ИНФОРМАТИКА

2011 октябрь-декабрь № 4

УДК 511.344+519.852.2+519.161

В.А. Шлык

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОДНОГО КЛАССА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доказывается NP-полнота задачи распознавания, является ли неотрицательное целочисленное решение уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = n$ с натуральными коэффициентами и свободным членом выпуклой комбинацией двух его неотрицательных целочисленных решений. Используется теорема Войгингера об NP-полноте задачи распознавания множеств, содержащих подмножества равного веса.

Введение

Для многогранника, заданного системой линейных неравенств, задача распознавания того, что целочисленное решение системы не является вершиной многогранника всех ее целочисленных решений, *NP*-полна [1, теорема 18.5]. В большинстве случаев, когда политоп (ограниченный многогранник) задан как выпуклая оболочка набора целочисленных точек, каждая из этих точек является его вершиной. Таков, например, многогранник задачи коммивояжера [2], но в общем случае это не так. В работе показывается, что иногда даже простая, на первый взгляд, задача распознавания: верно ли, что целочисленная точка политопа является выпуклой комбинацией двух других его целочисленных точек и, следовательно, не является вершиной, – оказывается *NP*-полной. Насколько нам известно, задачи такого рода ранее не рассматривались. В то же время умение определять целочисленные точки позволило бы отсеивать большое число точек, не являющихся вершинами.

В работе рассматривается задача распознавания, является ли заданное решение $x \in \mathbb{Z}^k$ линейного уравнения определенного вида выпуклой комбинацией двух других решений, и доказывается ее *NP*-полнота. Доказательство упрощает получение некоторых результатов работы [3], благодаря чему становится прозрачной причина сложности задачи распознавания разбиений натуральных чисел, представимых в виде выпуклой комбинации двух разбиений [3, 4]. В качестве отправной *NP*-полной задачи используется задача распознавания

«Непересекающиеся подмножества равного веса». Пусть S – некоторое множество положительных целых чисел. Определить, существуют ли два непересекающихся непустых подмножества $S_1, S_2 \subseteq S$, суммы элементов которых равны.

NP-полнота данной задачи доказана Г. Войгингером в работе [5].

Используемые понятия теории сложности изложены в [6]. Поясним лишь несколько обозначений. Для задачи распознавания *Z* через size (*Z*) обозначается ее размер, определяемый как совокупный размер (длина записи в некотором алфавите) ее входных данных. Для оценки асимптотического поведения размера задачи и временной сложности алгоритмов ее решения как функций от основных параметров входных данных применяется $\mathcal{O}$-нотация: для вещественнозначных функций $f(x)$ и $g(x)$ запись $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ означает, что существует такая константа *C*, что $f(x) = Cg(x)$ для всех *x*.

1. Основной результат и его следствия

Рассмотрим линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = n \tag{1}$$

с целыми положительными коэффициентами $1 \le a_i \le n,\ a_i \ne a_j,\ i \ne j,\ i, j = 1, \ldots, k,\ 1 \le k \le n$, и целым положительным свободным членом *n*. Каждое решение уравнения (1) будем рассматривать как точку k-мерного аффинного пространства

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Обозначим через T множество всех неотрицательных целочисленных решений x уравнения (1) и построим политоп

$$P = \operatorname{conv} T,$$

являющийся их выпуклой оболочкой. Решение x является вершиной P тогда и только тогда, когда точку x нельзя представить в виде выпуклой комбинации каких-либо других m, $2 \le m \le k+1$, целочисленных точек политопа P (см., например, [7]). В частности, если x представима в виде выпуклой комбинации двух целочисленных точек из P,

$$x = \lambda y + (1-\lambda) z, \quad y, z \in P, \quad 0 < \lambda < 1, \tag{2}$$

то x не является вершиной P. Поставим задачу распознавания

«Выпуклая комбинация двух решений уравнения». Для заданного целочисленного решения x уравнения (1) определить, представимо ли x в виде выпуклой комбинации двух целочисленных точек $y, z \in P$.

Заметим, что если такие точки y и z существуют, то они удовлетворяют уравнению (1).

Теорема 1. *Задача «Выпуклая комбинация двух решений уравнения» NP-полна.*

Доказательство. Принадлежность рассматриваемой задачи классу *NP* доказать нетрудно. Пусть Z – некоторая ее индивидуальная задача с решением на входе. Вход задачи Z состоит из чисел n, k и $a_1, a_2, \ldots, a_k$, определяющих уравнение (1), и координат $x_1, x_2, \ldots, x_k$ точки x. Ввиду неравенств $k \le n$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \le n$, $x_1, x_2, \ldots, x_k \le n$ размер $\operatorname{size}(Z)$ асимптотически равен $\mathcal{O}(n \log n)$. Нужно показать, что размер «угаданных» решений $y, z,$ выпуклой комбинацией (2) которых является решение x, ограничен полиномом от размера задачи Z и что проверка представления (2) осуществима за полиномиальное по $\operatorname{size}(Z)$ время. Решения y и z рассматриваются как точки из $\mathbb{R}^n$, поэтому их совокупный размер равен $\mathcal{O}(n \log n)$. То, что y и z удовлетворяют (1), легко проверить за полиномиальное по $\operatorname{size}(Z)$ время, вычислив суммы $\sum_{i=1}^{k} y_i a_i$ и $\sum_{i=1}^{k} z_i a_i$. Представление (2) также проверяется за полиномиальное по $\operatorname{size}(Z)$ время.

Для доказательства *NP*-полноты рассматриваемой задачи покажем, что к ней сводится *NP*-полная задача «Непересекающиеся подмножества равного веса».

Используем представление решений уравнения (1) в виде мультимножеств. Мультимножеством $\mathcal{A}$ называется пара $\langle A, m_A \rangle$, состоящая из множества A и целочисленнозначной функции кратности $m_A : A \to \mathbb{N}$. Далее все мультимножества будем считать конечными и состоящими из натуральных чисел.

Если x – решение уравнения (1), обозначим через

$$S_x = \{a_i : x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$$

множество коэффициентов уравнения (1), соответствующих положительным компонентам точки x. Решение x можно рассматривать как мультимножество

$$\mathcal{S}_x = \langle S_x, m_x \rangle,$$

$$m_x(s) = x_s, \quad s \in S_x.$$

Верно и обратное: каждое мультимножество $\mathcal{A} = \langle A, m_A \rangle$, такое, что

$$A \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_k\};$$
$$n = \sum_{a \in A} m_A(a) a,$$

определяет решение x уравнения (1). Полиномиальная эквивалентность размеров представлений решений (1) в виде точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ и в виде мультимножества $\mathcal{S}_x = \langle S_x, m_x \rangle$ очевидна: в обоих случаях размер представления равен $\mathcal{O}(n \log n)$.

Воспользуемся теоремой 5 из [8], которая утверждает, что решение x уравнения (1) в случае

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = \{1, 2, \ldots, n\} \tag{3}$$

является выпуклой комбинацией двух других его решений тогда и только тогда, когда существуют два непересекающихся подмножества $S_1, S_2 \subset S_x$ и два целочисленных набора $u = \langle u_i \in \mathbb{Z}_+ : a_i \in S_1, 1 \le i \le k \rangle$ и $v = \langle v_j \in \mathbb{Z}_+ : a_j \in S_2, 1 \le j \le k \rangle$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} 0 < u_i \le x_i, \quad a_i \in S_1, \quad 1 \le i \le k; \\ 0 < v_j \le x_j, \quad a_j \in S_2, \quad 1 \le j \le k; \\ \sum_{\substack{s = a_i \in S_1, \\ 1 \le i \le k}} u_i s = \sum_{\substack{s = a_j \in S_2, \\ 1 \le j \le k}} v_j s. \end{gathered} \tag{4}$$

Условия (4) равносильны существованию в мультимножестве $\mathcal{S}_x$ непересекающихся подмультимножеств $\mathcal{S}_1 = \langle S_1, m_{S_1} = u \rangle$ и $\mathcal{S}_2 = \langle S_2, m_{S_2} = v \rangle$, удовлетворяющих равенству

$$\sum_{s \in S_1} m_{S_1}(s) s = \sum_{s \in S_2} m_{S_2}(s) s.$$

Поставим задачу распознавания

«Непересекающиеся подмультимножества равного веса». Задано мультимножество $\mathcal{A} = \langle A, m_A \rangle$. Определить, существуют ли в нем непересекающиеся подмультимножества $\mathcal{B} = \langle B, m_B \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle C, m_C \rangle$, удовлетворяющие равенству

$$\sum_{a \in B} m_B(a) a = \sum_{a \in C} m_C(a) a. \tag{5}$$

Согласно лемме 2 (см. разд. 2), являющейся модификацией результата из [3], данная задача полиномиально сводится к задаче «Выпуклая комбинация двух решений уравнения» при условии (3). Следовательно, она сводится к этой задаче и без условия (3), поскольку его добавление лишь сужает множество входов.

Задача «Непересекающиеся подмножества равного веса» получается из задачи «Непересекающиеся подмультимножества равного веса», когда мультимножество $\mathbb{A}$ является множеством, т. е. $m_A(a) = 1$ для всех $a \in A$. Полиномиальная эквивалентность размеров этих задач следует из [3], используемое утверждение и его краткое доказательство приведены для полноты изложения в виде леммы 1 в разд. 2. Поэтому из теоремы Войгингера [5] заключаем, что задача «Непересекающиеся подмультимножества равного веса» также является *NP*-полной. Вслед за ней *NP*-полна и задача «Выпуклая комбинация двух решений уравнения». ■

Задача «Выпуклая комбинация двух решений уравнения» обобщает следующую задачу распознавания, поставленную в [3]:

«Выпуклая комбинация двух разбиений чисел». Для заданного разбиения целого положительного числа n определить, является ли оно выпуклой комбинацией двух других разбиений этого числа.

Под разбиением числа n понимается любое представление n в виде суммы целых положительных чисел

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r, \qquad n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

без учета порядка слагаемых [4]. Всякое разбиение (6) можно отождествить с точкой $x \in \mathbb{R}^n$, каждая координата x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, которой равна числу вхождений слагаемого i в сумму (6).

Следствие 1. *Задача распознавания «Выпуклая комбинация двух разбиений чисел» NP-полна.*

Доказательство. Задача «Выпуклая комбинация двух разбиений чисел» при условии (3) совпадает с задачей «Выпуклая комбинация двух решений уравнения», *NP*-полнота которой установлена в процессе доказательства теоремы. ■

Мультимножество $\mathcal{A} = \langle A, m_A \rangle$, $A \subset \mathbb{N}$, называется *мультимножеством Сидона*, если для любых двух его подмультимножеств $\mathcal{B} = \langle B, m_B \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle C, m_C \rangle$ равенство (5) возможно только в случае $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ [3]. Естественно возникает задача распознавания

«Мультимножество Сидона». Для мультимножества $\mathcal{A} = \langle A, m \rangle$ определить, является ли оно мультимножеством Сидона.

Поскольку эта задача является дополнительной к задаче «Непересекающиеся подмультимножества равного веса» [6], из доказанной теоремы получаем

Следствие 2. *Задача распознавания «Мультимножество Сидона» co-NP-полна.*

2. Доказательства вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Размер мультимножества* $\mathcal{A} = \langle A, m \rangle$ *равен* $\mathcal{O}(n)$, *где* $n = \sum_{a \in A} m(a)a.$

Доказательство. Мультимножество $\mathcal{A}$ задается двумя последовательностями натуральных чисел $(a, a \in A)$ и $(m(a), a \in A)$ длины $q = |A|$. Их размер

$$\sum_{a \in A} \log a + \sum_{a \in A} \log m(a)$$

принимает максимальное значение, когда достигает максимума произведение

$$\prod_{a \in A} m(a)a.$$

Из неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом получаем

$$\prod_{a \in A} m(a)a \le \left(\frac{\sum_{a \in A} m(a)a}{q} \right)^q = \left(\frac{n}{q} \right)^q.$$

Исследуя функцию $y(x) = \left(\frac{n}{x}\right)^x$ на максимум на интервале $1 \le x < n,$ нетрудно заключить, что $\max\limits_{1 \le q \le n}\left(\frac{n}{q}\right)^q$ достигается при $q = \left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor$ или $q = \left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor + 1.$ В любом случае

$$\max \log \prod_{a \in A} m(a)a = \mathcal{O}(n).$$

Поскольку при $m(a_1)a_1 = m(a_2)a_2 = \ldots = m(a_q)a_q$ неравенство Коши обращается в равенство, полученный размер достижим. ■

Лемма 2. *Задача «Непересекающиеся подмультимножества равного веса» полиномиально сводится к задаче «Выпуклая комбинация двух решений уравнения» с условием (3).*

Доказательство. Пусть Z_1 – индивидуальная задача «*Непересекающиеся подмультимножества равного веса*» с мультимножеством

$$\mathcal{A} = \langle A, m_A \rangle, \quad A = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \sum_{a \in A} m_A(a)a = n,$$

на входе. Мультимножество $\mathcal{A}$ определяет решение x уравнения (1), заданное в форме

$$\mathcal{S}_x = \langle S_x, m_x \rangle, \quad S_x = A, \quad m_x = m_A.$$

Координаты точки x равны

$$x_i = m_x(i), \quad i \in S_x;$$

$$x_i = 0, \quad i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus S_x,$$

и ее можно построить за время $\mathcal{O}(n \log n)$, полиномиальное по $\operatorname{size}(Z_1) = \mathcal{O}(n)$ (см. лемму 1). Рассмотрим индивидуальную задачу Z_2 задачи «Выпуклая комбинация двух разбиений чисел» со входом $x.$ По теореме 5 из [8] задачи Z_1 и Z_2 имеют ответ «Да» одновременно, поскольку непересекающиеся подмножества $S_1, S_2 \subset S_x$ и наборы $u = \langle u(a) \in \mathbb{Z}_+; a \in S_1 \rangle$ и $v = \langle v(a) \in \mathbb{Z}_+; a \in S_2 \rangle,$ удовлетворяющие (4), определяют непересекающиеся подмультимножества $\mathcal{B} = \langle S_1, m_{S_1} = u \rangle$ и $\mathcal{C} = \langle S_2, m_{S_2} = v \rangle$ в $\mathcal{A}$, и наоборот. Условия (5) для мультимножеств и (4) для S_1, S_2, u, v эквивалентны друг другу. ■

Заключение

В работе доказана *NP*-полнота задач распознавания «Выпуклая комбинация двух решений уравнения» и «Выпуклая комбинация двух разбиений чисел». Ввиду гипотезы «$P \neq NP$» это означает, что данные задачи вряд ли разрешимы за полиномиальное время. Хотя отсюда не следует полиномиальная неразрешимость задач распознавания внутренних целочисленных точек и вершин соответствующих политопов, полученные результаты свидетельствуют в пользу справедливости этих утверждений.

Список литературы

1. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2 т. Т. 2 / А. Схрейвер. – М. : Мир, 1991. – 704 с.

2. Grötschel, M. Polyhedral theory / M. Grötschel, M. Padberg // The travelling salesman problem: a guided tour of combinatorial optimization ; ed. E.L. Lawler [et al.]. – Chichester, 1985. – P. 252–305.

3. Шлык, В.А. Задачи распознавания некоторых классов разбиений чисел и числовых мультимножеств / В.А. Шлык // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2010. – Т. 378. – С. 171–183.

4. Эндрюс, Г. Теория разбиений / Г. Эндрюс. – М. : Наука, 1982. – 255 с.

5. Woeginger, G.J. On the equal-subset-sum problem / G.J. Woeginger // Information Processing Letters. – 1992. – Vol. 42. – P. 299–302.

6. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М. : Мир, 1982. – 416 с.

7. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. – М. : Мир, 1973. – 469 с.

8. Шлык, В.А. О вершинах политопов разбиений чисел / В.А. Шлык // Доклады НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 3. – С. 5–10.

Поступила 07.08.11

Институт математики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 11
e-mail: v.shlyk@gmail.com

V.A. Shlyk

COMPLEXITY OF A RECOGNITION PROBLEM FOR ONE CLASS OF SOLUTIONS OF LINEAR EQUATIONS

We prove NP-completeness of a recognition problem on whether a nonnegative integer solution of the equation $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = n$ with natural $a_1, a_2, \ldots, a_k$ and n can be expressed as a convex combination of two other solutions. The proof uses the Woeginger theorem on *NP*-completeness of the equal-subset-sum problem.