы обработки группы а), неравенства (9) – группы б), (8) – группы в) и (13) – группы г). Задачу (7)–(13) в дальнейшем будем называть задачей A .

Замечание 1. Для определения режимов работы, минимизирующих лишь общие затраты на инструмент при обеспечении требуемой производительности, достаточно в модели (7)–(13) заменить целевую функцию $\Theta_1(X, Y)$ на функцию $\Theta_3(X, Y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} g_{3ij} / y_{ij}$, где параметр g_{3ij} учи-

тывает лишь долю стоимости инструмента ij , отнесенную к одной его переточке. Аналогично для определения режимов работы, минимизирующих штучное время, достаточно в качестве целевой рассматривать функцию $\Theta_2(X, Y)$ (отбросив ограничение (8)).

Задача A является достаточно сложной задачей смешанного (дискретно-непрерывного) нелинейного программирования. В работе [5] приводится метод решения непрерывного аналога этой задачи, полученного при упрощающем предположении, что инструменты могут заменяться в произвольный момент времени работы оборудования и независимо друг от друга. Предлагаемая ниже схема решения задачи A использует ряд положений данного метода. Схема основана на декомпозиции этой задачи на базе множителей Лагранжа, фрагментарной парамет-

ризации [5] и покоординатного спуска по группам переменных с использованием ряда известных методов математического программирования для решения получаемых в результате декомпозиции подзадач.

2. Анализ математической модели задачи

Цель данного анализа – выявление некоторых свойств задачи A , которые могут быть использованы при разработке эффективных методов ее решения.

Пусть \mathbb{W} – множество наборов (X, Y) , удовлетворяющих условиям (9)–(13). Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$\Psi(\lambda, X, Y) = \lambda \Theta_1(X, Y) + (1 - \lambda) \Theta_2(X, Y) \quad (14)$$

и задачу $A(\lambda)$ минимизации данной функции на множестве \mathbb{W} при фиксированном значении множителя Лагранжа $\lambda \in [0, 1]$. Обозначим через $(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ решение этой задачи, причем, если существует множество векторов $(X, Y) \in \mathbb{W}$, которым соответствует наименьшее значение функции $\Psi(\lambda, X, Y)$, в качестве $(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ принимается то из них, которому соответствует либо наибольшее значение функции $\Theta_2(X, Y)$, не превосходящее t_0 (если такое существует), либо наименьшее значение $\Theta_2(X, Y)$ (в противном случае).

Очевидно, если $\Theta_2(X^*(1), Y^*(1)) \leq t_0$, то $(X^*(1), Y^*(1))$ – решение задачи A ; если $\Theta_2(X^*(0), Y^*(0)) > t_0$, то задача A не имеет решения. В остальных случаях может быть определено такое $\lambda^* \in (0, 1)$, которому соответствует минимальное значение функции $\Theta_1(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ при условии, что $\Theta_2(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ не превосходит t_0 . Можно показать (следуя, например, [5, с. 131]), что функция $\Theta_1(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ не возрастает, а функция $\Theta_2(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ не убывает по λ на отрезке $[0, 1]$. Это позволяет в качестве λ^* принять такое $\lambda \in (0, 1)$, которому соответствует максимальное значение функции $\Theta_2(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$, не превосходящее t_0 , и использовать для нахождения λ^* методы, аналогичные применяемым при решении уравнений с монотонной левой частью.

Пусть $\Theta_2(X^*(1), Y^*(1)) > t_0$ и $\Theta_2(X^*(0), Y^*(0)) < t_0$. Если множество Θ Парето-минимальных векторов (Θ_1, Θ_2) из множества $\{(\Theta_1(X, Y), \Theta_2(X, Y)) \mid (X, Y) \in \mathbb{W}\}$ таково, что существует $\lambda' \in (0, 1)$, при котором $\lambda' \Theta_1(X^*, Y^*) + (1 - \lambda') \Theta_2(X^*, Y^*) \leq \lambda' \Theta_1(X, Y) + (1 - \lambda') \Theta_2(X, Y)$ для любого вектора (Θ_1, Θ_2) из этого множества, то $\lambda' = \lambda^*$ и $(X^*(\lambda^*), Y^*(\lambda^*))$ – решение задачи A . В противном случае $(X^*(\lambda^*), Y^*(\lambda^*))$ можно рассматривать в качестве приближенного решения задачи A . Отметим, что для существования $\lambda' \in (0, 1)$ с указанным свойством достаточно, чтобы множество Θ принадлежало некоторой выпуклой поверхности. Это условие выполняется, в частности, для рассмотренной в [5] непрерывной постановки задачи типа A .

Рассмотрим задачу $A(\lambda)$ при фиксированном значении $\lambda \in (0, 1)$. Обозначим через X_i , $i \in I$, множество значений вектора X_i , удовлетворяющих условиям (9)–(13) при $y_{ij} = h_1$ для всех $j \in J_i$. Предполагается, что $X_i \neq \emptyset$ для всех $i \in I$, поскольку в противном случае задача $A(\lambda)$ не имеет решения при любом значении $\lambda \in [0, 1]$. Положим $\mathbf{X} = \prod_{i \in I} X_i$.

Заменим в компонентах $\Theta_1(X, Y)$ и $\Theta_2(X, Y)$ целевой функции (14) задачи $A(\lambda)$ фрагмент $t(X) = \max_{i \in I} (L_i / S_i + t_b)$ параметром t , имеющим смысл циклового времени обработки, и введем дополнительные ограничения

$$L_i / S_i + t_b \leq t, \quad i \in I.$$

В результате получаем параметризованную задачу $B(\lambda)$:

$$\Omega(\lambda, t, Y) = E(\lambda)t + \sum_{v=1}^k \varphi_v(\lambda)z_v(Y) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} g_{ij}(\lambda) / y_{ij} \rightarrow \min; \quad (15)$$

$$L_i / S_i + t_b \leq t, \quad i \in I; \quad (16)$$

$$D(X) \geq Y \in \mathbf{Y}; \quad (17)$$

$$X \in \mathbf{X}, \quad (18)$$

где $E(\lambda) = \lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2 > 0$, $\varphi_v(\lambda) = \lambda\varphi_{1v} + (1 - \lambda)\varphi_{2v} > 0$, $g_{ij}(\lambda) = \lambda g_{1ij} + (1 - \lambda)g_{2ij} > 0$, причем $\varphi_v(\lambda) > \varphi_{v+1}(\lambda)$ для всех $v = 1, \dots, k - 1$.

Искомыми переменными в задаче $\mathbf{B}(\lambda)$ являются компоненты набора (t, X, Y) . Задачи $\mathbf{A}(\lambda)$ и $\mathbf{B}(\lambda)$ являются эквивалентными в том смысле, что если $(t^*(\lambda), X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ – решение задачи $\mathbf{B}(\lambda)$, то $(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ – решение задачи $\mathbf{A}(\lambda)$. Аналогично, если $(X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ – решение задачи $\mathbf{A}(\lambda)$, то $(t(X^*(\lambda)), X^*(\lambda), Y^*(\lambda))$ – решение задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ (см., например, [5]).

Таким образом, ключевой в намечаемой схеме решения задачи \mathbf{A} является разработка эффективного метода решения задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ при фиксированном значении $\lambda \in [0, 1]$.

Для более детального исследования задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ введем следующие дополнительные обозначения:

$\mathbf{X}_i(t)$ – множество векторов $X_i \in \mathbf{X}_i$, удовлетворяющих условию (16) при фиксированном значении t ;

$[S_{1i}, S_{2i}]$ – проекция множества \mathbf{X}_i на ось S_i ;

$\mathbf{X}(t) = \prod_{i \in I} \mathbf{X}_i(t)$;

$\underline{t} = \min\{t \mid \mathbf{X}_i(t) \neq \emptyset\} = L_i / S_{2i} + t_b$ и $\bar{t} = \max\{t \mid i \in I\}$;

$\mathbf{W} = \{(t, X, Y) \mid t \geq \underline{t}, X \in \mathbf{X}(t), D(X) \geq Y \in \mathbf{Y}\}$, $\mathbf{W}(t) = \{(X, Y) \mid (t, X, Y) \in \mathbf{W} \text{ и } \mathbf{W}^*(\lambda, t) \text{ – множество таких пар } (X, Y) \in \mathbf{W}(t), \text{ которым соответствует наименьшее значение функции } \Omega(\lambda, t, Y) \text{ при фиксированном значении } \lambda\}$;

$[t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ – диапазон поиска значения $t^*(\lambda)$.

По определению множества $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{W}(t)$ не пусты для любого $t \geq \underline{t}$ и $t(X) \leq t$ для всех $X \in \mathbf{X}(t)$. Естественно предположить, что $t_1(\lambda) \geq \underline{t}$ для всех $\lambda \in [0, 1]$. Некоторые подходы к определению \underline{t} , $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$ рассмотрены в разд. 4.

Очевидно, что решение задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ может быть получено по двухуровневой схеме, на нижнем уровне которой для фиксированного $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ определяется некоторая пара $(X(\lambda, t), Y(\lambda, t)) \in \mathbf{W}^*(\lambda, t)$, а на верхнем – такое значение $t^*(\lambda)$ параметра $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$, которому соответствует наименьшее значение функции $\Phi(\lambda, t) = \Omega(\lambda, t, Y(\lambda, t))$.

Отметим некоторые свойства множества $\mathbf{W}^*(\lambda, t)$ и его проекций $\mathbf{X}^*(\lambda, t) = \{X \mid (X, Y) \in \mathbf{W}^*(\lambda, t)\}$ и $\mathbf{Y}^*(\lambda, t) = \{Y \mid (X, Y) \in \mathbf{W}^*(\lambda, t)\}$ при $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$.

Свойство 1. Если $X \in \mathbf{X}(t)$, $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ и пара (X, Y) удовлетворяет условиям (17), то $X \in \mathbf{X}^*(\lambda, t)$ и $(X, Y) \in \mathbf{W}^*(\lambda, t)$. Множество $\underline{\mathbf{X}}(\lambda, t, Y)$ таких векторов $X \in \mathbf{X}(t)$, что пара (X, Y) удовлетворяет условиям (17), в координатах $\ln S_i$ и $\ln w_{ij}$ выпукло.

Свойство 2. Из определения функции $\Omega(\lambda, t, Y)$ следует, что множество $\mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ образуют векторы $Y \in \mathbf{Y}$, минимизирующие функцию $\vartheta(\lambda, Y) = \sum_{v=1}^k \varphi_v(\lambda) z_v(Y) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} g_{ij}(\lambda) / y_{ij}$ при условии существования такого $X \in \mathbf{X}(t)$, что пара (X, Y) удовлетворяет условиям (17).

Из свойств 1 и 2 непосредственно следует

Свойство 3. Для элементов множеств $\mathbf{W}^*(\lambda, t)$ и $\mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ выполняются следующие условия:

а) если $(X, Y) \in \mathbf{W}^*(\lambda, t)$, то $y_{ij} = \max\{y_{i'j'} \mid i' \in I, j' \in J_i, y_{i'j'} \leq D_{ij}(x_{ij})\}$, и если $z_{v'}(Y) = 1$ для некоторого $v' \in \{1, \dots, k\}$, то $h_{v'} = \min\{\max\{h_v \mid v = 1, \dots, k, h_v \leq D_{ij}(x_{ij})\} \mid (i, j) \in \underline{J}(Y, v')\}$, где $\underline{J}(Y, v') = \{(i, j) \mid i \in I, j \in J_i, y_{ij} = h_{v'}\}$;

б) для любых различных векторов $Y', Y'' \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ значение $\vartheta(\lambda, Y') = \vartheta(\lambda, Y'')$, и если $Y' \leq Y''$, то $y'_{ij} = y''_{ij}$ для некоторых $i \in I, j \in J_i$, $\underline{\mathbf{X}}(\lambda, t, Y') \subseteq \underline{\mathbf{X}}(\lambda, t, Y'')$ и $V(Y') \subset V(Y'')$, где $V(Y) = \{v \in \{1, \dots, k\} \mid z_v(Y) = 1\}$.

Докажем справедливость п. б) свойства 3. Утверждение, что $V(Y') \neq V(Y'')$, следует непосредственно из свойства п. а) свойства 3. Предположим, что $v' \in V(Y') \setminus V(Y'') \neq \emptyset$. Поскольку $Y' \leq Y''$, то $y'_{ij} < y''_{ij}$ для всех $(i, j) \in \underline{J}(Y', v')$. Пусть $v'' \in V(Y'')$ таково, что $h_{v''} = \min\{y''_{ij} \mid (i, j) \in \underline{J}(Y', v')\}$. Рассмотрим такой вектор $Y \in \mathbf{Y}$, у которого $y_{ij} = h_{v''}$ для всех $(i, j) \in \underline{J}(Y', v')$ и $y_{ij} = y''_{ij}$ для всех остальных (i, j) . По построению $Y' \leq Y \leq Y''$. Поскольку $V(Y) = (V(Y') \setminus \{v'\}) \cup \{v''\}$ и $h_{v''} > h_{v'}$, то $\vartheta(\lambda, Y) > \vartheta(\lambda, Y')$ и, следовательно, $Y' \notin \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$. Таким образом, $V(Y') \setminus V(Y'') = \emptyset$.

Свойство 4. Пусть $t', t'' \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ и $t' < t''$. Поскольку $\mathbf{X}(t') \subseteq \mathbf{X}(t'')$ и $\mathbf{W}^*(\lambda, t') \subseteq \mathbf{W}^*(\lambda, t'')$, то либо $\mathbf{W}^*(\lambda, t') \subseteq \mathbf{W}^*(\lambda, t'')$, либо $\mathbf{W}^*(\lambda, t') \cap \mathbf{W}^*(\lambda, t'') = \emptyset$. Поэтому либо $\mathbf{Y}^*(\lambda, t') \subseteq \mathbf{Y}^*(\lambda, t'')$, либо $\mathbf{Y}^*(\lambda, t') \cap \mathbf{Y}^*(\lambda, t'') = \emptyset$ и, следовательно, для любых $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t')$ и $Y'' \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t'')$ в первом случае $\vartheta(\lambda, Y) = \vartheta(\lambda, Y'')$, а во втором $\vartheta(\lambda, Y) > \vartheta(\lambda, Y'')$, причем в обоих случаях $y'_{ij} < y''_{ij}$ для некоторых $i \in I, j \in J_i$.

Пусть $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ и $t''(\lambda, t, Y) = \min\{t(X) \geq t_1(\lambda) \mid X \in \mathbf{X}(t), D(X) \geq Y\}$. Из свойства 3 следует, что $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t')$ для любых $t' \in [t''(\lambda, t, Y), t]$. Более того, для любого $t' \in [t_1(\lambda), t''(\lambda, t, Y))$ вектор $Y \notin \mathbf{Y}^*(\lambda, t')$, а пара $(X, Y) \notin \mathbf{W}(t')$ для любого $X \in \mathbf{X}(t')$.

Замечание 2. Существуют различные приемы выбора вектора $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ для различных $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$, обеспечивающие выполнение следующего условия: если для некоторого $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ выбран вектор $Y(\lambda, t)$, то он же выбирается из множества $\mathbf{Y}^*(\lambda, t')$ и для всех $t' \in [t''(\lambda, t, Y), t]$. В дальнейшем предполагается использование одного из таких приемов. В частности, для любого $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ можно выбирать тот вектор $Y = Y(\lambda, t) \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$, который минимизирует значение $t''(\lambda, t, Y)$, а если таких несколько, то, например, лексикографически минимальный.

Положим $T''(\lambda) = \{t''(\lambda, t, Y(\lambda, t)) \mid t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]\}$. Из конечности множества возможных значений вектора Y и отмеченных свойств множества $\mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ и вектора $Y(\lambda, t)$ следует, что множество $T''(\lambda)$ конечно. Без ограничения общности будем предполагать, что $T''(\lambda) = \{\hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_\sigma\}$, где $\hat{t}_l < \hat{t}_{l+1}$ для всех $l = 1, 2, \dots, \sigma - 1$, $\hat{t}_1 = t_1(\lambda)$ и $\hat{t}_\sigma \leq t_2(\lambda)$. Таким образом, отрезок $[t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ разбивается на $\sigma - 1$ полуинтервалов $[\hat{t}_l(\lambda), \hat{t}_{l+1}(\lambda))$, $l = 1, 2, \dots, \sigma - 1$, и интервал $[\hat{t}_\sigma(\lambda), t_2(\lambda)]$, который в дальнейшем для общности также будем называть полуинтервалом.

Отметим некоторые свойства полуинтервалов $[\hat{t}_l(\lambda), \hat{t}_{l+1}(\lambda))$, $l = 1, 2, \dots, \sigma$, вытекающие из свойств 1–4:

Свойство 5. Для любого $t \in [\hat{t}_l(\lambda), \hat{t}_{l+1}(\lambda))$ значение $t''(\lambda, t) = \hat{t}_l(\lambda)$, вектор $Y(\lambda, t) = Y(\lambda, \hat{t}_l(\lambda))$ и, следовательно, $\vartheta(\lambda, Y(\lambda, t)) = \vartheta(\lambda, Y(\lambda, \hat{t}_l(\lambda)))$, а функция $\Phi(\lambda, t)$ является линейно возрастающей по t на $[\hat{t}_l(\lambda), \hat{t}_{l+1}(\lambda))$ (поскольку E_1, E_2 положительны).

Свойство 6. Функция $\vartheta(\lambda, Y(\lambda, \hat{t}_l(\lambda)))$ является невозрастающей по $l = 1, \dots, \sigma$ и, следовательно, $\Phi(\lambda, \hat{t}_l(\lambda) - 0) \geq \Phi(\lambda, \hat{t}_l(\lambda))$ для всех $l = 2, \dots, \sigma$.

Свойство 7. Значение $\Phi(\lambda, \hat{t}_{l-1}(\lambda) - 0) > \Phi(\lambda, \hat{t}_l(\lambda))$ для некоторого $l = 2, \dots, \sigma$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{Y}^*(\lambda, \hat{t}_{l-1}(\lambda)) \cap \mathbf{Y}^*(\lambda, \hat{t}_l(\lambda)) = \emptyset$.

Свойство 8. Если $\hat{t}_l(\lambda) = \min\{t''(\lambda, \hat{t}_l(\lambda), Y) \mid Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)\}$ для некоторого $l = 2, \dots, \sigma$, то $\mathbf{Y}^*(\lambda, \hat{t}_{l-1}(\lambda)) \cap \mathbf{Y}^*(\lambda, \hat{t}_l(\lambda)) = \emptyset$.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$ и $\tilde{\mathbf{Y}}_i(t)$ подмножества Парето-максимальных векторов из множеств $\{D(X) \mid X \in \mathbf{X}(t)\}$ и $\{D_i(X_i) \mid X_i \in \mathbf{X}_i(t)\}$ соответственно, $i \in I$. Очевидно, что $\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \prod_{i \in I} \tilde{\mathbf{Y}}_i(t)$ и для любых $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ и $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ существует такой $\tilde{Y} \in \tilde{\mathbf{Y}}(t)$, что $Y \leq \tilde{Y}$. Следовательно, множество $\mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ – это множество таких векторов $Y \in \mathbf{Y}$, которые минимизируют функцию $\vartheta(\lambda, Y)$ при условии существования такого $\tilde{Y} \in \tilde{\mathbf{Y}}(t)$, что $Y \leq \tilde{Y}$. Для любых $t', t'' \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$, таких, что $t' < t''$, и $\tilde{Y}' \in \tilde{\mathbf{Y}}(t')$ существует такой $\tilde{Y}'' \in \tilde{\mathbf{Y}}(t'')$, что $\tilde{Y}' \leq \tilde{Y}''$ (поскольку $\mathbf{X}(t') \subseteq \mathbf{X}(t'')$). Если множества $\tilde{\mathbf{Y}}(t')$ и $\tilde{\mathbf{Y}}(t'')$ содержат по единственному вектору $\tilde{Y}'(t')$ и $\tilde{Y}''(t'')$ соответственно, то $\tilde{Y}'(t') \leq \tilde{Y}''(t'')$.

Одним из достаточных условий, когда для любых $t \in [t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ и $i \in I$ множество $\tilde{\mathbf{Y}}_i(t)$ содержит единственный вектор $\tilde{Y}_i(t)$ (тем самым и множество $\tilde{\mathbf{Y}}(t)$ содержит единственный вектор $\tilde{Y}(t)$), является убывание для всех $i \in I$ и $j \in J_i$ функции $D_{ij}(S_i, w_{ij}^*(S_i))$ по переменной S_i на отрезке $[S_{i1}, S_{i2}]$, где $w_{ij}^*(S_i)$ – такое значение переменной w_{ij} , которому соответствует наи-

большее значение функции $D_{ij}(S_i, w_{ij})$ при фиксированном значении S_i и выполнении условий (10)–(12). Это условие в дальнейшем будем называть условием **Е**.

В свою очередь, условие **Е** выполняется, если в соотношениях (1) и (2) для всех $i \in I, j \in J_i, p \in P_{ij}$ и $u = 1, \dots, \bar{u}_{ij}$ значения $\mu'_{iju} \geq \eta'_{iju} > 1$, $\alpha'_{pij} > 0$ и $G'_{iju} < (\eta'_{iju} - 1) S_{li} \eta_{iju} w_{ij} \mu_{iju}^{-\eta_{iju}} / \gamma_{ij}^{\eta_{iju}}$ (условие **Е1**). Условие **Е1** обычно имеет место в реальных производственных задачах.

В рамках описываемой ниже схемы решения задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ вместо каждого из множеств $\tilde{Y}_i(t)$, $i \in I$, целесообразно рассматривать порождаемое им конечное множество $\hat{Y}_i(t)$ Парето-максимальных векторов из множества $\{\hat{Y}_i(Y_i) \mid Y_i \in \tilde{Y}_i(t)\}$, а вместо множества $\tilde{Y}(t)$ – множество $\hat{Y}(t) = \prod_{i \in I} \hat{Y}_i(t)$, где $\hat{Y}_i(Y_i)$ – вектор с компонентами $\hat{y}_{ij} = \max\{h \in \mathbf{H} \mid h \leq y_{ij}\}, j \in J_i$. Очевидно, что для любого $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ существуют такие $\tilde{Y} \in \tilde{Y}(t)$ и $\hat{Y} \in \hat{Y}(t)$, что $Y \leq \hat{Y} \leq \tilde{Y}$, и если $|\tilde{Y}_i(t)| = 1$ для всех $i \in I$, то множества $\tilde{Y}(t)$ и $\hat{Y}(t)$ также содержат по единственному элементу $\tilde{Y}(t)$ и $\hat{Y}(t)$ соответственно.

Выполнение условия **Е** обеспечивает следующие свойства векторов $\tilde{Y}(t)$, $\hat{Y}_i(t)$ и $Y(\lambda, t)$:

Свойство 9. Значения $\tilde{Y}_i(t) = D_i(\tilde{X}_i(t))$ для всех $i \in I$, где $\tilde{X}_i(t) = (\tilde{S}_i(t), \tilde{w}_{i1}(t), \dots, \tilde{w}_{im_i}(t))$, $\tilde{S}_i(t) = \min[L_i / (t - t_b), S_{li}]$ и $\tilde{w}_{ij}(t) = w_{ij}^*(\tilde{S}_i(t))$, $j \in J_i$, причем компоненты вектора $\tilde{Y}_i(t)$ убывают, а компоненты вектора $\hat{Y}_i(t)$ не возрастают по t на отрезке $[t_1(\lambda), \min[L_i/S_{li} + t_b, t_2(\lambda)]]$. На остальной части отрезка $[t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ оба вектора неизменны по t . Последнее справедливо, поскольку $\tilde{S}_i(t) = S_{li}$ для всех t из этой части отрезка.

Свойство 10. Для любых $l = 1, \dots, \sigma - 1$ вектор $\tilde{X}(t_l(\lambda)) = (\tilde{X}_i(t_l(\lambda)) \mid i \in I) \in \mathbf{X}^*(\lambda, t_l(\lambda), Y(\lambda, t_l(\lambda)))$, причем $M(t_l(\lambda), Y(\lambda, t_l(\lambda))) \neq \emptyset$, где $M(t, Y)$ – множество таких пар (i, j) , $i \in I$ и $j \in J_i$, что $\tilde{S}_i(t) = L_i / (t - t_b) \geq S_{li}$ и $D_{ij}(\tilde{x}_{ij}(t)) = y_{ij}$, $\tilde{x}_{ij}(t) = (\tilde{S}_i(t), \tilde{w}_{ij}(t))$.

Свойство 11. Если для некоторых $l = 2, \dots, \sigma - 1$ пара $(i, j) \in M(\lambda, t_l(\lambda), Y(\lambda, t_l(\lambda)))$, то $\tilde{y}_{ij}(t_l(\lambda) - \varepsilon) < y_{ij}(\lambda, t_l(\lambda))$ и $\hat{y}_{ij}(t_l(\lambda) - \varepsilon) = \max\{h \in \mathbf{H} \mid h < y_{ij}(\lambda, t_l(\lambda))\}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Если $t_l(\lambda) > L_i / S_{li} + t_b$ для некоторого $i \in I$, то $\tilde{y}_{ij}(t_l(\lambda) - \varepsilon) = \tilde{y}_{ij}(t)$ и, следовательно, $\hat{y}_{ij}(t_l(\lambda) - \varepsilon) = \hat{y}_{ij}(t)$ для любых $j \in J_i, t \geq t_l(\lambda)$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$.

На рис. 2 показан характер функции $\Phi(\lambda, t)$ на отрезке $[t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ в общем случае при некотором фиксированном значении $\lambda \in (0, 1)$ и произвольном (но удовлетворяющем отмеченному выше замечанию 2) выборе вектора $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$.

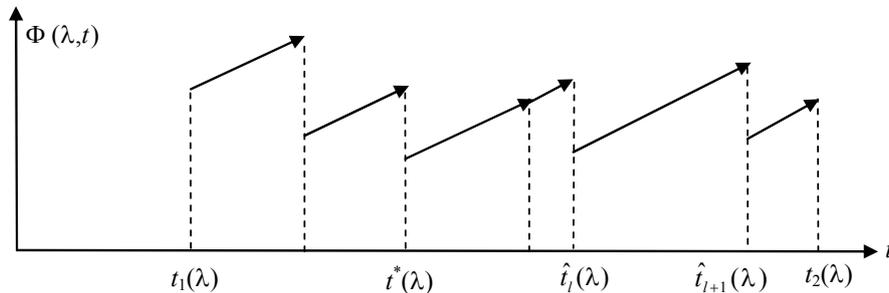


Рис. 2. Поведение функций $\Phi(\lambda, t)$ на отрезке $[t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$

Из отмеченных свойств полуинтервалов $[t_l(\lambda), t_{l+1}(\lambda)], l = 1, 2, \dots, \sigma$, следует, что для отыскания оптимального значения $t^*(\lambda)$ параметра t на отрезке $[t_1(\lambda), t_2(\lambda)]$ достаточно рассматривать лишь элементы множества \hat{T} . В общем случае функция $\Phi(\lambda, t)$ на множестве \hat{T} не является унимодальной, поэтому для отыскания $t^*(\lambda)$ необходимо использовать методы решения

многоэкстремальных задач. Отметим также, что выбор $Y(\lambda, t) = Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$ с учетом минимизации значения $t''(\lambda, t, Y)$ минимизирует число σ получаемых полуинтервалов.

3. Декомпозиционная схема решения задачи $\mathbf{B}(\lambda)$

Отмеченные выше свойства компонент задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ позволяют предложить итерационную схему ее решения, на каждой итерации которой решается совокупность следующих более простых взаимосвязанных подзадач:

Подзадача $\mathbf{B}_0(\lambda)$. Определить границы $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$ отрезка поиска значения $t^*(\lambda)$. В частности, в качестве $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$ можно принять нижнюю и верхнюю оценки значения $t(X^*)$ либо использовать для их нахождения различные эвристические приемы. В последнем случае получение точного решения задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ не гарантируется, поскольку не исключено завышение или занижение значений $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$ соответственно (см. ниже замечание 3).

Подзадача $\mathbf{B}_1(t)$. Определить значение такого вектора $\hat{Y} \in \hat{\mathbf{Y}}(t)$, что $Y \leq \hat{Y}$ для некоторого $Y \in \mathbf{Y}^*(\lambda, t)$.

Подзадача $\mathbf{B}_2(\lambda, \hat{Y})$. Определить значение $Y(\lambda, \hat{Y})$ вектора $Y \in \mathbf{Y}$, минимизирующее функцию $\mathfrak{H}(\lambda, Y)$ при фиксированном значении параметра λ и дополнительном условии $Y \leq \hat{Y}$.

Подзадача $\mathbf{B}_3(Y)$. Определить минимум $\hat{t}(Y)$ функции $t(X)$ на множестве $\mathbf{X}(Y) = \{X \in \mathbf{X} \mid D(X) \geq Y\}$ при фиксированном значении вектора $Y \in \mathbf{Y}$.

Некоторые возможные методы решения этих задач с учетом их свойств, отмеченных в предыдущем разделе, рассматриваются в разд. 4.

Общий алгоритм решения задачи $\mathbf{B}(\lambda)$:

Шаг 0. Определяем значения $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$ в результате решения подзадачи $\mathbf{B}_0(\lambda)$. Полагаем $t = t_2(\lambda)$ и $\Omega^* = \infty$.

Шаг 1. Определяем вектор $\hat{Y} = \hat{Y}(t) \in \hat{\mathbf{Y}}(t)$ в результате решения подзадачи $\mathbf{B}_1(t)$.

Шаг 2. Определяем вектор $Y = Y(t) = Y(\lambda, \hat{Y})$ в результате решения подзадачи $\mathbf{B}_2(\lambda, \hat{Y})$.

Шаг 3. Определяем $\hat{t}(Y)$ в результате решения подзадачи $\mathbf{B}_3(Y)$. Полагаем $t = \max[t_1(\lambda), \hat{t}(Y)]$.

Шаг 4. Если $\Omega(\lambda, t, Y) < \Omega^*$, полагаем $\Omega^* = \Omega(\lambda, t, Y)$ и $(t^*(\lambda), Y^*(\lambda)) = (t, Y)$. Если $t = t_1(\lambda)$, принимаем $X^*(\lambda) \in \{X \in \mathbf{X}(t^*(\lambda)) \mid D(X) \geq Y^*(\lambda)\}$. Алгоритм заканчивает работу. Иначе полагаем $t = t - \varepsilon$ и переходим к шагу 1.

Описанный алгоритм сводит решение задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ к выполнению конечной последовательности итераций, на каждой из которых строится и анализируется очередной (в порядке убывания l) полуинтервал $[\hat{t}_l(\lambda), \hat{t}_{l+1}(\lambda)]$ с учетом некоторой информации, полученной на предыдущей итерации при построении и анализе полуинтервала $[\hat{t}_{l+1}(\lambda), \hat{t}_{l+2}(\lambda)]$. При этом последовательно определяются вектор $\hat{Y} = \hat{Y}(\hat{t}_{l+1}(\lambda) - \varepsilon)$ (подзадача $\mathbf{B}_1(t)$), вектор $Y = Y(\lambda, \hat{t}_{l+1}(\lambda) - \varepsilon)$ (подзадача $\mathbf{B}_2(\lambda, \hat{Y})$), нижняя граница $\hat{t}_l(\lambda) = \max[t_1(\lambda), \hat{t}(Y)]$ текущего полуинтервала (подзадача $\mathbf{B}_3(Y)$), значение функции $\Phi(\lambda, t) = \Omega(\lambda, t, Y(\lambda, t))$ в точке $\hat{t}_l(\lambda)$, а также текущее наименьшее значение Ω^* функции $\Phi(\lambda, t)$ и соответствующее значение набора искомых параметров (t, X, Y) .

Очевидно, что число итераций не превосходит числа σ , значение которого определяется в ходе алгоритма.

Замечание 3. Пусть для некоторого λ и эвристически полученного $t_1(\lambda)$ значение $t^*(\lambda) = t_1(\lambda)$, что может свидетельствовать о завышении значения $t_1(\lambda)$. Тогда можно положить $t_2(\lambda) = t_1(\lambda)$, ввести новую уточненную нижнюю оценку $t_1(\lambda)$ и повторить решение задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ с новыми значениям $t_1(\lambda)$ и $t_2(\lambda)$. Аналогично можно поступить и в случае, когда $t^*(\lambda) = t_2(\lambda)$.

Замечание 4. Для получения приближенного решения процесс может быть остановлен при соблюдении одного из следующих условий: после выполнения заданного числа следующих друг за другом итераций текущее значение Ω^* не изменилось; на текущей итерации полученное на шаге 2 значение $\Omega(\lambda, t, Y)$ превосходит текущее значение Ω^* на заданную величину.

Описанная в разд. 2 и 3 схема решения задачи \mathbf{A} показана на рис. 3.

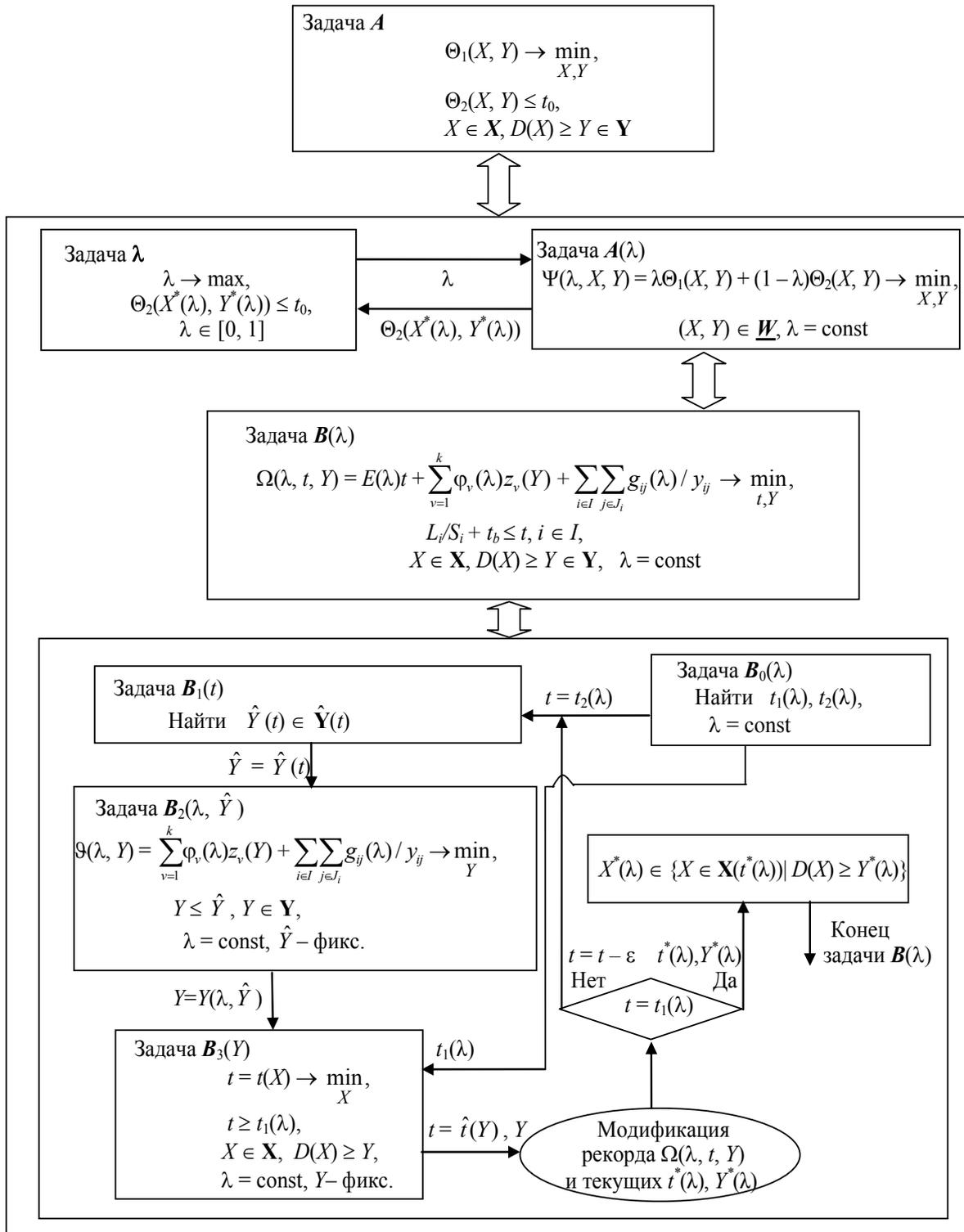


Рис. 3. Декомпозиционная схема решения задачи A

4. Решение основных подзадач

Возможны различные подходы к решению подзадачи (обозначим ее B_0) по определению нижней t_{\min} и верхней t_{\max} оценок функции $t(X^*)$. Простейший из них – использование нижней $\omega_{1\min}$ и верхней $\omega_{1\max}$ оценок возможной доли циклового времени $t(X^*)$ в переменной части

штучного времени (т. е. фактически коэффициента загрузки оборудования). Такие оценки могут быть получены из опыта эксплуатации аналогичного оборудования. В этом случае можно полагать $t_{\min} = \omega_{1\min}t_0$ и $t_{\max} = \omega_{1\max}t_0$.

Один из наиболее общих подходов связан с использованием вместо оценок t_{\min} и t_{\max} оценок границ возможных значений функции $t(X)$ в рамках ограничений (9)–(13) и дополнительного условия $t(X) \leq \omega_{1\max}t_0$. В частности, можно положить $t_{\min} = \max\{L_i / S_{2i} + t_b \mid i \in I\}$ и $t_{\max} = \min\{\omega_{1\max}t_0, \min\{L_i / S_{1i} + t_b \mid i \in I\}\}$, где $[S_{1i}, S_{2i}]$ – по-прежнему проекция множества \mathbf{X}_i на ось S_i , $i \in I$. В свою очередь, $S_{1i} = \max\{S_{1i}(j) \mid j \in J_i\}$ и $S_{2i} = \min\{S_{2i}(j) \mid j \in J_i\}$, где $S_{1i}(j)$ и $S_{2i}(j)$ – минимальное и максимальное значения S_i по всем x_{ij} , удовлетворяющим ограничениям (9)–(12) и условию $D_{ij}(x_{ij}) \geq h_1$. Для определения $S_{1i}(j)$ и $S_{2i}(j)$ достаточно решить две простейшие задачи геометрического программирования. Если для каких-либо $i \in I$ и $j \in J_i$ какая-либо из этих задач не имеет решения или $S_{1i} > S_{2i}$, то исходная задача \mathbf{A} также не имеет решения.

Другой подход к определению t_{\min} и t_{\max} связан с нахождением нижней $\omega_{2\min}$ и верхней $\omega_{2\max}$ оценок функции $\omega(Y^*) = \sum_{v=1}^k \varphi_{2v} z_v(Y^*) + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} g_{2ij} / y_{ij}^*$ в ограничении (8), рассматриваемом как равенство. В этом случае можно полагать $t_{\min} = (t_0 - \omega_{2\max})/E_2$ и $t_{\max} = (t_0 - \omega_{2\min})/E_2$. Отметим, что когда заданное значение t_0 существенно превышает $\Theta_2(X^*, Y^*)$ (что нетипично в реальных задачах), такой подход может привести к завышению значения нижней оценки t_{\min} . Для определения значений $\omega_{2\min}$ и $\omega_{2\max}$ можно воспользоваться следующим приемом. Положим w_{ij}^{\min} и w_{ij}^{\max} равными наименьшему и наибольшему значению параметра w_{ij} в рамках ограничений (9)–(11) (и, возможно, (12)) при $S_i = S_i' = \max[S_i^{\min}, L_i / \omega_{1\max}t_0]$ и $S_i = S_i^{\max}$ соответственно; $X^{\min} = ((S_i', w_{ij}^{\min}) \mid i \in I, j \in J_i)$ и $X^{\max} = ((S_i^{\max}, w_{ij}^{\max}) \mid i \in I, j \in J_i)$. Тогда в качестве $\omega_{2\min}$ можно принять значение функции $\Omega(0, t(X^{\min}), Y(0, \hat{Y}))$ при $\hat{Y} = \{\hat{y}_{ij} = \max\{h_v \in \mathbf{H} \mid D_{ij}(S_i', w_{ij}^{\min}) \geq h_v\} \mid i \in I, j \in J_i\}$, а в качестве $\omega_{2\max}$ – значение функции $\Omega(0, t(X^{\max}), Y(0, \hat{Y}))$ при $\hat{Y} = \{\hat{y}_{ij} = \max\{h_v \in \mathbf{H} \mid D_{ij}(S_i^{\max}, w_{ij}^{\max}) \geq h_v\} \mid i \in I\}$. Нахождение значений w_{ij}^{\min} и w_{ij}^{\max} сводится к решению задач линейного программирования малой размерности относительно переменных $\ln S_i$ и $\ln w_{ij}$.

В подзадаче $\mathbf{B}_0(\lambda)$ при $\lambda \in \{0, 1\}$ в качестве искомым нижней $t_1(\lambda)$ и верхней $t_2(\lambda)$ оценок значения $t^*(\lambda)$ можно принять упомянутые ранее значения t_{\min} и t_{\max} . На последующих итерациях решения задачи \mathbf{B} для каждого очередного значения $\lambda = \lambda'$ можно полагать $t_1(\lambda') = \max[\underline{t}(0), \min[t^*(\underline{\lambda}), t^*(\bar{\lambda})]]$ и $t_2(\lambda') = \min[\bar{t}(0), \max[t^*(\underline{\lambda}), t^*(\bar{\lambda})]]$, где $\underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ – соответственно ближайшие меньшее и большее к λ' значения параметра λ из тех, при которых задача $\mathbf{B}(\lambda)$ уже решалась, $\underline{t}(0) = \min\{t \in [t_1(0), t_2(0)] \mid \Omega(0, t, Y^*(0)) \leq t_0\}$, $\bar{t}(0) = \max\{t \in [t_1(0), t_2(0)] \mid \Omega(0, t, Y^*(0)) \leq t_0\}$. Значения $\underline{t}(0)$ и $\bar{t}(0)$ могут быть найдены в процессе решения задачи $\mathbf{B}(0)$.

Подзадача $\mathbf{B}_1(t)$ в общем случае достаточно сложна, однако в типичном для реальных ситуаций случае выполнения условия \mathbf{E} ее решение применительно к представленной выше общей схеме решения задачи $\mathbf{B}(\lambda)$ не вызывает принципиальных сложностей. Рассмотрим этот случай более детально. Предположим, что в процессе построения и анализа полуинтервала $[\hat{t}_l(\lambda), \hat{t}_{l+1}(\lambda)]$ для некоторого $l \in \{2, \dots, \sigma\}$ уже определены значения $\hat{t}_l(\lambda)$, $Y(\lambda, \hat{t}_l(\lambda))$ и $M(\hat{t}_l(\lambda), Y(\lambda, \hat{t}_l(\lambda)))$. Тогда в силу свойств 9–11 для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $t = \hat{t}_l(\lambda) - \varepsilon$ значения компонент \hat{y}_{ij} вектора $\hat{Y} = \hat{Y}(t)$ могут быть получены следующим образом:

- $\hat{y}_{ij} = \max\{h \in \mathbf{H} \mid h < y_{ij}(\lambda, \hat{t}_l(\lambda))\}$ для всех $(i, j) \in M(\lambda, \hat{t}_l(\lambda), Y(\lambda, \hat{t}_l(\lambda)))$;
- $\hat{y}_{ij} = \hat{y}_{ij}(\hat{t}_{l+1}(\lambda) - \varepsilon)$ для всех таких $i \in I$ и $j \in J_i$, что $\hat{t}_l(\lambda) > L_i / S_{1i} + t_b$;
- $\hat{y}_{ij} = \max\{h \in \mathbf{H} \mid h \leq D_{ij}(\tilde{S}_i(\hat{t}_l(\lambda)), \tilde{w}_{ij}(\hat{t}_l(\lambda)))\}$ в остальных случаях.

Для $t = \hat{t}_\sigma(\lambda)$ значения компонент вектора $\hat{Y}(t)$ определяются согласно последнему случаю.

Подзадача $B_2(\lambda, \hat{Y})$ является задачей комбинаторной оптимизации. Ниже приводится алгоритм ее решения, основанный на идеях многошаговой оптимизации.

Положим $\Xi_v(\hat{Y}) = \{ij \mid i \in I, j \in J_i, h_v \leq \hat{y}_{ij} < h_{v+1}\}$, $v = 1, \dots, k$, $h_{k+1} = \infty$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\hat{Y}) = \{h_v \in \mathbf{H} \mid \Xi_v(\hat{Y}) \neq \emptyset\} = \{\underline{h}_1, \underline{h}_2, \dots, \underline{h}_r\}$, где $\underline{h}_v < \underline{h}_{v+1}$. Очевидно, что подзадача $B_1(\lambda, \hat{Y})$ не имеет решения при некотором \hat{Y} , если $\hat{y}_{ij} < h_1$ для некоторых $i \in I, j \in J_i$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $\bigcup_{v=1}^r \Xi_v(\hat{Y})$ совпадает с множеством всех инструментов.

Рассмотрим r -шаговый управляемый процесс с начальным состоянием $\pi_0 = 0$ и двумя возможными управлениями (условно обозначаемыми 0 и 1) на каждом шаге $v \in \{1, 2, \dots, r\}$. Управление $\xi_v = 1$ означает останов оборудования для смены некоторой группы инструментов после обработки ими очередных $h_v \in \mathbf{H}$ деталей, при $\xi_v = 0$ такой останов не планируется. При управлении $\xi_v = 0$ на шаге v состояние процесса не изменяется, в противном случае процесс переходит в состояние $\pi_v = v$, т. е. функция $f_\pi(\bullet)$ перехода из состояния в состояние такова, что $\pi_v = f_\pi(\pi_{v-1}, \xi_v) = \pi_{v-1}$ при $\xi_v = 0$ и $\pi_v = f_\pi(\pi_{v-1}, \xi_v) = v$ при $\xi_v = 1$. Таким образом, на шаге $v = 1, 2, \dots, r$ для всех $ij \in \Xi_v(\hat{Y})$ принимается $y_{ij} = \underline{h}_v$ при управлении $\xi_v = 1$ и $y_{ij} = \underline{h}_{\pi_{v-1}}$ при $\xi_v = 0$, где π_{v-1} – состояние процесса после шага $(v-1)$. Множество Π_v потенциально возможных состояний процесса после шага v совпадает с $\{1, 2, \dots, v\}$, причем $\xi_1 = 1$. В качестве функции $f_{c_v}(\bullet)$ затрат на шаге v примем функцию $f_{c_v}(\pi_{v-1}, \xi_v) = \lambda \tau_{1v} + (1-\lambda)\tau_{2v} + c_v / \underline{h}_v$ при $\xi_v = 1$ и $f_{c_v}(\pi_{v-1}, \xi_v) = c_v / \underline{h}_{\pi_{v-1}}$ при $\xi_v = 0$, где $c_v = \sum_{ij \in \Xi_v(\hat{Y})} (\lambda g_{1ij} + (1-\lambda)g_{2ij})$.

С учетом свойства 3 можно показать, что решение $Y(\lambda, \hat{Y})$ подзадачи $B_2(\lambda, \hat{Y})$ может быть получено в результате нахождения управления $\xi = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_r)$ или, что эквивалентно, последовательности состояний $\pi = (\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_r)$, минимизирующей целевую функцию $f_{c_1}(0, 1) + \sum_{v=2}^r f_{c_v}(\pi_{v-1}, \xi_v)$. Очевидно, что минимальное значение этой функции по всем возможным управлениям ξ совпадает с минимальным значением $\mathfrak{G}^*(\lambda, \tilde{Y})$ целевой функции $\mathfrak{G}(\lambda, Y)$ в подзадаче $B_1(\lambda, \hat{Y})$. Отметим, что постановка аналогичной (в математическом смысле) задачи в терминах целочисленного линейного программирования рассмотрена в [21].

Обозначим через $G_v(\pi_v)$ наименьшее значение функции $f_{c_1}(0, 1) + \sum_{l=2}^v f_{c_l}(\pi_{l-1}, \xi_l)$ по всем частичным управлениям $(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_v)$, приводящим процесс в состояние $\pi_v \in \Pi_v$ после шага $v = 2, 3, \dots, r$. Можно показать справедливость следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^*(\lambda, \hat{Y}) &= \min \{G_r(\pi_r) \mid \pi_r \in \Pi_r\}; \\ G_v(\pi_v) &= \min \{G_{v-1}(\pi_{v-1}) \mid \pi_{v-1} \in \Pi_{v-1}\} + \lambda \tau_{1v} + (1-\lambda)\tau_{2v} + c_v / \underline{h}_v, \quad \pi_v = v = 2, 3, \dots, r; \\ G_v(\pi_v) &= G_{v-1}(\pi_v) + c_v / \underline{h}_v, \quad \pi_v \in \Pi_{v-1}, v = 2, 3, \dots, r, \end{aligned}$$

которые позволяют найти искомую последовательность состояний в рассматриваемом процессе с использованием традиционных вычислительных схем динамического программирования. Трудоемкость данного метода решения подзадачи $B_2(\lambda, \hat{Y})$ относительно невелика – $O(r^2)$.

Подзадача $B_3(Y)$ является специфическим частным случаем задачи геометрического программирования, что позволяет помимо соответствующих известных общих методов геометрического программирования использовать для ее решения следующий подход, более полно учитывающий специфику задачи.

Обозначим через X_{ij} проекцию множества X_i на плоскость переменных S_i и w_{ij} , положим $X_{ij}(y_{ij}) = \{x_{ij} \in X_{ij} \mid D_{ij}(x_{ij}) \geq y_{ij}\}$, $i \in I$ и $j \in J_i$. Множества X_{ij} и $X_{ij}(y_{ij})$ являются выпуклыми в координатах $\ln S_i$ и $\ln w_{ij}$, причем проекция первого из них на ось S_i совпадает с отрезком $[S_{1i}, S_{2i}]$, а проекцией второго на ту же ось является отрезок $[S_{1i}(y_{ij}), S_{2i}(y_{ij})] = \{S_i \in [S_{1i}, S_{2i}] \mid D_{ij}(S_i, w_{ij}^*(S_i)) \geq y_{ij}\}$.

Очевидно, что $\hat{t}(Y) = \max \{L_i / \min \{S_{2i}(y_{ij}) \mid j \in J_i\} + t_b \mid i \in I\}$. Для нахождения $S_{2i}(y_{ij})$ может быть использован один из методов поиска на отрезке большего корня уравнения с вогнутой (относи-

тельно $\ln S_i$) левой частью. В случае выполнения условия **E** значение $S_{1i}(y_{ij}) = S_{1i}$ для любых $y_{ij} \geq h_{1i}$, а при выполнении условия **E1** значение $w_{ij}^*(S_i) = \min\{w_{ij} \mid (S_i, w_{ij}) \in \mathbf{X}_{ij}\}$ для всех $S_i \in [S_{1i}, S_{2i}]$.

Поскольку подзадачи $\mathbf{B}_1(t)$ и $\mathbf{B}_3(Y)$ не содержат явно параметра λ , то информация, получаемая в ходе их решения при одних значениях λ , может быть использована в дальнейшем при решении этих подзадач с другими значениями λ .

Заключение

Разработана математическая модель оптимизации режимов работы инструментальной наладки специального многопозиционного металлорежущего агрегатного оборудования, включая определение как режимов параллельной обработки деталей, так и стратегии групповой смены инструментов. Модель сформулирована в терминах смешанного нелинейного программирования. Для решения соответствующей оптимизационной задачи предложен декомпозиционный метод, сводящий поиск ее решения к решению конечной последовательности более простых взаимосвязанных подзадач. Рассмотрены методы решения основных подзадач.

В исследуемую математическую модель рассматриваемой проектной задачи не включены ограничения на суммарные усилие подачи и мощность резания по группам инструментов с приводом подачи от одного силового узла. Следует отметить, что описанный в работе подход может быть обобщен и на этот более общий случай.

Авторы выражают признательность И.С. Орещенкову и Е.Н. Клишевичу за разработку экспериментального программного обеспечения, реализующего описанные методы, и участие в проведении численных экспериментов.

Список литературы

1. Оптимизация режимов обработки на металлорежущих станках / А.М. Гильман [и др.]. – М. : Машиностроение, 1972. – 188 с.
2. Горанский, Г.К. Автоматизация технического нормирования работ на металлорежущих станках с помощью ЭВМ / Г.К. Горанский, Е.В. Владимиров, Л.Н. Ламбин. – М. : Машиностроение, 1970. – 222 с.
3. Жак, С.В. Оптимизация проектных решений в машиностроении / С.В. Жак. – Ростов : РГУ, 1982. – 168 с.
4. Игумнов, Б.Н. Расчет оптимальных режимов обработки для станков и автоматических линий / Б.Н. Игумнов. – М. : Машиностроение, 1974. – 198 с.
5. Левин, Г.М. Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений / Г.М. Левин, В.С. Танаев. – Минск : Наука и техника, 1978. – 240 с.
6. Якобс, Г.Ю. Оптимизация резания / Г.Ю. Якобс, Э. Якоб, Д. Кохан. – М. : Машиностроение, 1981. – 279 с.
7. Cakir, M.C. Optimization of machining conditions for multi-tool milling operations / M.C. Cakir, A. Gurarda // International Journal of Production Research. – 2000. – Vol. 38, № 15. – P. 3537–3552.
8. Hui, Y.V. Optimal machining conditions with cost of quality and tool maintenance for turning / Y.V. Hui, L.C. Leung, R. Linn // International Journal of Production Research. – 2001. – Vol. 39, № 4. – P. 647–665.
9. Juan, H. The optimal cutting parameter selection of production cost in HSM for SKD61 tool steels / H. Juan, S.F. Yu, B.Y. Lee // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2003. – Vol. 43. – P. 679–686.
10. Liang, M. Integration of cutting parameter selection and tool adjustment decision for multi-pass turning / M. Liang, M. Mgwatu, M. Zuo // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2001. – Vol. 17. – P. 861–869.
11. Libao, An. On Optimization of Machining Parameters / An. Libao, M. Chen // Proc. 4th Intern. Conf. on Control and Automation. – Montreal, Canada, 2003. – P. 839–843.
12. Mukherjee, I. A review of optimization techniques in metal cutting processes / I. Mukherjee, P.K. Ray // Computers and Industrial Engineering. – 2006. – Vol. 50, № 1. – P. 15–34.

13. Gray, A.E. A synthesis of decision models for tool management in automated manufacturing / A.E. Gray, A. Seidman, K.E. Stecke // Management Science. – 1993. – Vol. 32, № 5. – P. 549–567.
14. Liu, P.H. Optimal tool replacement based on the surface roughness in finish machining / P.H. Liu, V. Makis, A.K.S. Jardine // IMA Journal of Management Mathematics. – 1998. – Vol. 9, № 3. – P. 223–239.
15. Shabtay, D. Optimization of the Machining Economics Problem Under the Failure Replacement Strategy / D. Shabtay, M. Kaspi // International Journal of Production Economics. – 2002. – Vol. 80, № 3. – P. 213–230.
16. Shabtay, D. The efficiency range of economical cutting conditions and tool replacement under the age replacement strategy / D. Shabtay, M. Kaspi // International Journal of Production Research. – 2003. – Vol. 41, № 11. – P. 2563–2580.
17. Yip-Hoi, D. Finding minimum cost tool grouping schemes on machining systems / D. Yip-Hoi, D. Dutta // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2000. – Vol. 122, № 3. – P. 543–548.
18. Levin, G. Optimization of operating modes at transfer lines under group replacement of instruments / G. Levin, B. Rozin // Book of Abstracts of the 22nd European Conference on Operational Research. – Prague, 2007. – P. 113.
19. Levin, G. Optimization of cutting modes for transfer lines under group replacement of tools / G. Levin, B. Rozin // Abstracts of the conf. «Optimization 2007». – Porto, 2007. – P. 121.
20. Levin, G. Optimization of machining modes for multi-head machines under group replacement of tools / G. Levin, B. Rozin // Book of Abstracts of the 13th IFAC Symposium on Information control problems in manufacturing INCOM'09. – Moscow, 2009. – P. 25.
21. Береснев, В.Л. Экстремальные задачи стандартизации / В.Л. Береснев, Э.Х. Гимади, В.Т. Дементьев. – Новосибирск : Наука, 1978. – 335 с.

Поступила 10.03.11

*Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: levin@newman.bas-net.by,
rozin@newman.bas-net.by*

G.M. Levin, B.M. Rozin

OPTIMIZATION OF MACHINING MODES FOR MULTIPLE-TOOLING PROCESSING WITH GROUP REPLACEMENT OF TOOLS

The mathematical model and decomposition technique for the problem of joint optimization of machining modes of multiple-tooling processing of parts on the multi-head machines and the strategy of group replacement of tools subject to basic technological and constructional constraints and the required productivity are proposed. One of the following criteria can be accepted as the objective function: the unit production cost, the summary tooling investment, and the floor-to-floor time.