ИНФОРМАТИКА

2011 июль-сентябрь № 3

УДК 517.958:537.8

В.Т. Ерофеенко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОНИКНОВЕНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНЫЕ ЭКРАНЫ

Предлагается алгоритм аналитического решения краевой задачи прохождения низкочастотного магнитного поля катушки проводников с электрическим током через многослойный плоский экран со слоями, характеризуемыми произвольными комплексными диэлектрическими и магнитными проницаемостями. Вычисляется коэффициент ослабления поля возбуждения за экраном.

Введение

При разработке электротехнических устройств и сопутствующих устройств электроники важным является решение проблемы электромагнитной совместимости технических средств, связанных с защитой функциональных возможностей сложной техники от воздействия внешних электрических и магнитных полей различных типов. Для решения этой проблемы возникает техническая задача конструирования тонких экранов и оболочек, служащих для ослабления внешних полей и полей близкорасположенных источников.

Экраны используются для решения проблемы ослабления побочных электромагнитных излучений, которые возникают при обработке информации средствами вычислительной техники и являются потенциальными носителями конфиденциальной информации [1]. Для моделирования процессов проникновения полей через тонкие слои используется метод двухсторонних граничных условий, учитывающих материальную структуру экранов [2–4]. В случае низкочастотных магнитных и электрических полей векторные граничные условия в потенциальном приближении сводятся к скалярным граничным условиям для скалярных потенциалов. Граничные условия позволяют сформулировать краевые задачи и применить методы решения краевых задач для уравнения Лапласа к экранам различной геометрии [5–7]. Такая методика применялась и к решению задач экранирования для вращающихся экранов [8]. Актуальным является конструирование многослойных экранов из композитных материалов, комбинирование слоев в которых позволяет улучшить электродинамические свойства экранов [9].

В статье на основании двухсторонних граничных условий для полей с осевой симметрией [10] предложена методика аналитического решения в потенциальном приближении краевой задачи экранирования для многослойного экрана в случае воздействия на экран магнитного поля сосредоточенного источника. Заметим, что для расчета экранирующих систем широко используется конечно-разностные методы, метод поглощающих граничных условий и метод конечного интегрирования [11–14].

1. Постановка задачи

В пространстве R^3 с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_0, μ_0 размещен экран $D(0<z<\Delta)$, состоящий из *n* слоев $\Omega_s\left(z_s<z<z_{s+1}\right), s=\overline{1,n},\ z_1=0, z_{n+1}=\Delta,\ \ \Delta_s=z_{s+1}-z_s$, где Δ_s – толщина *s*-го слоя, $\Delta=\sum_{s=1}^{n}\Delta_s$. Экран *D* ограничен плоскостями $\Gamma_1(z=0),\ \Gamma_2(z=\Delta)$. Слои выполнены из материалов с электромагнитными комплексно-значными параметрами $\varepsilon_s=\varepsilon_{rs}\varepsilon_0,\ \mu_s=\mu_{rs}\mu_0$; $\varepsilon_{rs},\ \mu_{rs}$ – относительные диэлектрические и магнитные проницаемости. Электромагнитные поля $\vec{\mathrm{E}}^{(s)}, \vec{\mathrm{H}}^{(s)}$ в слоях Ω_s подчиняются уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{\mathrm{E}}^{(s)}=i\omega\mu_s\vec{\mathrm{H}}^{(s)},\qquad \operatorname{rot}\vec{\mathrm{H}}^{(s)}=-i\omega\varepsilon_s\vec{\mathrm{E}}^{(s)}\quad \text{в}\ \ \Omega_s, \tag{1}$$

где $\omega=2\pi f$, f – частота поля.

Поля $\vec{E}_j, \vec{H}_j$ $(j=1,2)$ в полупространствах $D_1(z<0)$, $D_2(z>\Delta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E}_j = i\omega\mu_0\vec{H}_j, \quad \operatorname{rot}\vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_j \quad \text{в } D_j. \tag{2}$$

В области D_1 на оси $0z$ расположен источник D_0, который возбуждает первичное поле $\vec{E}_0, \vec{H}_0$. Обозначим $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1$ отраженное поле в области D_1; $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ – поле, проникшее в область D_2; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$ – суммарное поле в области D_1.

Поставим краевую задачу, описывающую проникновение первичного поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ через экран *D*.

Краевая задача. Требуется при заданном поле источника $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ определить поля

$$\vec{E}'_1, \vec{H}'_1 \in C^1(D_1)\cap C(\bar{D}_1);\ \vec{E}_2, \vec{H}_2 \in C^1(D_2)\cap C(\bar{D}_2);\ \vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)} \in C^1(\Omega_s)\cap C(\bar{\Omega}_s),$$

для которых выполнены уравнения (1), (2), граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях $\gamma_s(z=z_s)$, $\Gamma_1=\gamma_1$, $\Gamma_2=\gamma_{n+1}$,

$$\left(\vec{E}_\tau^{(s-1)} - \vec{E}_\tau^{(s)}\right)\Big|_{\gamma_s} = 0, \quad \left(\vec{H}_\tau^{(s-1)} - \vec{H}_\tau^{(s)}\right)\Big|_{\gamma_s} = 0, \quad \mathrm{s} = 2,\ldots n;$$
$$\left(\vec{E}_{1\tau} - \vec{E}_\tau^{(1)}\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\vec{H}_{1\tau} - \vec{H}_\tau^{(1)}\right)\Big|_{\Gamma_1} = 0; \quad \left(\vec{E}_{2\tau} - \vec{E}_\tau^{(n)}\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \left(\vec{H}_{2\tau} - \vec{H}_\tau^{(n)}\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0 \tag{3}$$

и условия излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \vec{E}_2}{\partial r} - ik_0\vec{E}_2\right) = 0, \quad z>\Delta;$$
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial \vec{E}'_1}{\partial r} - ik_0\vec{E}'_1\right) = 0, \quad z<0, \tag{4}$$

где *r* – радиальная координата; $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$.

2. Представление низкочастотных магнитных полей

Рассмотрим случай взаимодействия низкочастотных магнитных полей с многослойным экраном, используя потенциальное приближение. В качестве источника поля выберем катушку с током, которая возбуждает низкочастотное первичное магнитное поле с комплексной амплитудой $\vec{H}_0$. Поле представим в потенциальном приближении через гармоническую функцию

$$\vec{H}_0 = -\operatorname{grad} u_0, \tag{5}$$

где u_0 – магнитный потенциал катушки с током, $\Delta u_0 = 0$.

Реальное магнитное поле определяется формулой

$$\vec{\mathbf{H}}_0 = \operatorname{Re}\left(\vec{H}_0 e^{-i\omega t}\right).$$

Отраженное и прошедшее поля также представим в потенциальном приближении:

$$\vec{H}_1' = -\operatorname{grad} u_1', \quad z < 0;$$
$$\vec{H}_2 = -\operatorname{grad} u_2, \quad z > \Delta, \tag{6}$$

где потенциалы u_1', u_2 удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u_1' = 0, \quad \Delta u_2 = 0.$$

Выразим магнитные потенциалы для первичного, отраженного и прошедшего полей в интегральном виде через цилиндрические гармонические функции [15] в цилиндрических координатах ρ, φ, z:

$$u_0 = \int_0^\infty A_0(\lambda)\, J_0(\lambda\rho)\, e^{-\lambda z} d\lambda, \quad z > -h_1; \tag{7}$$

$$u_1' = \int_0^\infty x(\lambda)\, J_0(\lambda\rho)\, e^{\lambda z} d\lambda, \quad z < 0; \tag{8}$$

$$u_2 = \int_0^\infty y(\lambda)\, J_0(\lambda\rho)\, e^{-\lambda z} d\lambda, \quad z > \Delta,$$

где $A_0(\lambda)$ – заданная функция; функции $x(\lambda), y(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий на экране *D*; $J_n(\cdot)$ – функция Бесселя.

Учитывая осевую симметрию полей (5), (6) относительно оси 0*z*, представим поля в цилиндрических координатах через цилиндрические базисные поля [10] при *m* = 0, полагая

$$\vec{H}_0 = \int_0^\infty \left(H_{0v_1} \vec{V}_1 + H_{0v_2} \vec{V}_2 + H_{0v_0} \vec{V}_0 \right) d\lambda, \quad z > -h_1;$$
$$\vec{H}_1' = \int_0^\infty \left(H_{1v_1}' \vec{V}_1 + H_{1v_2}' \vec{V}_2 + H_{1v_0}' \vec{V}_0 \right) d\lambda, \quad z < 0; \tag{9}$$
$$\vec{H}_2 = \int_0^\infty \left(H_{2v_1} \vec{V}_1 + H_{2v_2} \vec{V}_2 + H_{2v_0} \vec{V}_0 \right) d\lambda, \quad z > \Delta.$$

Суммарное поле в области D_1 имеет вид

$$\vec{H}_1 = \int_0^\infty \left(H_{1v_1} \vec{V}_1 + H_{1v_2} \vec{V}_2 + H_{1v_0} \vec{V}_0 \right) d\lambda,$$

где

$$H_{1v_j} = H_{0v_j} + H_{1v_j}'; \quad H_{1v_0} = H_{0v_0} + H_{1v_0}';$$

$$\vec{V}_0 = J_0(\lambda\rho)\, \vec{e}_z; \quad \vec{V}_1 = J_1(\lambda\rho)\, \vec{e}_\varphi; \quad \vec{V}_2 = -J_1(\lambda\rho)\, \vec{e}_\rho. \tag{10}$$

Подставим потенциалы (7), (8) в формулы (5), (6):

$$\vec{\mathrm{H}}_0 = \int_0^\infty \lambda\, A_0(\lambda)\big(J_1(\lambda\rho)\vec{\mathrm{e}}_\rho + J_0(\lambda\rho)\vec{\mathrm{e}}_z\big)e^{-\lambda z}d\lambda\;;$$

$$\vec{\mathrm{H}}_1' = \int_0^\infty \lambda\, x(\lambda)\big(J_1(\lambda\rho)\vec{\mathrm{e}}_\rho - J_0(\lambda\rho)\vec{\mathrm{e}}_z\big)e^{\lambda z}d\lambda\;; \qquad (11)$$

$$\vec{\mathrm{H}}_2 = \int_0^\infty \lambda\, y(\lambda)\big(J_1(\lambda\rho)\vec{\mathrm{e}}_\rho + J_0(\lambda\rho)\vec{\mathrm{e}}_z\big)e^{-\lambda z}d\lambda\,.$$

После сравнения интегралов (9) и (11) получим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_{0\nu_1} = 0; \quad \mathrm{H}_{0\nu_2} = -\lambda A_0(\lambda)e^{-\lambda z}; \quad \mathrm{H}_{0\nu_0} = \lambda A_0(\lambda)e^{-\lambda z};\\
&\mathrm{H}'_{1\nu_1} = 0; \quad \mathrm{H}'_{1\nu_2} = -\lambda x(\lambda)e^{\lambda z}; \quad \mathrm{H}'_{1\nu_0} = -\lambda x(\lambda)e^{\lambda z};\\
&\mathrm{H}_{2\nu_1} = 0; \quad \mathrm{H}_{2\nu_2} = -\lambda y(\lambda)e^{-\lambda z}; \quad \mathrm{H}_{2\nu_0} = \lambda y(\lambda)e^{-\lambda z}.
\end{aligned} \qquad (12)$$

3. Магнитное поле катушки с током

Вычислим магнитный потенциал u_0 катушки с током I. Ось катушки совпадает с осью $0z$, R_1 – внутренний радиус катушки, R_2 – внешний радиус, l – высота катушки. Предварительно рассмотрим круговую нить радиуса $R(\rho = R)$, расположенную на плоскости $z = -h\ (h > 0)$, по которой течет ток I. Потенциал u_B^I витка с током в цилиндрической системе координат определяется формулой

$$u_B^I = \frac{IR}{2}\int_0^\infty J_1(\lambda R)J_0(\lambda\rho)\,e^{-\lambda(z+h)}d\lambda, \quad z > -h\,. \qquad (13)$$

Формула (13) выводится из разложения [16, с. 37] после применения теорем сложения [15, с. 89 (193.3.2); с. 77 (143.2.3)].

Катушка состоит из N витков, которые в сечении плоскостью $y = 0(x > 0)$ заполняют прямоугольник $S(R_1 < \rho < R_2, -h_2 < z < -h_1)$ с площадью $|S| = (R_2 - R_1)l,\quad l = h_2 - h_1$. Через прямоугольник S течет усредненный ток с плотностью токов $J = \dfrac{NI}{|S|}$. Положим в формуле (13) $I = J\,dh\,dR$, тогда

$$u_B^J\,dh\,dR = \frac{JR}{2}\int_0^\infty J_1(\lambda R)J_0(\lambda\rho)\,e^{-\lambda(z+h)}d\lambda\,dh\,dR. \qquad (14)$$

Проинтегрировав (14) по плоской области S, получим потенциал (7)

$$u_0 = \iint_S u_B^J\,dh\,dR = \int_0^\infty A_0(\lambda)J_0(\lambda\rho)\,e^{-\lambda z}d\lambda,$$

где

$$A_0(\lambda) = \frac{J}{2}\int_{R_1}^{R_2} R\,J_1(\lambda R)\,dR\int_{h_1}^{h_2} e^{-\lambda h}dh.$$

Учитывая формулу [17, с. 37]

$$\int_0^x x J_1(x)\,dx = x^3\Phi(x), \quad \Phi(x)=\frac{1}{6}\ {}_1F_2\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2},2;-\frac{x^2}{4}\right),$$

вычислим плотность

$$A_0(\lambda)=\frac{J}{2}\left(R_2^3\,\Phi(\lambda R_2)-R_1^3\Phi(\lambda R_1)\right)\left(e^{-\lambda h_1}-e^{-\lambda h_2}\right) \tag{15}$$

первичного потенциала (7).

4. Векторные двухсторонние граничные условия на многослойном экране

Электромагнитные поля с осевой симметрией, зависящие от числового параметра λ, в областях D_j представим через базисные векторы (10)

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{E}}_j &= \mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_1}\,\vec{\mathrm{V}}_1 + \mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_2}\,\vec{\mathrm{V}}_2 + \mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_0}\,\vec{\mathrm{V}}_0\,;\\ \vec{\mathrm{H}}_j &= \mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_1}\,\vec{\mathrm{V}}_1 + \mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_2}\,\vec{\mathrm{V}}_2 + \mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_0}\,\vec{\mathrm{V}}_0\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Введем вспомогательные двухмерные векторы для полей (16)

$$\vec{\mathrm{E}}_j^{\,\mathrm{v}}=\begin{pmatrix}\mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_1}\\ \mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_2}\end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{H}}_j^{\,\mathrm{v}}=\begin{pmatrix}\mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_1}\\ \mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_2}\end{pmatrix} \tag{17}$$

и четырехмерные векторы

$$\vec{\mathrm{W}}_j=\left(\mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_1},\mathrm{E}_{j\,\mathrm{v}_2},\mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_1},\mathrm{H}_{j\,\mathrm{v}_2}\right)^{\mathrm{T}},$$

где т – операция транспонирования.

Поля по обе стороны экрана D связаны с помощью двухсторонних граничных условий [10]. Рассмотрим случай, когда $Z_s=G_s=0$:

$$\vec{\mathrm{W}}_2(M_2)=\hat{A}_c\,\vec{\mathrm{W}}_1(M_1), \tag{18}$$

где точки $M_1(x,y,0)\in\Gamma_1$, $M_2(x,y,\Delta)\in\Gamma_2$, $\hat{A}_c=\hat{A}^{(n)}\,\hat{A}^{(n-1)}\ldots\hat{A}^{(s)}\ldots\hat{A}^{(2)}\,\hat{A}^{(1)}$; $\hat{A}^{(s)}$ – матрица размерности 4×4:

$$\hat{A}^{(s)}=\hat{A}(\lambda,\omega,\varepsilon_{rs},\mu_{rs},\Delta_s)=\begin{pmatrix}A_{11}^{(s)} & 0 & 0 & \alpha A_{14}^{(s)}\\ 0 & A_{22}^{(s)} & \beta A_{23}^{(s)} & 0\\ 0 & \frac{1}{\beta}A_{32}^{(s)} & A_{33}^{(s)} & 0\\ \frac{1}{\alpha}A_{41}^{(s)} & 0 & 0 & A_{44}^{(s)}\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь $A_{11}^{(s)} = A_{22}^{(s)} = A_{33}^{(s)} = A_{44}^{(s)} = C_s$;

$$A_{14}^{(s)} = \frac{\mu_{rs}}{v_s} S_s; \quad A_{23}^{(s)} = \frac{v_s}{\varepsilon_{rs}} S_s; \quad A_{32}^{(s)} = \frac{\varepsilon_{rs}}{v_s} S_s; \quad A_{41}^{(s)} = \frac{v_s}{\mu_{rs}} S_s;$$

$$C_s = \operatorname{ch}\left(v_s \Delta_s\right); \quad S_s = \operatorname{sh}\left(v_s \Delta_s\right); \quad v_s = \sqrt{\lambda^2 - k_s^2}; \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg v_s < \frac{\pi}{2};$$

$$k_s^2 = k_0^2 \varepsilon_{rs} \mu_{rs}; \quad k_0 = \frac{\omega}{c}; \quad \alpha = i\omega\mu_0; \quad \beta = \frac{i}{\omega\varepsilon_0}; \quad c \text{ – скорость света.}$$

Введем вспомогательные матрицы

$$\hat{B}^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(s)} & 0 & 0 & A_{14}^{(s)} \\ 0 & A_{22}^{(s)} & A_{23}^{(s)} & 0 \\ 0 & A_{32}^{(s)} & A_{33}^{(s)} & 0 \\ A_{41}^{(s)} & 0 & 0 & A_{44}^{(s)} \end{pmatrix}; \tag{20}$$

$$\hat{B} = \hat{B}^{(1)} \hat{B}^{(2)} \ldots \hat{B}^{(s)} \ldots \hat{B}^{(n)}$$

и нормированные матрицы

$$\overline{B}^{(s)} = \begin{pmatrix} \overline{A}_{11}^{(s)} & 0 & 0 & \overline{A}_{14}^{(s)} \\ 0 & \overline{A}_{22}^{(s)} & \overline{A}_{23}^{(s)} & 0 \\ 0 & \overline{A}_{32}^{(s)} & \overline{A}_{33}^{(s)} & 0 \\ \overline{A}_{41}^{(s)} & 0 & 0 & \overline{A}_{44}^{(s)} \end{pmatrix};$$

$$\overline{A}_{11}^{(s)} = \overline{A}_{22}^{(s)} = \overline{A}_{33}^{(s)} = \overline{A}_{44}^{(s)} = \overline{C}_s;$$

$$\overline{A}_{14}^{(s)} = \frac{\mu_{rs}}{v_s} \overline{S}_s; \quad \overline{A}_{23}^{(s)} = \frac{v_s}{\varepsilon_{rs}} \overline{S}_s; \quad \overline{A}_{32}^{(s)} = \frac{\varepsilon_{rs}}{v_s} \overline{S}_s; \quad \overline{A}_{41}^{(s)} = \frac{v_s}{\mu_{rs}} \overline{S}_s;$$

$$\overline{C}_s = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2v_s\Delta_s}\right); \quad \overline{S}_s = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2v_s\Delta_s}\right); \quad \hat{B}^{(s)} = e^{v_s\Delta_s} \overline{B}^{(s)}.$$

Рассмотрим произведение матриц $\overline{B} = \overline{B}^{(1)} \overline{B}^{(2)} \ldots \overline{B}^{(s)} \ldots \overline{B}^{(n)}$, тогда $\hat{B} = F\overline{B}$, где $F = \exp\left(\sum_{s=1}^{n} v_s \Delta_s\right)$.

Определим оператор $P_{\alpha\beta}$, который преобразует матрицы вида (20) в матрицы (19) с помощью формулы

$$P_{\alpha\beta}\left(\hat{B}^{(s)}\right) = \hat{A}^{(s)}$$

при любых числовых значениях α и β.

Сформулируем ряд лемм, которые характеризуют оператор $P_{\alpha\beta}$.

Лемма 1. Имеет место формула для любых матриц вида (20)

$$P_{\alpha\beta}\left(\hat{B}^{(s)}\right) P_{\alpha\beta}\left(\hat{B}^{(m)}\right) = P_{\alpha\beta}\left(\hat{B}^{(s)} \hat{B}^{(m)}\right). \tag{21}$$

Лемма 2. Обратная матрица для матрицы (19) определяется формулой

$$\left(\hat{A}^{(s)}\right)^{-1} = \hat{A}\left(\lambda,\omega,\varepsilon_{rs},\mu_{rs},-\Delta_s\right) = P_{-\alpha,-\beta}\left(\hat{B}^{(s)}\right). \tag{22}$$

Формулы (21), (22) проверяются непосредственным перемножением матриц.

Учитывая формулы (21), (22), вычислим обратную матрицу

$$\hat{A}_c^{-1} = \prod_{s=1}^{n}\left(\hat{A}^{(s)}\right)^{-1} = \prod_{s=1}^{n} P_{-\alpha,-\beta}\left(\hat{B}^{(s)}\right) = P_{-\alpha,-\beta}\left(\prod_{s=1}^{n}\hat{B}^{(s)}\right) = P_{-\alpha,-\beta}\left(\hat{B}\right) = F\,P_{-\alpha,-\beta}\left(\overline{B}\right). \tag{23}$$

Матрица $\overline{B}$ имеет вид

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 \\ 0 & B_{32} & B_{33} & 0 \\ B_{41} & 0 & 0 & B_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрицу (23) запишем в форме

$$\hat{A}_c^{-1} = F\begin{pmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} \\ \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\hat{Q}_{11} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$; $\hat{Q}_{22} = \begin{pmatrix} B_{33} & 0 \\ 0 & B_{44} \end{pmatrix}$;

$$\hat{Q}_{12} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha B_{14} \\ \beta B_{23} & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{Q}_{21} = -\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\beta}B_{32} \\ \dfrac{1}{\alpha}B_{41} & 0 \end{pmatrix}.$$

Применив обратную матрицу (23) к равенству (18), получим

$$\hat{A}_c^{-1}\,\vec{\mathrm{W}}_2\left(M_2\right) = \vec{\mathrm{W}}_1\left(M_1\right). \tag{24}$$

Равенство (24) запишем в виде двух уравнений, учитывая (17):

$$\hat{Q}_{11}\,\vec{\mathrm{E}}_2^{\mathrm{v}} + \hat{Q}_{12}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}} = \frac{1}{F}\vec{\mathrm{E}}_1^{\mathrm{v}}; \tag{25}$$

$$\hat{Q}_{21}\,\vec{\mathrm{E}}_2^{\mathrm{v}} + \hat{Q}_{22}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}} = \frac{1}{F}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}. \tag{26}$$

В дальнейшем построим модель граничных условий (25), (26) в случае низкочастотных полей.

5. Скалярные граничные условия для низкочастотных магнитных полей

Преобразуем векторные граничные условия (25), (26) к двум скалярным граничным условиям для магнитных полей в потенциальном приближении. Из уравнений (25), (26) определим электрические векторы. Из (26) найдем

$$\vec{\mathrm{E}}_2^{\mathrm{v}} = \frac{1}{F}\hat{L}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}} + \hat{N}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}, \tag{27}$$

где $$\hat{L} = \hat{Q}_{21}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha L_1 \\ \beta L_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = -1/B_{41}, \qquad L_2 = -1/B_{32};$$

$$\hat{N} = -\hat{Q}_{21}^{-1}\,\hat{Q}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha N_1 \\ \beta N_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 = B_{44}/B_{41}, \qquad N_2 = B_{33}/B_{32}.$$

Подставив (27) в (25), получим

$$\vec{\mathrm{E}}_1^{\mathrm{v}} = \hat{P}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}} + F\hat{K}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}, \tag{28}$$

где $$\hat{P} = \hat{Q}_{11}\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha P_1 \\ \beta P_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = -B_{11}/B_{41}, \qquad P_2 = -B_{22}/B_{32};$$

$$\hat{K} = \hat{Q}_{12} + \hat{Q}_{11}\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha K_1 \\ \beta K_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = B_{11}\frac{B_{44}}{B_{41}} - B_{14}, \qquad K_2 = B_{22}\frac{B_{33}}{B_{32}} - B_{23}.$$

Рассмотрим первое уравнение (2) на плоскостях Γ_j и спроектируем его на нормаль $\vec{\mathrm{n}} = \vec{\mathrm{e}}_z$. Получим два скалярных уравнения:

$$\alpha\left(\vec{\mathrm{e}}_z, \vec{\mathrm{H}}_1\right) = \left(\vec{\mathrm{e}}_z, \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}}_{1\tau}\right) \quad \text{на } \Gamma_1, \quad \alpha = i\omega\mu_0; \tag{29}$$

$$\alpha\left(\vec{\mathrm{e}}_z, \vec{\mathrm{H}}_2\right) = \left(\vec{\mathrm{e}}_z, \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}}_{2\tau}\right) \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{30}$$

Далее, проектируя равенство (28) на базисные векторы $\vec{\mathrm{e}}_1 = (1,0)$, $\vec{\mathrm{e}}_2 = (0,1)$, вычислим компоненты вектора $\vec{\mathrm{E}}_1^{\mathrm{v}}$ (17). В результате

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{1\mathrm{v}_1} &= \left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{P}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}\right) + F\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{K}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}\right); \\ \mathrm{E}_{1\mathrm{v}_2} &= \left(\vec{\mathrm{e}}_2, \hat{P}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}\right) + F\left(\vec{\mathrm{e}}_2, \hat{K}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

Тогда в соответствии с формулами (16) тангенциальная составляющая поля на плоскости Γ_1 имеет вид $\vec{\mathrm{E}}_{1\tau} = \mathrm{E}_{1\mathrm{v}_1}\vec{\mathrm{V}}_1 + \mathrm{E}_{1\mathrm{v}_2}\vec{\mathrm{V}}_2$. Вычисления в цилиндрических координатах показывают, что

$$\left(\vec{\mathrm{e}}_z, \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}_1\right) = \lambda J_0(\lambda\rho); \quad \left(\vec{\mathrm{e}}_z, \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}_2\right) = 0. \tag{32}$$

Следовательно,

$$\left(\vec{\mathrm{e}}_z, \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}}_{1\tau}\right) = \mathrm{E}_{1\mathrm{v}_1}\lambda J_0(\lambda\rho); \quad \left(\vec{\mathrm{e}}_z, \vec{\mathrm{H}}_1\right) = \mathrm{H}_{1\mathrm{v}_0} J_0(\lambda\rho). \tag{33}$$

Аналогично, проектируя равенство (27) на векторы $\vec{\mathrm{e}}_j$, получим формулы для проекций:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{2\mathrm{v}_1} &= \frac{1}{F}\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{L}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}\right) + \left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{N}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}\right); \\ \mathrm{E}_{2\mathrm{v}_2} &= \frac{1}{F}\left(\vec{\mathrm{e}}_2, \hat{L}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}\right) + \left(\vec{\mathrm{e}}_2, \hat{N}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

С учетом формул (32) получим

$$\left(\vec{\mathrm{e}}_z, \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}}_{2\tau}\right) = \mathrm{E}_{2\mathrm{v}_1}\lambda J_0(\lambda\rho); \quad \left(\vec{\mathrm{e}}_z, \vec{\mathrm{H}}_2\right) = \mathrm{H}_{2\mathrm{v}_0} J_0(\lambda\rho). \tag{35}$$

Подставив (33), (35), (31), (34) в граничные соотношения (29), (30), получим

$$\frac{\alpha}{\lambda}\mathrm{H}_{1\mathrm{v}_0} = \left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{P}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}\right) + F\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{K}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}\right);$$

$$F\frac{\alpha}{\lambda}\mathrm{H}_{2\mathrm{v}_0} = \left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{L}\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}}\right) + F\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{N}\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}}\right).$$

Из формул (12), (17) следует, что $\vec{\mathrm{H}}_1^{\mathrm{v}} = \mathrm{H}_{1\mathrm{v}_2}\,\vec{\mathrm{e}}_2$, $\vec{\mathrm{H}}_2^{\mathrm{v}} = \mathrm{H}_{2\mathrm{v}_2}\,\vec{\mathrm{e}}_2$. В результате

$$\frac{\alpha}{\lambda}\mathrm{H}_{1\mathrm{v}_0} = \mathrm{H}_{1\mathrm{v}_2}\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{P}\vec{\mathrm{e}}_2\right) + F\mathrm{H}_{2\mathrm{v}_2}\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{K}\vec{\mathrm{e}}_2\right);$$

$$F\frac{\alpha}{\lambda}\mathrm{H}_{2\mathrm{v}_0} = \mathrm{H}_{1\mathrm{v}_2}\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{L}\vec{\mathrm{e}}_2\right) + F\mathrm{H}_{2\mathrm{v}_2}\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{N}\vec{\mathrm{e}}_2\right).$$

Учитывая $\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{P}\vec{\mathrm{e}}_2\right) = \alpha P_1$, $\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{K}\vec{\mathrm{e}}_2\right) = \alpha K_1$, $\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{L}\vec{\mathrm{e}}_2\right) = \alpha L_1$, $\left(\vec{\mathrm{e}}_1, \hat{N}\vec{\mathrm{e}}_2\right) = \alpha N_1$, получим скалярные граничные условия, связывающие магнитные поля по обе стороны экрана D:

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{H}_{1\mathrm{v}_0} - \lambda P_1\mathrm{H}_{1\mathrm{v}_2}\right)\Big|_{z=0} = \lambda F K_1 \mathrm{H}_{2\mathrm{v}_2}\Big|_{z=\Delta}; \\ &\lambda L_1 \mathrm{H}_{1\mathrm{v}_2}\Big|_{z=0} = F\left(\mathrm{H}_{2\mathrm{v}_0} - \lambda N_1 \mathrm{H}_{2\mathrm{v}_2}\right)\Big|_{z=\Delta}. \end{aligned} \tag{36}$$

Заметим, что граничные условия (36) применимы к магнитным полям вида (16). Магнитные поля (16) связаны с исходными полями (9) с помощью интегрального преобразования [18, с. 133].

6. Решение краевой задачи экранирования

На основании работы [10] совокупность граничных условий (3) на плоскостях γ_s заменена эквивалентными граничными условиями (36). С учетом (12) получим

$$\mathrm{H}_{1\mathrm{v}_0}\Big|_{\Gamma_1} = \lambda\left(A_0(\lambda) - x(\lambda)\right); \quad \mathrm{H}_{1\mathrm{v}_2}\Big|_{\Gamma_1} = -\lambda\left(A_0(\lambda) + x(\lambda)\right);$$

$$\mathrm{H}_{2\mathrm{v}_0}\Big|_{\Gamma_2} = \lambda y(\lambda)\, e^{-\lambda\Delta}; \quad \mathrm{H}_{2\mathrm{v}_2}\Big|_{\Gamma_2} = -\lambda y(\lambda)\, e^{-\lambda\Delta}.$$

После подстановки в (36) получим систему алгебраических уравнений

$$\left(1 - \lambda P_1\right)x - \left(1 + \lambda P_1\right)A_0 = \lambda F_0 K_1 y; \quad \lambda L_1\left(x + A_0\right) = -F_0\left(1 + \lambda N_1\right)y,$$

где $F_0 = \exp\left(\sum_{s=1}^{n}\left(-\frac{k_s^2\Delta_s}{\lambda + \nu_s}\right)\right)$.

Решим систему относительно x и y:

$$x = \frac{\left(1 + \lambda P_1\right)\left(1 + \lambda N_1\right) - \lambda^2 L_1 K_1}{\left(1 - \lambda P_1\right)\left(1 + \lambda N_1\right) + \lambda^2 L_1 K_1} A_0;$$

$$y = -\frac{2\lambda L_1 A_0}{\left(\left(1 - \lambda P_1\right)\left(1 + \lambda N_1\right) + \lambda^2 L_1 K_1\right)F_0}.$$

Вычислим компоненты реальных полей

$$\vec{\mathbf{H}}_0 = \mathrm{H}_{0\rho}^{\mathrm{Re}}\,\vec{\mathrm{e}}_\rho + \mathrm{H}_{0z}^{\mathrm{Re}}\,\vec{\mathrm{e}}_z\,, \quad \vec{\mathbf{H}}_2 = \mathrm{H}_{2\rho}^{\mathrm{Re}}\,\vec{\mathrm{e}}_\rho + \mathrm{H}_{2z}^{\mathrm{Re}}\,\vec{\mathrm{e}}_z\,,$$

где $\mathrm{H}_{0\rho}^{\mathrm{Re}} = \int\limits_0^\infty \lambda\, A\left(\lambda,\overline{t}\right) J_1\left(\lambda\rho\right) e^{-\lambda z} d\lambda$; $\mathrm{H}_{0z}^{\mathrm{Re}} = \int\limits_0^\infty \lambda\, A\left(\lambda,\overline{t}\right) J_0\left(\lambda\rho\right) e^{-\lambda z} d\lambda$;

$$\mathrm{H}_{2\rho}^{\mathrm{Re}} = \int\limits_0^\infty \lambda\, \mathrm{Y}\left(\lambda,\overline{t}\right) J_1\left(\lambda\rho\right) e^{-\lambda z} d\lambda\,; \quad \mathrm{H}_{2z}^{\mathrm{Re}} = \int\limits_0^\infty \lambda\, \mathrm{Y}\left(\lambda,\overline{t}\right) J_0\left(\lambda\rho\right) e^{-\lambda z} d\lambda\,.$$

Здесь $\overline{t}$ – безразмерное время, $0 \le \overline{t} < 1$, $\overline{t} = \dfrac{t}{T}$;

$T = \dfrac{1}{f}$ – период колебания;

$A\left(\lambda,\overline{t}\right) = \mathrm{Re}\left(A_0\left(\lambda\right) e^{-2\pi i \overline{t}}\right)$;

$\mathrm{Y}\left(\lambda,\overline{t}\right) = \mathrm{Re}\left(y\left(\lambda\right) e^{-2\pi i \overline{t}}\right)$.

Коэффициент экранирования определяется формулой

$$\mathrm{K} = \left(\left|\mathrm{H}_{2\rho}^{\mathrm{Re}}\right|^2 + \left|\mathrm{H}_{2z}^{\mathrm{Re}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ \left(\left|\mathrm{H}_{0\rho}^{\mathrm{Re}}\right|^2 + \left|\mathrm{H}_{0z}^{\mathrm{Re}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

с помощью которой исследуются экранирующие свойства многослойного экрана.

Заключение

Разработана математическая модель взаимодействия низкочастотных магнитных полей с многослойным плоским экраном, что позволило векторную краевую задачу экранирования для уравнений Максвелла преобразовать к скалярной краевой задаче для уравнения Лапласа, которое хорошо изучено. Модель ориентирована на решение задач экранирования сосредоточенных источников поля многослойным экраном с произвольными комплексными электромагнитными материальными параметрами. В качестве примера рассмотрена задача экранирования магнитного поля соленоида с низкочастотным током. На основе предложенной модели решение задачи получено аналитически с использованием специальных функций. Алгоритм решения задачи может быть использован при численном исследовании экранов, применяемых в технических устройствах, а также при разработке технологий изготовления многослойных экранов со специальными свойствами.

Работа выполнена по заданию № 20110838 ГПНИ «Информатика и космос».

Список литературы

1. Торокин, А.А. Инженерно-техническая защита информации / А.А. Торокин. – М. : Гелиос АРВ, 2005. – 960 с.

2. Аполлонский, С.М. Эквивалентные граничные условия в электродинамике / С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеенко. – СПб. : Безопасность, 1998. – 416 с.

3. Жуков, С.В. Граничные условия для переменного магнитного поля шин / С.В. Жуков // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1983. – № 5. – С. 54–58.

4. Жуков, С.В. О граничных условиях для определения переменных магнитных полей тонких металлических оболочек / С.В. Жуков // Журнал технической физики. – 1969. – Т. 39, № 7. – С. 1149–1154.

5. Ерофеенко, В.Т. Экранирование низкочастотного магнитного поля незамкнутой тонкостенной сферической оболочкой / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская, Г.Ч. Шушкевич // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80, вып. 9. – С. 8–15.

6. Гримальский, О.В. Метод расчета трехмерного электромагнитного поля тонких пластин и оболочек / О.В. Гримальский // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1990. – № 6. – С. 61–68.

7. Ерофеенко, В.Т. Экранирование низкочастотных магнитных полей системой экранов: незамкнутая сферическая оболочка – тонкий плоский проводящий слой / В.Т. Ерофеенко, Г.Ч. Шушкевич // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2002. – Т. 7, № 9. – С. 40–48.

8. Ерофеенко, В.Т. Экранирование низкочастотных магнитных полей вращающейся тонкой сферической оболочкой / В.Т. Ерофеенко, Лю Бао Линь // Сб. докладов Четвертой Российской науч.-техн. конф. по электромагнитной совместимости технических средств и биологических объектов (ЭМС–96). – СПб. : ВИТУ, 1996. – С. 134–140.

9. Ерофеенко, В.Т. Алгоритм численного исследования экранирующих свойств многослойных экранов из композиционных материалов / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // Информатика. – 2010. – № 4. – С. 96–103.

10. Ерофеенко, В.Т. Модели граничных условий на композиционных экранах для электромагнитных полей с осевой симметрией / В.Т. Ерофеенко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 2. – С. 41–45.

11. Резинкина, М.М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля / М.М. Резинкина // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 11. – С. 17–24.

12. Taflove, A. Computational electrodynamics: the finite difference time domain method / A. Taflove, S. Hagness. – Boston-London : Artech House, 2000. – 852 p.

13. Frontiers in electromagnetics / Ed. by D.H. Werner, R. Mittra. – N.Y. : IEEE Press, 1999. – 876 p.

14. Clemens, M. Regularization of Eddy-Current Formulations Using Discrete Grad-Div Operators / M. Clemens, T. Weiland // IEEE Transactions on Magnetics (IEEE Mag). – 2002. – Vol. 38 (2). – P. 569–572.

15. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 256 с.

16. Ерофеенко, В.Т. Основы математического моделирования / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2002. – 196 с.

17. Прудников, А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1983. – 750 с.

18. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010 . – 304 с.

Поступила 21.03.11

Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем
математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by

V.T. Erofeenko

MODELING PENETRATION PROCESSES OF LOW-TREQUENCY MAGNETIC FIELDS TROUGH THE MULTILAYERED SCREENS

The boundary value problem of interaction of low-frequency magnetic fields of alternating currant excited solenoid with the multilayered flat screen from any magnetodielectric conductive materials is solved. An algorithm for calculation of weakening coefficients of fields under transmission trough the screen is suggested.