ИНФОРМАТИКА

2011 **июль-сентябрь** **№ 3**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.8

М.С. Баркетов

NP-ПОЛНОТА В СИЛЬНОМ СМЫСЛЕ ЗАДАЧИ «3-РАЗБИЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ»

Доказывается NP-полнота в сильном смысле задачи 3-РАЗБИЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ. В этой задаче дано множество из 3m элементов $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_{3m}\}$ и для каждого элемента a_i дан его размер $s(a_i)\in Z+$. Необходимо определить, можно ли разбить это множество на m трехэлементных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ так, чтобы произведения размеров элементов каждого из подмножеств A_i, $1 \le i \le m$, были равны между собой.

Введение

В последние десятилетия активно проводятся исследования, направленные на установление вычислительной сложности задач дискретной оптимизации. Отнесение задачи к тому или иному классу является важным шагом и влияет на то, какие методы скорее окажутся эффективными при исследовании этой задачи. В данной работе рассматривается следующая задача дискретной оптимизации.

Дано множество из $3m$ элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{3m}\}$. Для каждого элемента a_i дан его размер $s(a_i)\in Z^+$. Необходимо определить, можно ли разбить это множество на m трехэлементных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ так, чтобы произведения размеров элементов каждого из подмножеств A_i, $1 \le i \le m$, были равны между собой. Назовем эту задачу 3-РАЗБИЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ (3-РП).

Задача 3-РП похожа на аддитивную задачу 3-РАЗБИЕНИЕ [1]. В задаче 3-РАЗБИЕНИЕ дано множество из $3m$ элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{3m}\}$ и число $B\in Z^+$. Для каждого элемента a_i дан его размер $s(a_i)\in Z^+$. Размеры элементов таковы, что $\forall\ a\in A\ B/4 < s(a) < B/2$ и $\sum_{a\in A} s(a) = mB$. Необходимо определить, можно ли разбить множество A на m подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с равными суммами размеров своих элементов.

Задача 3-РП также близка задаче РАЗБИЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ [4], в которой требуется определить, можно ли разбить исходное множество A на два подмножества, произведения размеров элементов в каждом из которых одинаковы. В силу различия этих задач для их исследования применяются разные методы.

В статье доказывается NP-полнота в сильном смысле задачи 3-РП. Задача является NP-полной в сильном смысле, если существует ее NP-полная подзадача, в которой все числа во входе ограничены полиномом от длины входа. NP-полнота в сильном смысле часто доказывается путем псевдополиномиального сведения к рассматриваемой задаче какой-нибудь известной NP-полной в сильном смысле задачи. Особенностью псевдополиномиального сведения является то, что числа для строящейся индивидуальной задачи должны быть ограничены полиномом от максимального числа и от длины входа исходной индивидуальной задачи. Понятия NP-полноты в сильном смысле и псевдополиномиального сведения подробно изложены в [1]. Метод псевдополиномиального сведения используется и в данной работе.

Доказательство следует общей схеме доказательства NP-полноты в сильном смысле аддитивной задачи 3-РАЗБИЕНИЕ. Однако доказательство значительно модифицировано для рассматриваемого случая. В теореме 1 доказывается NP-полнота в сильном смысле задачи 4-РАЗБИЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ (4-РП). В задаче 4-РП дано множество из $4m$ элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{4m}\}$. Для каждого элемента a_i дан его размер $s(a_i)\in Z^+$. Необходимо определить, можно ли разбить это множество на m четырехэлементных подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$ так, чтобы произведения размеров элементов каждого из подмножеств A_i, $1 \le i \le m$, были равны между собой. NP-полнота в сильном смысле задачи 4-РП с рациональными размерами была доказана в [3]. Отметим, что в силу особенностей доказательства [3] не представляется возможным адаптировать его к случаю целочисленных размеров. В настоящей статье доказывается, что задача 4-РП NP-полна в сильном смысле, даже если размеры являются целочисленными. На основе этого результата в теореме 2 устанавливается NP-полнота в сильном смысле задачи 3-РП.

1. Доказательство NP-полноты в сильном смысле задачи 4-РП

Теорема 1. *Задача 4-РП NP-полна в сильном смысле.*

Доказательство. Для доказательства рассмотрим следующую NP-полную в сильном смысле задачу ТРЕХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ (3-С) [1]. Даны множества $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_q\}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$ и множество M, являющееся подмножеством множества $W \times X \times Y$. Верно ли, что в M содержится трисочетание (такое подмножество $M^* \subseteq M$, что мощность M^* равна q и никакие два элемента не имеют ни одной одинаковой координаты)?

Рассмотрим индивидуальную задачу 3-С. На ее основе будем строить индивидуальную задачу 4-РП. При построении используется два целых положительных числа $b \geq 2$ и $t \geq 1$, которые определим позже. Также для построения нужны $3t + 2$ наименьших простых числа, которые будем нумеровать в порядке возрастания. Пусть p_i, $1 \leq i \leq 3t + 2$, – это i-е по порядку простое число. Рассмотрим число $r_W = (p_1p_2 \ldots p_t)^b$. Выберем число t таким образом, чтобы количество различных делителей числа r_W, отличных от единицы, было не менее чем $q + 1$. Различных делителей числа r_W не менее b^t, поэтому можно гарантировать нужное количество различных делителей, выбрав

$$t = \lceil \log_b (q+1) \rceil,$$

где число b определим позже. Сложность вычисления числа t – это полином от $\log_b(q+1)$. Значение числа t вычисляется с помощью бинарного поиска в интервале $[1,q+1]$. На каждой итерации поиска для проверки выбранного значения t_1 из этого интервала число b перемножается количество раз, необходимое, чтобы это произведение превысило $q+1$, но не более t_1 раз. Получившееся число сравнивается со значением $q+1$.

Выберем q произвольных различных делителей числа r_W (которые имеют вид различных произведений степеней простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_t$) и обозначим их через $r(w_1)$, $r(w_2)$, …, $r(w_q)$. Рассмотрим числа $r_X = (p_{t+1}\, p_{t+2} \ldots p_{2t})^b$ и $r_Y = (p_{2t+1}\, p_{2t+2} \ldots p_{3t})^b$. Выберем по q произвольных различных делителей этих чисел и обозначим их через $r(x_1)$, $r(x_2)$, …, $r(x_q)$ и $r(y_1)$, $r(y_2)$, …, $r(y_q)$ соответственно. Пусть $n(w_i)$ ($n(x_i)$ либо $n(y_i)$) – это число раз, которое элемент w_i (x_i либо y_i) встречается в тройках множества M. Сначала построим множества $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ и $A^{(M)}$.

Для каждого элемента w_i, $1 \leq i \leq q$, генерируются $n(w_i) - 1$ элементов множества $A^{(1)}$ размером

$$s(a_{k_i^w+1}) = s(a_{k_i^w+2}) = \ldots = s(a_{k_i^w+n(w_i)-1}) = r(w_i)\,p_{3t+1}, \tag{1}$$

где $$k_i^w = \sum_{l=1}^{i-1} n(w_l),$$

и элемент множества $A^{(2)}$ размером

$$\mathrm{s}(a_{k_i^w+n(w_i)}) = r(w_i)\,. \tag{2}$$

Для каждого элемента x_i, $1 \leq i \leq q$, генерируются $n(x_i) - 1$ элементов множества $A^{(1)}$ размером

$$s(a_{k_i^x+1}) = s(a_{k_i^x+2}) = \ldots = s(a_{k_i^x+n(x_i)-1}) = r(x_i)\,p_{3t+2}, \tag{3}$$

где $$k_i^x = \sum_{l=1}^{q} n(w_l) + \sum_{l=1}^{i-1} n(x_l),$$

и элемент множества $A^{(2)}$ размером

$$s(a_{k_i^x+n(x_i)}) = r(x_i)\, p_{3t+1}\,. \tag{4}$$

Для каждого элемента y_i, $1 \le i \le q$, генерируются $n(y_i) - 1$ элементов множества $A^{(1)}$ размером

$$s(a_{k_i^y+1}) = s(a_{k_i^y+2}) = \ldots = s(a_{k_i^y+n(y_i)-1}) = r(y_i), \tag{5}$$

где
$$k_i^y = \sum_{l=1}^{q} n(w_l) + \sum_{l=1}^{q} n(x_l) + \sum_{l=1}^{i-1} n(y_l)\,,$$

и элемент множества $A^{(2)}$ размером

$$s(a_{k_i^y+n(y_i)}) = r(y_i)\, p_{3t+2}\,. \tag{6}$$

Для каждой тройки $\{w_{f_i}, x_{g_i}, y_{h_i}\} \in M$, где $1 \le i \le |M|$, генерируется элемент множества $A^{(M)}$ размером

$$s(a_{k+i}) = \frac{r_W}{r(w_{f_i})} \times \frac{r_X}{r(x_{g_i})} \times \frac{r_Y}{r(y_{h_i})}, \tag{7}$$

где
$$k = \sum_{l=1}^{q} n(w_l) + \sum_{l=1}^{q} n(x_l) + \sum_{l=1}^{q} n(y_l)\,.$$

Отметим, что число (7) является целым числом, так как $r(w_{fi})$ является делителем r_W, $r(x_{gi})$ – делителем r_X, а $r(y_{hi})$ – делителем r_Y.

Построим множество A, объединив в него множества $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ и $A^{(M)}$. Множество A содержит $4m$ элементов, где $m = |M|$.

Если существует требуемое множество M^* для задачи 3-С, то разбиение для задачи 4-РП строится следующим образом. Для каждой тройки из M^* построим четверку, включив в нее сгенерированный для этой тройки элемент из множества $A^{(M)}$ и элементы множества $A^{(2)}$, сгенерированные для компонентов этой тройки. Из формул (2), (4), (6), (7) следует, что произведение размеров элементов каждой из этих четверок равно $r_W\, r_X\, r_Y\, p_{3t+1}\, p_{3t+2}$.. Для каждой тройки из множества $M \backslash M^*$ построим четверку, включив в нее сгенерированный для этой тройки элемент из множества $A^{(M)}$ и элементы из множества $A^{(1)}$, сгенерированные для компонентов этой тройки. Из формул (1), (3), (5), (7) следует, что произведение размеров элементов каждой из этих четверок также равно $r_W\, r_X\, r_Y\, p_{3t+1}\, p_{3t+2}$.. Значит, построенное разбиение является решением задачи 4-РП.

Докажем, что если существует решение индивидуальной задачи 4-РП, то существует решение индивидуальной задачи 3-С. Допустим, что существует требуемое разбиение в индивидуальной задаче 4-РП. Тогда произведение размеров элементов каждого из множеств A_i, $1 \le i \le m$, должно быть равно $r(W)\, r(X)\, r(Y)\, p_{3t+1}\, p_{3t+2}$ (это корень m-й степени из произведения размеров всех элементов множества A). Из единственности разложения на простые множители каждого целого положительного числа следует, что в каждом подмножестве A_i, $1 \le i \le m$, должен быть один элемент из множества $A^{(M)}$, сгенерированный для тройки из множества M, и элементы, сгенерированные для компонентов этой тройки. Более того, эти элементы должны быть или все из множества $A^{(1)}$, или все из множества $A^{(2)}$. Тогда те тройки из M, для которых есть множества A_i с элементами из $A^{(2)}$, являются решением для индивидуальной задачи 3-С.

Докажем, что построение индивидуальной задачи 4-РП, включающее построение элементов множества A и их размеров в соответствии с формулами (1)–(7), является псевдополиномиальным.

Максимальное простое число p_{3t+2}, используемое для построения, ограничено полиномом от q для выбранного t [2]. Все числа для индивидуальной задачи 4-РП строятся на основе этих простых чисел за полиномиальное число действий, если b ограничено полиномом от q.

Число $r_W r_X r_Y p_{3t+1} p_{3t+2}$ является верхней границей чисел (1)–(7) индивидуальной задачи 4-РП. Оценим это число:

$$r_W r_X r_Y p_{3t+1} p_{3t+2} \le (2\cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{3\lceil \log_b(q+1)\rceil})^b \cdot 2^{6\lceil \log_b(q+1)\rceil+3}.$$

Заметим, что

$$2^{6\lceil \log_b(q+1)\rceil+3} \le 2^{6\log_2(q+1)+9} = (q+1)^6 2^9.$$

Значит, второй множитель является полиномом от q. Оценим первый множитель:

$$(2\times 2^2\times\ldots\times 2^{3\lceil \log_b(q+1)\rceil})^b =$$

$$= \left(2^{\frac{1+3\lceil \log_b(q+1)\rceil}{2}\times 3\lceil \log_b(q+1)\rceil}\right)^b \le 2^{\frac{3(\log_b(q+1)+1)+9(\log_b(q+1)+1)^2}{2}b} =$$

$$= 2^{\frac{3(\log_b(q+1)+1)+9(\log_b(q+1)+1)^2}{2}b} = 2^{\frac{9}{2}\log_b^2(q+1)b+\frac{21}{2}\log_b(q+1)b+6b}.$$

Обозначим последнюю величину через $g(b, q)$.

Определим, какое ограничение должно быть на b, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\log_b^2(q+1) \le \log_2^{1/4}(q+1). \tag{8}$$

Получаем цепочку равносильных неравенств

$$\log_b^2(q+1) \le \log_2^{1/4}(q+1) \Leftrightarrow \log_b(q+1) \le \log_2^{1/8}(q+1) \Leftrightarrow b \ge (q+1)^{\frac{1}{\log_2^{1/8}(q+1)}}. \tag{9}$$

Пусть

$$b = \left\lceil (q+1)^{\frac{1}{\left\lfloor \lfloor \log_2(q+1)\rfloor^{1/8}\right\rfloor}} \right\rceil \le (q+1)^{\frac{1}{(\log_2(q+1)-1)^{1/8}-1}} + 1. \tag{10}$$

Значение числа b в соответствии с формулой (10) вычисляется за полиномиальное число шагов от $\log_2(q+1)$. Число $\lfloor \log_2(q+1)\rfloor$ вычисляется с помощью бинарного поиска по интервалу $[1, q+1]$. Число $\left\lfloor \lfloor \log_2(q+1)\rfloor^{1/8}\right\rfloor$ вычисляется на основе числа $\lfloor \log_2(q+1)\rfloor$ с помощью бинарного поиска по интервалу $\left[1, \lfloor \log_2(q+1)\rfloor\right]$ (при этом каждое потенциальное значение ответа из этого интервала возводится в восьмую степень и сравнивается с числом $\lfloor \log_2(q+1)\rfloor$). Целая часть сверху от корня $\left\lfloor \lfloor \log_2(q+1)\rfloor^{1/8}\right\rfloor$-й степени из числа $(q+1)$ вычисляется бинарным поиском по интервалу $[1, q+1]$.

Ввиду (10) неравенство

$$b \le \log_2^{1/4}(q+1) \tag{11}$$

следует из неравенства

$$(q+1)^{\frac{1}{(\log_2(q+1)-1)^{1/8}-1}} + 1 \le \log_2^{1/4}(q+1), \tag{12}$$

которое эквивалентно неравенству

$$\frac{1}{(\log_2(q+1)-1)^{1/8}-1} \le \log_{q+1}(\log_2^{1/4}(q+1)-1). \tag{13}$$

Неравенство (13) вытекает из следующего неравенства для q, больших некоторого достаточно большого числа:

$$\frac{2}{\left(\dfrac{1}{2\log_{q+1}2}\right)^{1/8}} \le \log_{q+1}(\log_2^{1/4}(q+1)-1)\,. \tag{14}$$

Неравенство (14) эквивалентно неравенству

$$\log_{q+1}^{1/8} 2^{2^9} \le \log_{q+1}(\log_2^{1/4}(q+1)-1)\,. \tag{15}$$

Получаем цепочку импликаций (15)⇒(14)⇒(13)⇒(12)⇒(11). Неравенство (15) верно для q, больших некоторого достаточно большого числа. Значит, при этом условии из него следует неравенство (11).

Вычислим логарифм от функции $g(b, q)$:

$$\log_2 g(b,q) = \frac{9}{2}\log_b^2(q+1)b + \frac{21}{2}\log_b(q+1)b + 6b.$$

Учитывая неравенства (8), (9) и (11), получаем

$$\frac{9}{2}\log_b^2(q+1)b + \frac{21}{2}\log_b(q+1)b + 6b \le$$

$$\le \frac{9}{2}\log_2^{1/4}(q+1)\log_2^{1/4}(q+1) + \frac{21}{2}\log_2^{1/8}(q+1)\log_2^{1/4}(q+1) + 6\log_2^{1/4}(q+1) =$$

$$= \frac{9}{2}\log_2^{1/2}(q+1) + \frac{21}{2}\log_2^{3/8}(q+1) + 6\log_2^{1/4}(q+1).$$

Таким образом, логарифм от функции $g(b, q)$ меньше логарифма от некоторого полинома $(q+1)^d$ и число $r_W r_X r_Y p_{3t+1} p_{3t+2}$ ограничено полиномом от q для всех q, больших некоторого достаточно большого числа. Следовательно, построение (1)–(7) является псевдополиномиальным. □

2. Доказательство NP-полноты в сильном смысле задачи 3-РП

Теорема 2. *Задача 3-РП NP-полна в сильном смысле.*

Доказательство. Рассмотрим произведение чисел $a_1 a_2 \ldots a_{4m}$ из множества A задачи 4-РП и разложение этого произведения на простые множители:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{4m} = p_{i_1}^{t_1} \cdot p_{i_2}^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_g}^{t_g}\,.$$

Из данного разложения ясно, что

$$g \le \lceil \log_2(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{4m}) \rceil \le \sum_{i=1}^{4m} \lceil \log_2 a_i \rceil,$$

где g – число различных простых множителей в разложении на простые множители числа $a_1 a_2 \ldots a_{4m}$.

Найдем такое простое число q, что q не делит ни одно из чисел a_i, $1 \le i \le 4m$. Для этого нам потребуется проверить не более чем

$$\sum_{i=1}^{4m} \lceil \log_2 a_i \rceil + 1$$

первых простых чисел. Число q ограничено полиномом от

$$\sum_{i=1}^{4m} \lceil \log_2 a_i \rceil + 1 \ [2].$$

Следовательно, число q ограничено полиномом от длины входа задачи 4-РП.

Пусть

$$B = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{4m} a_i} \ .$$

Если это число не целое, то задача 4-РП решается полиномиально и ответ в задаче «нет». Без ограничения общности полагаем, что число B целое. Отметим, что число B вычисляется за полиномиальное число шагов от размера входа задачи.

По индивидуальной задаче 4-РП построим индивидуальную задачу 3-РП.

Для удобства изложения элементы множества A индивидуальной задачи 3-РП будем обозначать буквой a с некоторым набором индексов (например, $a_{(i,j),r}{}^{(1)}$), а не с одним нижним индексом (a_i), как было указано в определении задачи.

Найдем все возможные упорядоченные четырехэлементные подмножества множества A индивидуальной задачи 4-РП, произведение размеров элементов которых равно B. Пусть существует h таких четверок. Без ограничения общности полагаем, что $h \geq m$. Иначе для индивидуальной задачи 4-РП не существует требуемого разбиения. Обозначим элементы этих четверок через

$$(a_{i_r}, a_{j_r}, a_{l_r}, a_{k_r}), \ 1 \leq r \leq h \ ,$$

где i_r, j_r, l_r, k_r попарно различны.

Для четверки r в индивидуальной задаче 3-РП генерируются два элемента с размерами

$$s(a^{(1)}_{(i_r, j_r), r}) = s(a_{i_r}) s(a_{j_r}) \ ; \tag{16}$$

$$s(a^{(1)}_{(l_r, k_r), r}) = s(a_{l_r}) s(a_{k_r}) \ . \tag{17}$$

К этим $2h$ элементам добавим $4m$ элементов с размерами

$$s(a^{(2)}_u) = s(a_u) q, 1 \leq u \leq 4m \, , \tag{18}$$

и $h - m$ элементов с размерами

$$s(a^{(3)}_v) = q^2, 1 \leq v \leq h - m. \tag{19}$$

Будем относить построенные элементы к трем типам. Тип элемента указан в верхнем индексе около буквы a. Например, $a_{(i,j),r}{}^{(1)}$ – это элемент первого типа.

Всего в множестве A индивидуальной задачи 3-РП $3h + 3m$ элементов. Это элементы, размеры которых заданы формулами (16)–(19). Все числа индивидуальной задачи 3-РП построены за полиномиальное число действий над числами исходной индивидуальной задачи 4-РП и ограничены полиномом от максимального числа и от длины входа исходной индивидуальной задачи 4-РП.

Покажем, что индивидуальная задача 4-РП имеет требуемое разбиение тогда и только тогда, когда имеет требуемое разбиение построенная индивидуальная задача 3-РП.

Пусть существует требуемое разбиение множества A для задачи 4-РП. Тогда существует m непересекающихся четырехэлементных подмножеств множества A, таких, что произведение размеров элементов каждой из четверок равно B. Без ограничения общности предположим, что этим четверкам соответствуют упорядоченные четверки

$$(a_{i_r}, a_{j_r}, a_{l_r}, a_{k_r}), 1 \le r \le m .$$

Для каждой такой четверки формируем следующие тройки в решении для задачи 3-РП:

$$\{a^{(1)}_{(i_r,j_r),r}, a^{(2)}_{l_r}, a^{(2)}_{k_r}\},\ \{a^{(1)}_{(l_r,k_r),r}, a^{(2)}_{i_r}, a^{(2)}_{j_r}\}.$$

Легко проверить, что произведение размеров элементов каждой из этих троек равно Bq^2. Все другие элементы (а именно элементы, соответствующие ориентированным четверкам с индексами r, m+1 $\le r \le h$, и элементы третьего типа) компонуются в h-m троек вида

$$\{a^{(1)}_{(i_r,j_r),r}, a^{(1)}_{(l_r,k_r),r}, a^{(3)}_{r-m}\} .$$

Легко проверить, что произведение размеров элементов каждой из этих троек также равно Bq^2. Следовательно, полученное разбиение – это требуемое разбиение для задачи 3-РП.

Докажем, что если существует требуемое разбиение для индивидуальной задачи 3-РП, то существует требуемое разбиение для индивидуальной задачи 4-РП. Пусть существует требуемое разбиение для индивидуальной задачи 3-РП. Заметим, что из единственности разложения числа на простые множители следует, что в этом разбиении есть два вида троек: тройки, в которых элемент третьего типа скомпонован с двумя элементами первого типа, и тройки, в которых два элемента второго типа скомпонованы с одним элементом первого типа. Рассмотрим первый вид троек и произвольную тройку этого вида, в которой элементы первого типа сгенерированы на основе разных упорядоченных четверок:

$$\{a^{(1)}_{(i_r,j_r),r}, a^{(1)}_{(o_w,p_w),w}, a^{(3)}_{v}\} .$$

Так как произведение размеров элементов этой тройки равно Bq^2, то

$$s(a^{(1)}_{(o_w,p_w),w}) = s(a^{(1)}_{(l_r,k_r),r}) .$$

Обменяем местами элементы $a^{(1)}_{(o_w,p_w),w}$ и $a^{(1)}_{(l_r,k_r),r}$ в этом разбиении и получим новое разбиение. Повторяя такие обмены конечное число раз, получим разбиение, в котором все тройки первого вида содержат два элемента первого типа, построенных на основе одной ориентированной четверки.

Рассмотрим сейчас тройки второго вида, в которых два элемента второго типа скомпонованы с одним элементом первого типа. Таких троек ровно $2m$. При этом если элемент $a^{(1)}_{(i_r,j_r),r}$ встречается в какой-то такой тройке второго вида, то элемент $a^{(1)}_{(l_r,k_r),r}$ также встречается в какой-то другой тройке второго вида.

Значит, множество троек второго вида оказалось разбитым на m пар, причем произведение элементов второго типа каждой такой пары равно Bq^4. Следовательно, эти четыре элемента соответствуют четверке в разбиении задачи 4-РП. □

Заключение

Доказана NP-полнота в сильном смысле задач 3-РП. Данное доказательство представляет интерес, так как мультипликативная задача 3-РП близка основным аддитивным задачам, изложенным в [1].

Доказательство NP-полноты в сильном смысле задачи 3-РП проведено в два этапа. На первом этапе доказывается NP-полнота в сильном смысле задачи 4-РП путем сведения к ней NP-полной нечисловой задачи ТРЕХМЕРНОЕ СОЧЕТАНИЕ. Трудность первого этапа заключается в том, чтобы подобрать параметры сведения таким образом, чтобы это сведение было псевдополиномиальным. На втором этапе доказывается NP-полнота в сильном смысле задачи 3-РП. Второй этап следует схеме доказательства NP-полноты в сильном смысле аддитивной задачи 3-РАЗБИЕНИЕ. Однако это доказательство модифицируется, чтобы соответствовать мультипликативному случаю.

С помощью задачи 3-РП можно доказывать NP-трудность в сильном смысле других задач, в частности задач теории расписаний с длительностями обслуживания требований, зависящими от моментов начала их обслуживания. Это является возможным направлением для дальнейших исследований. Другим направлением является построение приближенных и точных алгоритмов для задачи 3-РП.

Исследования проводились в рамках проекта Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф10М-071 и государственной программы фундаментальных научных исследований «Математические модели».

Список литературы

1. Garey, M.R. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness / M.R. Garey, D.S. Johnson. – San Francisco : Freeman, 1979. – 340 p.

2. Riesel, H. Prime numbers and computer methods for factorization / H. Riesel. – Boston, 1994.

3. Кононов, А.В. Комбинаторная сложность составления расписаний для работ с простым линейным ростом длительностей / А.В. Кононов // Дискретный анализ и исследование операций. – 1996. – Т. 3, № 2. – С. 15–32.

4. Баркетов, М.С. О вычислительной сложности задачи Product Partition / М.С. Баркетов, М.Я. Ковалев // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 3. – С. 29–31.

Поступила 24.01.11

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6,
e-mail: barketau@mail.ru

M.S. Barketau

STRONG NP-COMPLETENESS OF «3-PRODUCT PARTITION» PROBLEM

We prove strong NP-Completeness of «3-PRODUCT PARTITION» problem. In this problem there is a set $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{3m}\}$ of $3m$ elements. A positive integer size is defined for each element of this set. The problem is to determine if it is possible to partition the set A into m three-element subsets with the same product of the elements sizes.