ИНФОРМАТИКА

2011 **октябрь-декабрь** **№ 4**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.8

В.А. Емеличев, В.В. Коротков

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МАРКОВИЦА

Формулируется многокритериальный дискретный вариант известной модели портфельной оптимизации Марковица с упорядоченными минимаксными критериями рисков Сэвиджа. Определяются нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума в случае, когда в трехмерном пространстве параметров задачи задана октаэдральная метрика l_1.

Введение

Большинство управленческих решений принимается в условиях неопределенности и риска, что обусловлено рядом факторов: отсутствием полной информации, наличием противоборствующих тенденций, элементами случайности и т. п. Для управления финансовыми инвестициями Марковицем [1–3] была разработана оптимизационная модель, демонстрирующая, как инвестор, выбирая портфель активов, может максимально снизить степень риска (риска упущенной выгоды) при заданном ожидаемом уровне дохода. Такая постановка предполагает использование в качестве исходных данных статистических и экспертных оценок рисков (финансовых, экологических и т. п.). Хорошо известно (см., например, [4, 5]), что сложность вычисления подобных величин сопровождается большим количеством ошибок, приводящих к высокой степени неопределенности начальной информации. В связи с этим появляется необходимость учета неточности и некорректности входных параметров, которые свойственны реальным ситуациям решения практических задач оптимизации. Возникающий при этом вопрос о предельном уровне изменений (возмущений) числовых параметров исходной задачи, сохраняющих оптимальность выбранного решения (портфеля), приводит к ключевому понятию радиуса устойчивости. Конкретное содержание данного понятия зависит от выбора принципа оптимальности (если задача многокритериальная), множества параметров задачи, подверженных возмущениям, а также от структуры, определяющей отношения «близости» в пространстве параметров, т. е. от метрики, заданной в этом пространстве. Нахождению формул или оценок радиуса устойчивости парето-оптимальных решений многокритериальных задач дискретной оптимизации посвящен ряд работ (см., например, [6–10]). Достаточно полное представление о многочисленных публикациях по вопросам устойчивости скалярных задач можно получить на основе работ [11, 12].

Настоящая статья продолжает начатые в [13–15] исследования устойчивости лексикографических оптимумов многокритериальных дискретных задач с различными видами векторных критериев. В работе, основываясь на классической портфельной теории Марковица, сформулирована многокритериальная инвестиционная булева задача с упорядоченными минимаксными критериями рисков Сэвиджа [16]. Получены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости оптимального портфеля в случае, когда в трехмерном пространстве параметров задачи задана октаэдральная метрика l_1.

Отметим, что ранее в [17–19] были получены аналогичные оценки (снизу и сверху) радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля многокритериальной инвестиционной задачи при различных комбинациях чебышевской l_∞ и октаэдральной l_1 метрик в пространствах портфелей, рисков и состояний рынка.

1. Постановка задачи, определения, свойства

Для формальной постановки задачи введем следующие обозначения:

$N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ – активы (акции, облигации предприятий, недвижимость и т. п.);

N_m – состояния финансового рынка (рыночные ситуации);

N_s – риски (финансовые, экологические, производственные и т. п.);

R – трехиндексная матрица рисков (упущенных возможностей) размера $m \times n \times s$ с элементами r_{ijk} из $\mathbf{R}$;

r_{ijk} – величина экономического риска, которому подвергается инвестор, выбирая актив $j \in N_n$ по критерию (виду риска) $k \in N_s$ в том случае, если рынок находится в состоянии $i \in N_m$;

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$ – портфель инвестиций (активов), где $\mathbf{E} = \{0,1\}$, $x_j = 1$, если инвестор выбирает актив j, $x_j = 0$ в противном случае.

Наряду с трехиндексной матрицей $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ будем использовать и ее двухмерные сечения $R_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $k \in N_s$. Пусть эффективность выбираемого портфеля (булева вектора) $x \in X$, $|X| \geq 2$, оценивается векторной целевой функцией $f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), \ldots, f_s(x, R_s))$, компонентами которой являются минимаксные критерии рисков Сэвиджа (критерии крайнего пессимизма)

$$f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} R_{ik} x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \to \min_{x \in X}, \qquad k \in N_s,$$

где $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, \ldots, r_{ink})$.

Таким образом, согласно критерию «узкого места» Сэвиджа рекомендуется в условиях неопределенности состояния финансового рынка выбирать тот портфель, при котором величина суммарного риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации – когда риск максимален.

Отметим, что в теории оптимизации минимаксная концепция занимает видное место. Минимаксным задачам и методам их решения посвящена обширная литература (см., например, монографии [20–23]). К таким задачам, в частности, относится и задача, поставленная П.Л. Чебышевым, о наилучшем равномерном приближении функций многочленами.

Будем предполагать, что критерии Сэвиджа $f_k(x, R_k)$, $k \in N_s$, упорядочены по важности. Такая упорядоченность позволяет добиваться оптимизации более важного критерия за счет любых потерь по всем остальным менее важным критериям. В этом контексте под s-критериальной инвестиционной задачей $Z^s(R)$, $s \in \mathbf{N}$, с упорядоченными критериями рисков Сэвиджа будем понимать лексикографическую задачу, т. е. задачу поиска множества $L^s(R)$ лексикографических оптимумов, которое зададим традиционным способом [13–15, 24, 25]:

$$L^s(R) = \{x \in X : \nexists x' \in X \ \ (x \underset{R}{\succ} x')\},$$

где $x \underset{R}{\succ} x' \Leftrightarrow \exists p \in N_s \ \ (g_p(x, x', R_p) > 0 \quad \& \quad p = \min\{k \in N_s : \ g_k(x, x', R_k) \neq 0\})$;

$$g_k(x, x', R_k) = f_k(x, R_k) - f_k(x', R_k) = \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik} x - R_{i'k} x'), \ k \in N_s. \qquad (1)$$

Очевидно, что множество $L^s(R)$ является непустым подмножеством множества Парето при любой матрице $R \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$. Хорошо известно (см., например, [13, 14, 24]), что множество $L^s(R)$ может быть определено и как результат решения последовательности s скалярных задач:

$$L_k^s(R) = Arg\min\{f_k(x, R_k):\ x \in L_{k-1}^s(R)\}, \quad k \in N_s,$$

где $L_0^s(R) = X$, $\mathrm{Arg}\min\{\cdot\}$ – множество всех оптимальных решений соответствующей скалярной задачи минимизации. Таким образом, имеем следующую цепочку включений:

$$X \supseteq L_1^s(R) \supseteq L_2^s(R) \supseteq \ldots \supseteq L_s^s(R) = L^s(R).$$

Поэтому задачу $Z^s(R)$ поиска множества $L^s(R)$ можно называть задачей последовательной минимизации частных критериев $f_k(x, R_k)$, $k \in N_s$.

Очевидны следующие свойства.

Свойство 1. *Если для портфеля* $x^0 \in X$ *справедлива формула*

$$\forall x \in X \setminus \{x^0\} \quad (g_1(x, x^0, R_1) > 0),$$

то $x^0 \in L^s(R)$.

Свойство 2. *Если для портфеля* $x^0 \in X$ *выполняется формула*

$$\exists x^* \in X \setminus \{x^0\} \quad (g_1(x^*, x^0, R_1) < 0),$$

то $x^0 \notin L^s(R)$.

В пространствах портфелей $\mathbf{R}^n$ и состояний финансового рынка $\mathbf{R}^m$, а также в критериальном пространстве рисков $\mathbf{R}^s$ зададим одну и ту же октаэдральную метрику l_1, т. е. положим

$$\|R_{ik}\| = \sum_{j\in N_n} |r_{ijk}|, \ \ i \in N_m, k \in N_s;$$

$$\|R_k\| = \sum_{i\in N_m} \|R_{ik}\| = \sum_{i\in N_m} \sum_{j\in N_n} |r_{ijk}|, \ \ k \in N_s;$$

$$\|R\| = \sum_{k\in N_s} \|R_k\| = \sum_{i\in N_m} \sum_{j\in N_n} \sum_{k\in N_s} |r_{ijk}|.$$

Поэтому очевидны неравенства

$$\|R\| \geq \|R_k\| \geq \|R_{ik}\|, \quad i \in N_m, k \in N_s. \tag{2}$$

Кроме того, легко убедиться, что для любых портфелей x и x' верны неравенства

$$R_{ik}x - R_{i'k}x' \geq -\|R_k\|, \quad i, i' \in N_m,\ k \in N_s. \tag{3}$$

Как обычно [15, 26], радиусом устойчивости портфеля $x^0 \in L^s(R)$ назовем число

$$\rho^s(x^0, R) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing; \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall R' \in \Omega(\varepsilon) \ (x^0 \in L^s(R + R'))\}$, $\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|R'\| < \varepsilon\}$ – множество возмущающих матриц; $L^s(R + R')$ – множество лексикографических оптимумов возмущенной задачи $Z^s(R + R')$.

Таким образом радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений исходных данных задачи (элементов матрицы R), при которых сохраняется лексикографическая оптимальность портфеля.

2. Оценки радиуса устойчивости

Для портфеля $x^0 \in L^s(R)$ задачи $Z^s(R)$ введем обозначение

$$\varphi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i^0 1}x^0).$$

Очевидно, что $\varphi \geq 0$.

Теорема. *Для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, R)$, $s \geq 1$, любого портфеля $x^0 \in L^s(R)$ многокритериальной инвестиционной задачи $Z^s(R)$ справедливы оценки*

$$\varphi \leq \rho^s(x^0, R) \leq m\varphi.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in L^s(R)$. Сначала докажем неравенство $\rho^s(x^0, R) \geq \varphi$, которое очевидно при $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ для любого портфеля $x \neq x^0$ справедливо неравенство

$$\min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i^0 1}x^0) \geq \varphi. \tag{4}$$

Пусть R' – произвольная возмущающая матрица из множества $\Omega(\varphi)$. Тогда, учитывая (1)–(4), получаем

$$g_1(x, x^0, R_1 + R_1') = \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i^0 1}x^0 + R_{i1}'x - R_{i^0 1}'x^0) \geq$$
$$\geq \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x - R_{i^0 1}x^0) - \|R_1'\| \geq \varphi - \|R_1'\| \geq \varphi - \|R'\| > 0.$$

Поэтому в силу свойства 1 портфель x^0 сохраняет свою лексикографическую оптимальность в любой возмущенной задаче $Z^s(R + R')$, $R' \in \Omega(\varphi)$. Следовательно, $\rho^s(x^0, R) \geq \varphi$.

Далее покажем, что $\rho^s(x^0, R) \leq m\varphi$. Пусть портфель $x^* \neq x^0$ таков, что выполняются равенства

$$g_1(x^*, x^0, R_1) = \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x^* - R_{i^0 1}x^0) = \varphi. \tag{5}$$

Существование такого портфеля вытекает из определения числа φ.

Поскольку $x^* \neq x^0$, то существует такой индекс $l \in N_n$, что $x_l^* \neq x_l^0$. Полагая $\varepsilon > m\varphi$, элементы сечения $R_1^0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ возмущающей матрицы $R^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ определим следующим образом:

$$r_{ij1}^0 = \begin{cases} \delta(x_j^0 - x_j^*), & \text{если } i \in N_m,\ j = l; \\ 0, & \text{если } i \in N_m,\ j \neq l, \end{cases}$$

где $\varphi < \delta < \varepsilon/m$. Элементы всех остальных сечений R_k^0, $k \in N_s \setminus \{1\}$, возмущающей матрицы R^0 положим равными нулю. Очевидно, что все строки R_{i1}^0, $i \in N_m$, сечения R_1^0 одинаковы. Поэтому, обозначив такую строку через A, находим

$$A(x^* - x^0) = -\delta;$$

$$\|A\| = \delta;$$

$$m\varphi < \|R_1^0\| = \|R^0\| = m\delta < \varepsilon,$$

т. е. $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Отсюда, учитывая равенства (1) и (5), получаем

$$g_1(x^*, x^0, R_1 + R_1^0) = \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x^* - R_{i^01}x^0 + Ax^* - Ax^0) =$$
$$= \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{i1}x^* - R_{i^01}x^0) + A(x^* - x^0) = \varphi - \delta < 0.$$

Тогда согласно свойству 2 портфель $x^0 \in L^s(R)$ не является лексикографическим оптимумом возмущенной задачи $Z^s(R + R^0)$, где $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$, а ε – любое число, превосходящее $m\varphi$. Следовательно, $\rho^s(x^0, R) \leq m\varphi$. ■

3. Достижимость оценок

Обе оценки радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, R)$, указанные в теореме, являются достижимыми, поскольку очевидно следующее следствие из теоремы.

Следствие 1. *При* $m = 1$ *справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, R) = \varphi = \min\{R_1(x - x^0) :\ x \in X \setminus \{x^0\}\}. \tag{6}$$

Заметим, что наша задача $Z^s(R)$ при $m = 1$ превращается в многокритериальную задачу булева программирования с линейными критериями

$$R_k x \to \min_{x \in X}, \quad k \in N_s,\ X \subseteq \mathbf{E}^n, \tag{7}$$

где $R_k \in \mathbf{R}^{1\times n}$, $k \in N_s$, – k-е сечение матрицы $R \in \mathbf{R}^{1\times n\times s}$. Поэтому равенство (6) является формулой радиуса устойчивости лексикографического оптимума задачи (7).

Покажем, что нижняя оценка радиуса устойчивости φ достижима также и при $m > 1$.

Следствие 2. *При* $m > 1$ *существует такой класс задач* $Z^s(R)$, $s \geq 1$, *что для радиуса устойчивости портфеля* $x^0 \in L^s(R)$ *справедлива формула* $\rho^s(x^0, R) = \varphi$.

Доказательство. Для доказательства равенства $\rho^s(x^0, R) = \varphi$, где $\varphi > 0$, согласно теореме достаточно выделить класс задач, для которых $\rho^s(x^0, R) \leq \varphi$. Дальнейшее изложение и посвящено этому.

Пусть портфель x^* таков, что выполняется равенство (5). Поскольку $x^0 \neq x^*$, то существует такой индекс $l \in N_n$, что $x_l^0 \neq x_l^*$. Будем предполагать, что $x_l^0 = 1$ и $x_l^* = 0$. В этом состоит специфика нашего класса задач. Непустота такого класса гарантируется следующим тривиальным примером. Пусть матрица $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ такова, что $r_{ijk} = a < 0$ для любой тройки $(i, j, k) \in N_m \times N_n \times N_s$, а $x^0 = (1,0,\ldots,0)^T \in \mathrm{E}^n$, $x^* = (0,0,\ldots,0)^T \in \mathrm{E}^n$. Тогда $x^0 \in L^s(R)$, а $x^* \notin L^s(R)$.

Полагая $\varepsilon > \varphi$, построим элементы сечения $R_1^0 = [r_{ij1}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ возмущающей матрицы $R^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ по правилу

$$r_{ij1}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если} \quad i = i(x^0),\ j = l; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\varphi < \delta < \varepsilon, \tag{8}$$

$$i(x^0) = \arg\max\{R_{i1}x^0 :\ i \in N_m\}. \tag{9}$$

Все элементы остальных сечений R_k^0, $k \in N_s \setminus \{1\}$, возмущающей матрицы R^0 положим равными нулю. В результате имеем

$$R^0_{i(x^0)1} x^0 = \delta;$$

$$R_{i1}^0 x^* = 0, \quad i \in N_m;$$

$$R_{i1}^0 x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\};$$

$$\|R^0\| = \|R_1^0\| = \delta, \quad R^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Теперь ввиду (9) легко убедиться, что

$$f_1(x^*, R_1 + R_1^0) = \max_{i \in N_n}(R_{i1} + R_{i1}^0)x^* = \max_{i \in N_n} R_{i1}x^* = f_1(x^*, R_1),$$

$$f_1(x^0, R_1 + R_1^0) = \max\{(R_{i(x^0)1} + R^0_{i(x^0)1})x^0,\ \max_{i \neq i(x^0)}(R_{i1} + R_{i1}^0)x^0\} =$$

$$= \max\{f_1(x^0, R_1) + \delta,\ \max_{i \neq i(x^0)} R_{i1}x^0\} = f_1(x^0, R_1) + \delta.$$

Поэтому на основании соотношений (5) и (8) получаем $g_1(x^*, x^0, R_1 + R_1^0) = g_1(x^*, x^0, R_1) - \delta = \varphi - \delta < 0$. Отсюда согласно свойству 2 убеждаемся, что для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует матрица $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$ с условием $x^0 \notin L^s(R + R^0)$. Следовательно, $\rho^s(x^0, R) \leq \varphi$. ■

Приведем числовой пример, иллюстрирующий следствие 2.

Пример. Пусть $m=2$, $n=3$, $s=1$, $X=\{x^0,x^*\}$, $x^0=(1,1,0)^T$, $x^*=(0,1,1)^T$,

$$R=\begin{pmatrix}-6 & 5 & -1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x^0,R)=0$, $f(x^*,R)=4$, т. е. x^0 – оптимальный портфель задачи $Z^1(R)$. Поэтому $\varphi=4$ и в силу теоремы $\rho^1(x^0,R)\geq 4$. При возмущающей матрице

$$R^0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \delta & 0 & 0\end{pmatrix},\ \delta>4,$$

имеем $\left\|R^0\right\|=\delta$ и $f(x^0,R+R^0)=\delta>4=f(x^*,R+R^0)$. Поэтому $x^0\notin L^1(R+R^0)$. Следовательно, $\rho^1(x^0,R)\leq 4$. Итак, $\rho^1(x^0,R)=4=\varphi$.

Замечание 1. В работе [26] были получены достижимые оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума x^0 задачи $Z^s(R)$

$$\varphi/2\leq\rho^s(x^0,R)\leq\varphi$$

в случае, когда в пространстве портфелей $\mathbf{R}^n$ задана октаэдральная метрика l_1, а в пространствах состояний $\mathbf{R}^m$ и рисков $\mathbf{R}^s$ – чебышевская метрика l_∞.

4. Условия устойчивости

Портфель $x^0\in L^s(R)$ назовем устойчивым, если $\rho^s(x^0,R)>0$. Кроме того, введем множество строгих лексикографических оптимумов задачи $Z^s(R)$:

$$S^s(R)=\{x\in X:\ \forall x'\in X\setminus\{x\}\quad (f_1(x',R_1)>f_1(x,R_1))\}.$$

Очевидно, что $S^s(R)\subseteq L^s(R)$ при любой матрице $R\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$. Кроме того, понятно, что множество $S^s(R)$ может быть пустым.

Следствие 3. *Для портфеля* $x^0\in L^s(R)$ *векторной задачи* $Z^s(R)$ *следующие утверждения эквивалентны:* (i) *портфель* $x^0\in S^s(R)$, (ii) *портфель* x^0 *устойчив,* (iii) $\varphi>0$.

Доказательство. $(i)\Rightarrow(ii)$. Пусть портфель $x^0\in L^s(R)$ является строгим лексикографическим оптимумом, т. е. $x^0\in S^s(R)$. Тогда для любого портфеля $x\in X\setminus\{x^0\}$ имеем

$$\xi(x)=\min_{i^0\in N_m}\max_{i\in N_m}(R_{i1}x-R_{i^01}x^0)=f_1(x,R_1)-f_1(x^0,R_1)>0.$$

Поэтому в силу теоремы получаем $\rho^s(x^0,R)\geq\varphi=\min\{\xi(x):\ x\in X\setminus\{x^0\}\}>0$, т. е. портфель $x^0\in L^s(R)$ устойчив.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. Пусть портфель $x^0\in L^s(R)$ устойчив. Тогда согласно теореме $m\varphi\geq\rho^s(x^0,R)>0$, т. е. $\varphi>0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Поскольку $\varphi \le f_1(x, R_1) - f_1(x^0, R_1)$ при любом портфеле $x \ne x^0$, из неравенства $\varphi > 0$ следует включение $x^0 \in S^s(R)$. ■

Следствие 4. *Портфель* $x^0 \in L^s(R)$ *задачи* $Z^s(R)$ *неустойчив* ($\rho^s(x^0, R) = 0$) *тогда и только тогда, когда* $\varphi = 0$.

Замечание 2. В силу эквивалентности любых двух метрик в конечномерных линейных пространствах (см., например, [27]) результаты разд. 4 справедливы при любых нормах в пространстве $\mathbf{R}^{m \times n \times s}$ возмущающих параметров задачи $Z^s(R)$.

Заключение

Желание инвестора минимизировать риски при выборе портфеля активов приводит к необходимости учета ряда возникающих неопределенностей. В данной работе при построении многокритериальной (лексикографической) модели управления инвестиционными рисками используются целевые функции «узкого места» Сэвиджа, которые в условиях неопределенности состояний финансового рынка позволяют выбирать тот портфель, при котором величина суммарного риска принимает минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации, а именно тогда, когда риск максимален. Другой тип неопределенности появляется в связи с применением в качестве исходной информации различных видов рисков, точность и достоверность которых всегда вызывает сомнение. Поэтому возникает потребность проведения постоптимального анализа, состоящего в выявлении радиуса устойчивости решения, т. е. предельного уровня изменений (возмущений) параметров исходной задачи, сохраняющей оптимальность выбранного решения (портфеля). Особенность полученных здесь нижней и верхней оценок радиуса устойчивости лексикографически оптимального портфеля состоит в том, что в частном случае, когда состояние рынка не вызывает сомнений (m = 1), эти оценки превращаются в формулу радиуса устойчивости лексикографического оптимума многокритериальной линейной задачи булева программирования. В работе также приведены легко проверяемые необходимые и достаточные условия устойчивости оптимального портфеля. Результаты могут быть использованы при конструировании оптимальных портфелей инвестора, желающего учитывать неопределенность различных видов рисков при наличии возможных (прогнозных) состояний финансового рынка.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф11К-095).

Список литературы

1. Markowitz, H. Portfolio selection / H. Markowitz // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, № 1. – P. 77–91.

2. Markowitz, H.M. Portfolio selection: efficient diversification of investments / H.M. Markowitz. – Oxford : Blackwell Publ., 1991. – 384 p.

3. Шарп, У.Ф. Инвестиции / У.Ф. Шарп, Г.Дж. Александер, Д.В. Бейли. – М. : Инфра-М, 2003. – 1028 с.

4. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели / А.Н. Ширяев. – М. : ФАЗИС, 1998. – 512 с.

5. Шапкин, А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций / А.С. Шапкин. – М. : Дашков и К°, 2003. – 544 с.

6. Емеличев, В.А. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования / В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин // Информатика. – 2006. – № 2. – С. 84–93.

7. Емеличев, В.А. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гельдера / В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 4. – С. 175–181.

8. Емеличев, В.А. Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы / В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – № 5. – С. 45–51.

9. Емеличев, В.А. Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гельдера / В.А. Емеличев, О.В. Карелкина // Дискретная математика. – 2009. – Т. 21, вып. 2. – С. 43–50.

10. Emelichev, V. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming / V. Emelichev, D. Podkopaev // Discrete Optimization. – 2010. – Vol. 7, № 1–2. – P. 48–63.

11. Greenberg, H.J. An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer and combinatorial optimization / N.J. Greenberg // Advances in computational and stochastic optimization, logic programming, and heuristic search. – Boston : Kluwer Acad. Publ., 1998. – P. 97–148.

12. Сотсков, Ю.Н. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами / Ю.Н. Сотсков, Н.Ю. Сотскова. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.

13. Емеличев, В.А. О квазиустойчивости лексикографической минимаксной комбинаторной задачи с распадающимися переменными / В.А. Емеличев, А.В. Карпук, К.Г. Кузьмин // Дискретный анализ и исследование операций. – 2010. – Т. 17, № 3. – С. 32–45.

14. Emelichev, V.A. On stability of some lexicographic integer optimization problem / V.A. Emelichev, E.E. Gurevsky, K.G. Kuzmin // Control and Cybernetics. – 2010. – Vol. 39, № 3. – P. 811–826.

15. Емеличев, В.А. О радиусе устойчивости лексикографического оптимума одной векторной задачи булева программирования / В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 2. – С. 71–81.

16. Savage, L.J. The Foundations of Statistics / L.J. Savage. – N.Y. : Dover Publ., 1972. – 384 p.

17. Emelichev, V. On stability of a Pareto-optimal solution of a portfolio optimization problem with Savage's minimax risk criteria / V. Emelichev, V. Korotkov, K. Kuzmin // Bulletin of the Academy of Sciences of Moldova. Mathematics. – 2010. – № 3 (64). – P. 36–44.

18. Емеличев, В.А. Об устойчивости эффективного решения векторной инвестиционной булевой задачи с минимаксными критериями Сэвиджа / В.А. Емеличев, В.В. Коротков // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2010. – Т. 18, № 2. – С. 3–10.

19. Емеличев, В.А. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска / В.А. Емеличев, В.В. Коротков, К.Г. Кузьмин // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 6 (В печати).

20. Федоров, В.В. Численные методы максимина / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 280 с.

21. Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.

22. Minimax and applications / Ed. by Du D.-Z., Pardalos P. M. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1995. – 308 p.

23. Сухарев, А.Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа / А.Г. Сухарев. – М. : Либроком, 2009. – 304 с.

24. Подиновский, В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. – М. : Сов. радио, 1975. – 192 с.

25. Miettinen, K. Nonlinear Multiobjective Optimization / K. Miettinen. – Boston : Kluwer Acad. Publ., 1999. – 320 p.

26. Емеличев, В.А. Оценки радиуса устойчивости лексикографического оптимума векторной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа / В.А. Емеличев, В.В. Коротков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 2. – С. 41–50.

27. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Физматлит, 2009. – 572 с.

Поступила 08.07.11

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: emelichev@bsu.by,
wladko@tut.by

V.A. Emelichev, V.V. Korotkov

POST-OPTIMAL ANALYSIS OF MARKOWITZ'S MULTICRITERIA INVESTMENT PROBLEM

We formulate a multicriteria discrete variant of well-known Markowitz's portfolio optimization model with Savage's ordered minimax risk criteria. We have suggested lower and upper bounds of the stability radius of a lexicographical optimum (portfolio) in case of octahedral metric l_1 in three-dimension space of the problem parameters.