ISSN 1816-0301 (print)
УДК 004.942

Поступила в редакцию 03.04.2018
Received 03.04.2018

В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан

Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ЛИНЕЙНАЯ АДАПТИВНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ПОДХОДА

Аннотация. Рассматривается метод синтеза фильтров случайных последовательностей при отсутствии априорной статистической информации о характеристиках полезного сигнала и шумов. При синтезе используются лишь данные о текущих измерениях и ограниченный объем эмпирической информации, что приводит к необходимости применения детерминированного подхода на основе метода наименьших квадратов. В целях получения рекуррентного алгоритма фильтрации предлагается расширение структуры функции потерь метода за счет включения в ее состав дополнительного слагаемого, задающего экстраполяцию оценки на следующий период измерений. Оптимальная текущая оценка находится с учетом как результатов измерений, так и экстраполированных значений. Выбор функции экстраполяции осуществляется исходя из желаемого класса синтезируемого фильтра. В работе рассматривается вариант полиномиальной экстраполяции с учетом предшествующих оценок и измерений. Использование только предшествующих оценок приводит к структуре фильтра с обратной связью, а использование только предшествующих измерений формирует трансверсальный фильтр. Проводится математическое моделирование, и на конкретном примере оцениваются потери точности фильтрации за счет неучета априорной статистической информации.

Ключевые слова: случайные последовательности, детерминированный подход, адаптивная фильтрация, расширенный метод наименьших квадратов

Для цитирования. Артемьев, В. М. Линейная адаптивная фильтрация случайных последовательностей на основе детерминированного подхода / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 3. – С. 32–40.

V. M. Artemiev, A. O. Naumov, L. L. Kokhan

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

LINEAR ADAPTIVE FILTERING OF RANDOM SEQUENCES ON BASIS OF DETERMINISTIC APPROACH

Abstract. The article studies the technique of synthesis of random sequence filters with unknown prior statistical information about the parameters of signal and noises. The synthesis uses only current measurements and a limited amount of empirical information, which leads to the necessity of using a deterministic approach based on the least squares method. In order to obtain a recursive filtering algorithm, it is proposed to extend the structure of the method loss function by including in loss function an additional term that defines the estimate extrapolation for the next measurement period. The optimal current estimate is based on both measurement results and extrapolated values. The extrapolation function is selected based on the desired class of synthesized filter. The paper considers a variant of polynomial extrapolation, taking into account previous estimates and measurements. The use of only previous estimates leads to the structure of the filter with feedback, while the use of only the previous measurements forms a transversal filter. Mathematical modeling was carried out and on particular example and the loss of filtering accuracy by not taking into account a priori statistical information was estimated.

Keywords: random sequences, deterministic approach, adaptive filtering, extended least-square method

For citation. Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Linear adaptive filtering of a random sequences on basis of deterministic approach. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 32–40 (in Russian).

Введение. Несмотря на большое число публикаций, задача фильтрации случайных процессов при ограниченных априорных данных о полезном сигнале и помехах продолжает оставаться актуальной. Существуют два адаптивных метода ее решения: непрямой и прямой. В первом случае измеренные данные используются для восстановления отсутствующей априорной информации и дальнейшей фильтрации известными методами. В прямых методах задача решается непосредственно по текущим измерениям без восстановления априорной статистики.

Использование для синтеза фильтров лишь текущих данных с учетом ограниченного объема эмпирической информации приводит к детерминированному подходу решения задачи [1]. При этом в качестве основного выступает метод наименьших квадратов [2], связанный с минимизацией текущих значений квадрата невязки решения. В настоящей работе исследуется прямой метод рекуррентной адаптивной фильтрации с использованием расширенного метода наименьших квадратов (РМНК).

Разработка адаптивных фильтров методом наименьших квадратов активно развивалась начиная с 1980-х гг. Одной из первых стала работа [3], где был разработан метод синтеза адаптивных решетчатых фильтров. Однако полученные алгоритмы не были рекуррентными, поскольку использовали весь текущий набор измерений, что приводило к непрерывному увеличению размерности задачи. Попытка нахождения рекуррентных алгоритмов сделана в работе [4] на основе геометрических представлений о решении задачи фильтрации, что привело к громоздким уравнениям, малодоступным для практики. Рекуррентный метод фильтрации был рассмотрен в работе [5], где показано, что рекуррентность позволяет существенно ускорить процесс адаптации. Сравнительная оценка сложности рекуррентных алгоритмов дана в работе [6]. Существенное продвижение в технологии метода синтеза рекуррентных адаптивных алгоритмов сделано в работе [7]. Авторы ввели в рассмотрение широко используемое в теории автоматического управления понятие пространства состояний и применили его для решения задач фильтрации методом наименьших квадратов. В частности, это упростило процедуру анализа ошибок в адаптивных фильтрах [8]. Итоги проведенных исследований были обобщены в монографиях [1, 9].

В опубликованных работах по синтезу адаптивных фильтров необходимым условием является обращение матриц, элементы которых определяются измеренными сигналами. Размерности этих матриц в процессе работы фильтра возрастают. Для перехода к рекуррентным алгоритмам в них используется процедура рекуррентного обращения матрицы. В общем случае она не дает точных результатов и требует дополнительных вычислений, что является недостатком метода.

Предлагаемый метод синтеза адаптивных фильтров при детерминированном подходе на основе расширенного метода наименьших квадратов [10, 11] позволяет находить структуру рекуррентного адаптивного фильтра и определять его параметры, не прибегая к обращению матриц.

Формулировка задачи. Предполагается, что исходный скалярный процесс является случайной последовательностью x_k, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ есть дискретное время. Будем считать, что модель этого процесса и ее статистические характеристики априорно неизвестны. Эмпирически полагаем, что значения процесса коррелированы во времени и время корреляции существенно выше периода измерений. Соответственно, возможна экстраполяция значений процесса $\tilde{x}_k$ на момент времени k по его предшествующим значениям.

Посредством линейного безынерционного датчика проводятся следующие измерения:

$$z_k = h_k x_k + v_k, \tag{1}$$

где h_k – коэффициент чувствительности датчика, v_k – случайная ошибка измерений (шум измерений) с неизвестными статистическими характеристиками. Полагается, что длительность корреляции шума значительно меньше длительности корреляции сигнала.

Задача заключается в нахождении уравнений фильтра для текущей оценки $\hat{x}_k$ значений исходного процесса x_k по результатам измерений z_k в условиях априорной статистической неопределенности, указанной выше.

При прямом методе адаптивной фильтрации в существующих работах производят непосредственное задание структуры фильтра, в рамках которого ищется решение [12]. В настоящей работе класс искомого фильтра определяется видом функции экстраполяции текущего значения оценки сигнала по данным, полученным в предыдущие моменты времени, и предшествующих измерений. Этот вид функции выбирается из числа известных [13] с набором параметров, подлежащих оценке в процессе фильтрации. Представим их в виде вектора $\mathbf{a}_{n,k}=\left[a_{1,k},\ a_{2,k},\ ...,\ a_{n,k}\right]^T$, где n – число параметров. Функцию экстраполяции обозначим как $\tilde{x}_k\left(\mathbf{a}_{n,k}\right)$.

В основе решения лежит выбор функции потерь и задание критерия оптимальности. В РМНК используется квадратичная функция потерь, состоящая из нескольких слагаемых. Первое определяет потери за счет невязки решения и в скалярном случае задается функцией $\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right)^2$. Для получения рекуррентного алгоритма вводится слагаемое $\left(\hat{x}_k-\tilde{x}_k\left(\mathbf{a}_{n,k}\right)\right)^2$, где функция экстраполяции зависит от n неизвестных коэффициентов $\mathbf{a}_{n,k}$, подлежащих оценке наряду с $\hat{x}_k$. Чтобы оценки коэффициентов также были рекуррентными, вводится третье слагаемое – $\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,k}\hat{x}_{k-i}-a_{i,k-1}\hat{x}_{k-1-i}\right)^2$. В итоге функция потерь принимает вид

$$J_k\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)=\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right)^2+\left(\hat{x}_k-\tilde{x}_k\left(\mathbf{a}_{n,k}\right)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,k}\hat{x}_{k-i}-a_{i,k-1}\hat{x}_{k-1-i}\right)^2 . \tag{2}$$

Критерием оптимальной фильтрации является минимум этой функции относительно значений $\hat{x}_k$ и параметров $\mathbf{a}_{n,k}$. Искомые оценки удовлетворяют необходимым условиям оптимальности

$$\frac{\partial J_k\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)}{\partial\hat{x}_k}=0,\quad \frac{\partial J_k\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)}{\partial a_{j,k}}=0,\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

откуда находятся уравнения оптимального фильтра и оценок коэффициентов функции экстраполяции. Структура адаптивного фильтра изображена на рис. 1.

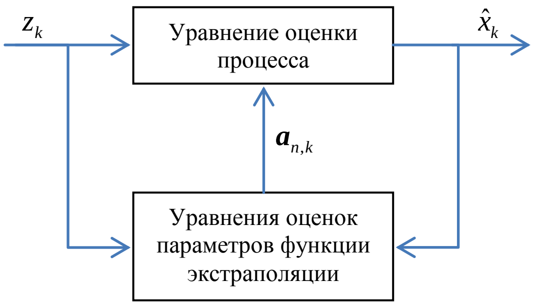

Рис. 1. Структура адаптивного фильтра

Варьируя функцию экстраполяции, можно получить различные варианты алгоритма адаптивной фильтрации.

Уравнения фильтра с обратной связью. Фильтр с обратной связью (бесконечной памятью) находится путем задания функции экстраполяции регрессией

$$\tilde{x}_k\left(\mathbf{a}_{n,k}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}\hat{x}_{k-i}, \tag{4}$$

линейно зависящей от имеющихся оценок за n предыдущих моментов измерений. В этом случае уравнения оптимальности (3) приводятся к виду

$$\frac{\partial J_k\left(\hat{x}_k, \mathbf{a}_{n,k}\right)}{\partial \hat{x}_k} = -h_k\left(z_k - h_k\hat{x}_k\right) + \left(\hat{x}_k - \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\hat{x}_{k-i}\right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial J_k\left(\hat{x}_k, \mathbf{a}_{n,k}\right)}{\partial a_{j,k}} = -\left(\hat{x}_k - \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\hat{x}_{k-i}\right) + \left(a_{j,k}\hat{x}_{k-j} - a_{j,k-1}\hat{x}_{k-1-j}\right) = 0,\ j = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Из соотношения (5) находится уравнение для оценки значений процесса $\hat{x}_k$:

$$\hat{x}_k = k_{1,k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\hat{x}_{k-i} + k_{0,k}z_k\,. \quad (7)$$

Здесь коэффициенты усиления $k_{1,k}$ и $k_{0,k}$ вычисляются по формулам

$$k_{1,k} = 1\big/\left(1+h_k^2\right),\ k_{0,k} = h_k\big/\left(1+h_k^2\right). \quad (8)$$

Структура уравнения (7) изображена на рис. 2, где символом z^{-1} обозначена задержка сигнала на период измерений.

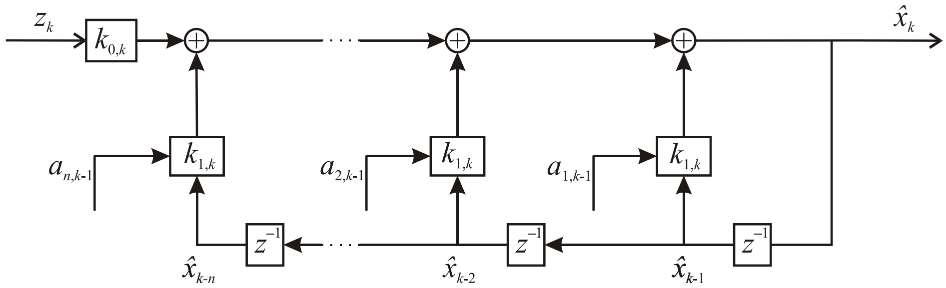

Рис. 2. Структура уравнения оценки процесса в адаптивном фильтре с обратной связью

Уравнения оценок коэффициентов функции экстраполяции находятся из выражений (4), (6) и в итоге приводятся к виду

$$a_{j,k}\hat{x}_{k-j} + h_k k_{0,k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\hat{x}_{k-i} = a_{j,k-1}\hat{x}_{k-1-j} + k_{0,k}z_k,\ j = \overline{1,n}\,. \quad (9)$$

Эти уравнения позволяют находить произведения $a_{j,k}\hat{x}_{k-j}$, где сомножитель $\hat{x}_{k-j}$ известен и определяется на n предыдущих моментах времени, и образуют систему из n линейных уравнений, решение которой не зависит от решения уравнения (7). Задача фильтрации начинается с решения уравнений (9), результаты которого затем используются для решения уравнений оценки (7).

Качество фильтрации задается величиной функции потерь (2), которая в оптимальном фильтре принимает минимальную величину $J_{k,\text{опт}}\left(\hat{x}_k, \mathbf{a}_{n,k}\right)$. Для ее определения из уравнения (5) получаем выражение

$$h_k\left(z_k - h_k\hat{x}_k\right) = \left(\hat{x}_k - \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\hat{x}_{k-i}\right),$$

а из уравнения (6) – равенство

$$\left(a_{j,k}\hat{x}_{k-j}-a_{j,k-1}\hat{x}_{k-1-j}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}\hat{x}_{k-i}-\hat{x}_k\right)=h_k\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (2), находим величину оптимальной функции потерь:

$$\begin{gathered}J_{k,\text{опт}}\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)=\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right)^2+\left(\hat{x}_k-\tilde{x}_k\left(\mathbf{a}_{n,k}\right)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,k}\hat{x}_{k-i}-a_{i,k-1}\hat{x}_{k-1-i}\right)^2=\\=\left(1+nh_k^2\right)\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right)^2.\end{gathered}\tag{10}$$

Таким образом, качество оптимальной фильтрации при детерминированном подходе определяется квадратом величины невязки и является случайной функцией времени. Используя формулу (1), а также учитывая, что разность $x_k-\hat{x}_k=e_k$ есть ошибка фильтрации, формулу (10) можно представить в виде $J_{k,\text{опт}}\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)=\left(1+nh_k^2\right)\left(h_ke_k+v_k\right)^2$. Среднее значение этой величины по физическому смыслу близко к понятию дисперсии ошибки фильтрации $\sigma_e^2=\langle e_k\rangle^2$. Треугольные скобки обозначают операцию нахождения математического ожидания.

Уравнения трансверсального фильтра. Функцию экстраполяции также можно сформировать на основе предшествующих измерений по формуле

$$\hat{x}_k=h_k^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}z_{k-i}\;.\tag{11}$$

В результате функция потерь (2) будет выглядеть следующим образом:

$$J_k\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)=\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right)^2+\left(\hat{x}_k-h_k^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}z_{k-i}\right)^2+h_k^{-2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,k}z_{k-i}-a_{i,k-1}z_{k-1-i}\right)^2.$$

Уравнения оптимальности (3) приводятся к виду

$$\frac{\partial J_k\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)}{\partial\hat{x}_k}=-h_k\left(z_k-h_k\hat{x}_k\right)+\left(\hat{x}_k-h_k^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}z_{k-i}\right)=0,\tag{12}$$

$$\frac{\partial J_k\left(\hat{x}_k,\mathbf{a}_{n,k}\right)}{\partial a_{j,k}}=-\left(\hat{x}_k-h_k^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}z_{k-i}\right)+h_k^{-2}\left(a_{j,k}z_{k-j}-a_{j,k-1}z_{k-1-j}\right)=0,\ j=\overline{1,n}.\tag{13}$$

Из соотношения (13) следует уравнение оценки процесса

$$\hat{x}_k=k_{1,k}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}z_{k-i}+k_{0,k}z_k\,,\tag{14}$$

где коэффициенты усиления $k_{1,k}=h_k^{-1}\Big/\left(1+h_k^2\right)$, $k_{0,k}=h_k\Big/\left(1+h_k^2\right)$.

Структура уравнения оценки процесса (рис. 3) соответствует трансверсальному фильтру (с конечной памятью), оптимальные параметры которого определяются уравнениями

$$a_{j,k}z_{k-j} + h_k^2 k_{0,k}\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}z_{k-i} = a_{j,k-1}z_{k-1-j} + h_k^2 k_{0,k}z_k, \; j = \overline{1,n}\,. \tag{15}$$

Данные уравнения представляют собой систему линейных уравнений n-го порядка, решение которой позволяет находить значения $a_{i,k}z_{k-i}$, $i = \overline{1,n}$, и использовать их в уравнении оценки (14).

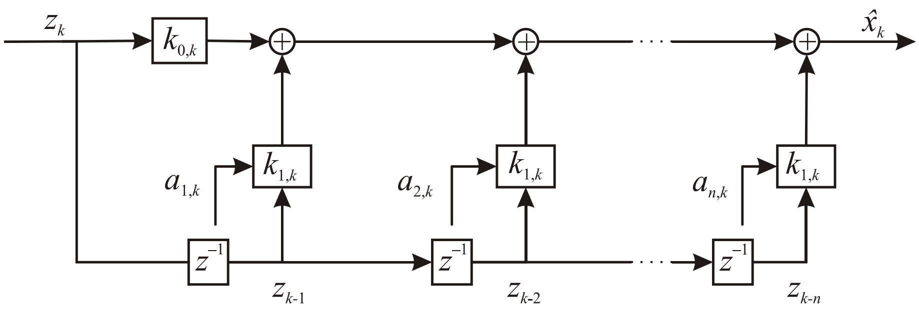

Рис. 3. Структура уравнения оценки процесса в адаптивном трансверсальном фильтре

Способом, изложенным в предыдущем разделе, можно получить следующее выражение для оптимальной величины функции потерь:

$$J_{k,\text{опт}}\left(\hat{x}_k, \mathbf{a}_{n,k}\right) = \left(1 + h_k^2 + nh_k^4\right)\left(z_k - h_k\hat{x}_k\right)^2 = \left(1 + h_k^2 + nh_k^4\right)\left(h_k e_k + v_k\right)^2, \tag{16}$$

где $e_k = x_k - \hat{x}_k$ – ошибка фильтрации. Как и в случае фильтра с обратной связью, величина функции потерь при детерминированном подходе пропорциональна квадрату невязки решения.

Результаты моделирования. Рассматривается задача, когда исходная случайная последовательность моделируется посредством стохастического конечно-разностного уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= a_{1,1}x_{1,k-1} + a_{1,2}x_{2,k-1} + w_{1,k}, \\ x_{2,k} &= a_{2,2}x_{1,k-1} + a_{2,2}x_{2,k-1} + w_{2,k}. \end{aligned} \tag{17}$$

В системе уравнений (17) $w_{1,k}$ и $w_{2,k}$ полагаются центрированными дискретными белыми шумами. При моделировании приняты следующие значения параметров: $a_{1,1} = 0{,}98$, $a_{1,2} = 0{,}8$, $w_{1,k} = 0$, $a_{2,1} = 0$, $a_{2,2} = 0{,}9$, а дисперсия белого шума $\sigma_{w,2}^2 = 0{,}04$. Соответственно, дисперсия процесса $x_{1,k}$ $\sigma_{1,k}^2 = 100$, а длительность корреляции $\tau_{1,k} = 50$. Измеряется лишь процесс $x_{1,k}$ согласно линейному уравнению

$$z_k = h_{1,k}x_{1,k} + v_{1,k}, \tag{18}$$

где шум измерений $v_{1,k}$ является центрированным дискретным белым шумом с дисперсией $\sigma_{v,1}^2 = 4$, а коэффициент $h_{1,k} = 1$.

Цель моделирования состояла в оценке потерь, которые имеют место за счет неучета априорной статистической информации. Для сравнения использовались результаты оценок ошибок фильтра Калмана (ФК) при известной априорной статистической информации. Известно, что в этом случае ФК дает оптимальные оценки по критерию минимума среднеквадратического отклонения (СКО) ошибки фильтрации $\sigma_{e,k}$. Для рассматриваемого примера на рис. 4 сплошной линией показана зависимость этой величины от времени. Стояла задача сравнения точности ФК и адаптивного фильтра при неизвестной модели процесса. Для этого проводилось моделирование в соответствии с уравнениями (7) и (8) при различных порядках экстраполятора $(n=1,\ 2,\ 3)$. Усреднение результатов осуществлялось по 1000 реализациям процесса изменения ошибки фильтрации $e_{1,k}$. Значения СКО $\sigma_{e,k}$ адаптивного фильтра в установившемся режиме при различных значениях n показаны на рис. 4.

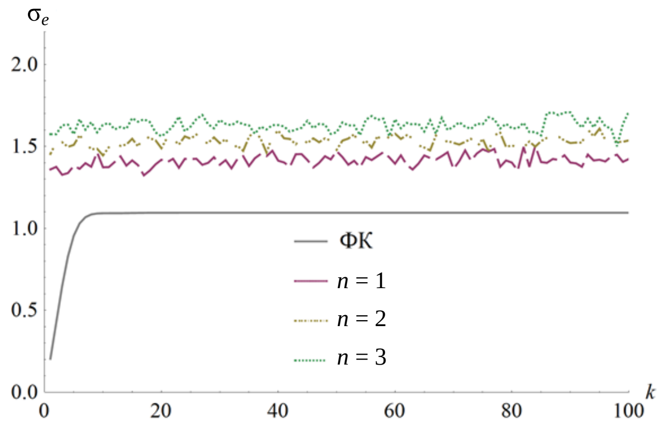

Рис. 4. Сравнительная оценка СКО $\sigma_{e,k}$ фильтра Калмана с адаптивным фильтром при различных значениях n порядка экстраполирующего полинома

Сравнение предлагаемого фильтра и ФК показывает, что ошибка адаптивного фильтра больше, чем у ФК. Это объясняется неучетом априорной информации. Наименьшее значение ошибок для данного конкретного примера имеет место при $n=1$. Как показывают результаты моделирования, при большей длительности корреляции $\tau_{1,k}$ минимальное СКО ошибки может оказаться при $n=2$. Минимум при $n=3$ встречается редко при очень больших длительностях корреляции.

Заключение. В работе предложен метод синтеза фильтров при отсутствии априорной статистической информации о характеристиках полезного сигнала и помех на основе детерминированного подхода, при котором используются лишь данные измерений, полученных ранее оценок и ограниченный объем эмпирической информации. Метод базируется на РМНК, позволяющем находить структуру рекуррентного оптимального фильтра и определять его параметры. Структура находится в классе фильтров, которые задаются видом функции экстраполяции, входящей в состав критерия оптимальности. Изучен вариант, когда эта функция является полиномом. В первом случае считается, что он зависит только от имеющихся предшествующих оценок процесса, и это приводит к структуре фильтра с обратной связью (бесконечной памятью). Во втором случае для формирования экстраполирующего полинома используются лишь предшествующие измерения и это приводит к структуре трансверсального фильтра (с конечной памятью). Параметры полиномов полагаются неизвестными, и их значения оцениваются в процессе фильтрации, что и делает фильтр адаптивным. На конкретном примере проведена сравнительная оценка точности адаптивного фильтра с результатами ФК. Оказалось, что СКО ошибок адаптивного фильтра больше, чем у ФК, примерно в полтора раза. Это является следствием неучета априорной статистической информации.

Список использованных источников

1. Haykin, S. S. Adaptive Filter Theory / S. S. Haykin. – N.J. : Prentice-Hall, 2002. – 936 p.

2. Фомин, В. М. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация / В. М. Фомин. – М. : Наука, 1984. – 388 с.

3. Mueller, M. S. Least-squares algorithms for adaptive equalizers / M. S. Mueller // The Bell System Technical Journal. – 1981. – Vol. 60. – P. 1905–1925.

4. Lev-Ari, H. Least-squares adaptive lattice and transversal filters: A unified geometric theory / H. Lev-Ari, T. Kailath, J. Cioffi // IEEE Transactions on Information Theory. – 1984. – Vol. 30. – P. 222–236.

5. Cioffi, J. M. Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering / J. M. Cioffi, T. Kailath // IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing. – 1984. – Vol. 32. – P. 304–337.

6. Luk, F. T. Analysis of a recursive least-squares signal-processing algorithm / F. T. Luk, S. Qiao // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1989. – Vol. 10. – P. 407–418.

7. Sayed, A. H. A state-space approach to adaptive RLS filtering / A. H. Sayed, T. Kailath // IEEE Signal Processing Magazine. – 1994. – Vol. 11. – P. 18–60.

8. Yang, B. A note on the error propagation analysis of recursive least squares algorithms / B. Yang // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1994. – Vol. 42. – P. 3523–3525.

9. Manolakis, D. G. Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering, and Array Processing / D. G. Manolakis, V. K. Ingle, S. M. Kogon. – Boston : McGraw-Hill, 2000. – 796 p.

10. Артемьев, В. М. Линейная фильтрация многомерных случайных последовательностей расширенным методом наименьших квадратов / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Информатика. – 2016. – № 4(52). – С. 20–25.

11. Артемьев, В. М. Нелинейная фильтрация случайных последовательностей расширенным методом наименьших квадратов / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 60–69.

12. Цыпкин, Я. З. Оптимизация в условиях неопределенности / Я. З. Цыпкин // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 228, № 6. – С. 1306–1309.

13. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон. – М. : Мир, 1976. – 755 с.

References

1. Haykin S. S. *Adaptive Filter Theory*. N.J., Prentice-Hall, 2002, 936 p.

2. Fomin V. M. Rekurrentnoe otsenivanie i adaptivnaya fil’tratsiya. *Recurrent Estimation and Adaptive Filtering*. Moscow, Nauka Publ., 1984, 388 p. (in Russian).

3. Mueller M. S. Least-squares algorithms for adaptive equalizers. *The Bell System Technical Journal*, 1981, vol. 60, pp. 1905–1925. doi: 10.1002/j.1538-7305.1981.tb00302.x

4. Lev-Ari H., Kailath T., Cioffi J. Least-squares adaptive lattice and transversal filters: A unified geometric theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1984, vol. 30, pp. 222–236. doi: 10.1109/tit.1984.1056882

5. Cioffi J. M., Kailath T. Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 1984, vol. 32, pp. 304–337. doi: 10.1109/tassp.1984.1164334

6. Luk F. T., Qiao S. Analysis of a recursive least-squares signal-processing algorithm. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1989, vol. 10, pp. 407–418. doi: 10.1137/0910027

7. Sayed A. H., Kailath T. A state-space approach to adaptive RLS filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1994, vol. 11, pp. 18–60. doi: 10.1109/79.295229

8. Yang B. A note on the error propagation analysis of recursive least squares algorithms. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1994, vol. 42, pp. 3523–3525. doi: 10.1109/78.340788

9. Manolakis D. G., Ingle V. K., Kogon S. M. *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering, and Array Processing*. Boston, McGraw-Hill, 2000, 796 p.

10. Artem’ev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Lineynaya fil’tratsiya mnogomernykh sluchaynykh posledovatel’nostey rasshirennym metodom naimen’shikh kvadratov [Linear filtering of random sequences using a least squares method with regularization]. Informatika [*Informatics*], 2016, no. 4(52), pp. 20–25 (in Russian).

11. Artem’ev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Nelineynaya fil’tratciya sluchaynykh posledovatel’nostey rasshirennym metodom naimen’shikh kvadratov [Nonlinear filtering of random sequences with extended least-squares method]. Informatika [*Informatics*], 2018, vol. 15, no. 1, pp. 60–69 (in Russian).

12. Tsypkin Ia. Z. Optimizatsiya v usloviyakh neopredelennosti [Optimization in the conditions of uncertainty]. Doklady AN SSSR [*Proc. of the Academy of Sciences of the USSR*], 1976, vol. 228, no. 6, pp. 1306–1309 (in Russian).

13. Anderson T. Statisticheskiy analiz vremennykh ryadov. *Statistical Analysis of Time Series*. Moscow, Mir Publ., 1976, 755 p. (in Russian).

Информация об авторах

Артемьев Валентин Михайлович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

Наумов Александр Олегович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

Кохан Леонид Леонидович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by

Information about the authors

Valentin M. Artemiev – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

Alexander O. Naumov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

Leonid L. Kokhan – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by