

ISSN 1816-0301 (print)

**ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ, РЕЧИ И ТЕКСТА***SIGNAL, IMAGE, SPEECH AND TEXT PROCESSING*

УДК 004.942

Поступила в редакцию 01.11.2017

Received 01.11.2017

**В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан***Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь***НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ  
РАСШИРЕННЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

**Аннотация.** Предлагается расширенный метод наименьших квадратов для решения задачи нелинейной фильтрации случайных последовательностей. В полученных уравнениях квазиоптимального фильтра используется линеаризация лишь нелинейной векторной функции измерений. Коэффициенты усиления фильтра находятся по формулам и не требуют решения дополнительных уравнений, как у расширенного фильтра Калмана. В сравнении с ним реализация предлагаемого фильтра обладает меньшей вычислительной трудоемкостью. Приводятся примеры сравнительной оценки точности предложенного фильтра с расширенным фильтром Калмана.

**Ключевые слова:** нелинейная фильтрация, расширенный фильтр Калмана, расширенный метод наименьших квадратов, случайные последовательности

**Для цитирования.** Артемьев, В. М. Нелинейная фильтрация случайных последовательностей расширенным методом наименьших квадратов / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 60–69.

**V. M. Artemiev, A. O. Naumov, L. L. Kokhan***Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***NONLINEAR FILTERING OF RANDOM SEQUENCES  
WITH EXTENDED LEAST-SQUARE METHOD**

**Abstract.** For nonlinear random sequences filtering the extended least-square method is proposed. The received suboptimal filter equations include linearization for nonlinear measurement function only. The filter gain coefficient can be calculated by formulas without solving additional equations as in extended Kalman filter. In comparison with the extended Kalman filter, the implementation of the proposed filter has less computational complexity. Examples of a comparative accuracy evaluation of the proposed filter with the extended Kalman filter are given.

**Keywords:** nonlinear filtering, extended least-square method, extended Kalman, filter random sequences

**For citation.** Artemiev V. M., Naumov A. O., Kokhan L. L. Nonlinear Filtering of a Random Sequences with Extended Least-Square Method. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 1, pp. 60–69 (in Russian).

**Введение.** Наиболее распространенным методом фильтрации случайных последовательностей является дискретный фильтр Калмана, позволяющий находить оптимальные линейные и квазиоптимальные нелинейные алгоритмы [1]. Их отличает высокая вычислительная трудоемкость, особенно в нелинейных задачах при использовании расширенного фильтра Калмана (РФК), и тем не менее этот подход на практике наиболее предпочтителен [2]. Его наибольшая вычислительная сложность связана с обращением матриц и решением ковариационного уравнения. Трудоемкость вычислений принято оценивать числом элементарных операций, необхо-

димых для решения задачи за один шаг вычислений [3]. Эта величина при больших размерностях задачи ограничивает возможности реализации фильтра Калмана в реальном масштабе времени.

Меньшей вычислительной сложностью обладает рекуррентный метод наименьших квадратов, для реализации которого необходим меньший объем априорной информации [4]. Однако и в этом случае в процессе фильтрации требуется решение ковариационного уравнения, что также приводит к затруднениям при его использовании в реальном масштабе времени. Кроме того, следует отметить, что применение рекуррентного метода наименьших квадратов в нелинейных задачах в литературе не отражено.

В настоящей работе предлагается расширенный метод наименьших квадратов, дающий возможность квазиоптимального нахождения алгоритмов фильтрации без решения дополнительных уравнений. Синтез линейных фильтров на основе этого метода исследован в статье [5]. Его сущность состоит в расширении функционала потерь метода наименьших квадратов путем добавления слагаемого, дающего возможность непосредственно получать рекуррентные алгоритмы с коэффициентами усиления, которые находятся по формулам без решения дополнительного уравнения, как это имеет место в рекуррентном методе наименьших квадратов. Кроме того, расширенный метод наименьших квадратов дает возможность использования способов линеаризации нелинейных функций, что позволяет получать уравнения квазиоптимальных нелинейных фильтров в конечном виде.

В работе рассматриваются задачи фильтрации с нелинейной моделью исходных процессов в пространстве состояний при линейных измерениях и общий случай нелинейных моделей процессов и измерений. Такое разделение задач обусловлено тем, что в первом случае уравнения оптимального фильтра находятся точно, а во втором уравнения получаются квазиоптимальными в рамках линеаризации лишь нелинейной функции измерений. В примерах дается сравнительная оценка точности рассматриваемых фильтров с результатами, полученными на основе РФК.

**Формулировка задачи.** Предполагается, что исходная случайная последовательность описывается нелинейным стохастическим конечно-разностным уравнением вида

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  – дискретное время;  $\mathbf{x}_k = [x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{m,k}]^T$  –  $m$ -мерный вектор исходной последовательности;  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_{k-1}) = [a_{1,k}(x_{1,k-1}), a_{2,k}(x_{2,k-1}), \dots, a_{m,k}(x_{m,k-1})]^T$  – нелинейная векторная функция;  $\mathbf{u}_k$  – регулярная составляющая;  $\mathbf{w}_k = [w_{1,k}, w_{2,k}, \dots, w_{m,k}]^T$  – случайная составляющая формирующего воздействия. Вектор  $\mathbf{w}_k$  полагается центрированным дискретным белым шумом с ковариационной матрицей  $Q_k$ .

Измерения описываются нелинейным уравнением

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

где  $\mathbf{z}_k = [z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{n,k}]^T$  –  $n$ -мерный вектор измерений;  $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) = [h_{1,k}(\mathbf{x}_k), h_{2,k}(\mathbf{x}_k), \dots, h_{n,k}(\mathbf{x}_k)]^T$  – нелинейная векторная функция измерений;  $\mathbf{v}_k = [v_{1,k}, v_{2,k}, \dots, v_{n,k}]^T$  – вектор ошибок измерений (шумов) в виде центрированного белого шума с ковариационной матрицей  $R_k$ . Векторы  $\mathbf{w}_k$  и  $\mathbf{v}_k$  полагаются статистически независимыми.

Задача состоит в нахождении уравнений для текущей оценки  $\hat{\mathbf{x}}_k = [\hat{x}_{1,k}, \hat{x}_{2,k}, \dots, \hat{x}_{m,k}]^T$  вектора исходного процесса  $\mathbf{x}_k$  на основе моделей (1), (2) и выбранного критерия оптимальности расширенного метода наименьших квадратов, который определяется как минимум некоторого

функционала потерь  $J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)$ . Для классического метода наименьших квадратов в задачах оценивания в качестве функционала используется взвешенная квадратичная форма невязки  $(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k))^T R_k^{-1}(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k))$ , зависящая от текущих измерений  $\mathbf{z}_k$  и оценок  $\hat{\mathbf{x}}_k$ . Для получения рекуррентных оценок необходимо расширить функционал потерь путем включения в его состав слагаемого, зависящего от оценок в предыдущий момент времени. Вариантом может быть квадратичная форма вида  $(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k)^T Q_k^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k)$ , смысл которой состоит в том, что текущая оценка  $\hat{\mathbf{x}}_k$  согласуется с предыдущей  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  путем ее экстраполяции на следующий шаг измерений исходя из модели процесса (1). В результате функционал текущих потерь расширенного метода наименьших квадратов выглядит следующим образом:

$$J_k(\hat{\mathbf{x}}_k) = (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k))^T R_k^{-1}(\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k)) + (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k)^T Q_k^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k). \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое учитывает влияние измерений на получение текущей оценки, а второе позволяет согласовать ее с оценкой на предыдущем шаге фильтрации. Критерий оптимальности задается минимумом функционала потерь  $\min_{\hat{\mathbf{x}}_k} J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)$ , необходимое условие которого определяется уравнением оптимальности

$$\frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} = 0. \quad (4)$$

Из него находится уравнение фильтра наименьших квадратов (ФНК).

Ниже рассматриваются два варианта задачи: нелинейная фильтрация при линейном уравнении измерений и нелинейная в общем случае.

**Уравнение оптимального нелинейного ФНК при линейных измерениях.** Исходные модели (1), (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

При этом уравнение функционала потерь (3) запишется как

$$J_k(\hat{\mathbf{x}}_k) = (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k)^T R_k^{-1}(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k) + (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k)^T Q_k^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k). \quad (5)$$

Соответствующее уравнение оптимальности (4) принимает вид

$$\frac{\partial J_k(\hat{\mathbf{x}}_k)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_k} = -2H_k^T R_k^{-1}(\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k) + 2Q_k^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k) = 0. \quad (6)$$

Решая его, получим уравнение ФНК:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = K_{1,k} [\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k] + K_{0,k} \mathbf{z}_k, \quad (7)$$

где коэффициент усиления  $K_{1,k}$ , являющийся матрицей размерности  $m \times m$ , находится из выражения

$$K_{1,k} = L_k Q_k^{-1}, \quad (8)$$

а коэффициент  $K_{0,k}$  размерности  $m \times n$  определяется равенством

$$K_{0,k} = L_k H_k^T R_k^{-1}. \quad (9)$$

В формулах (5)–(9) используется обозначение  $Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k = L_k^{-1}$ . С помощью леммы матричного тождества [6]  $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$  можно получить  $L_k = (Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} = \left[ I - Q_k H_k^T (R_k + H_k Q_k H_k^T)^{-1} H_k \right] Q_k$ , где  $I$  обозначает единичную матрицу. В линейном случае в уравнении ФНК (7) вместо вектора  $\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$  используется выражение  $A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ , где  $A_k$  есть  $m \times m$  переходная матрица модели исходного процесса (1). Этот случай рассмотрен в работе [5].

Уравнения нелинейного ФНК при линейных измерениях имеют точное выражение в отличие от РФК, где оно находится в линейном приближении. Вычислительные затраты нахождения оценки (7) и коэффициентов усиления (8), (9) приблизительно равны  $2m^3 + n^3 + m^2 + mn$ , что меньше, чем у РФК, поскольку ФНК не требует решения уравнения для ковариационной матрицы.

Из уравнения (6) следует равенство

$$Q_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k) = H_k^T R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k).$$

Домножив его слева на вектор  $(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k)^T$  и подставив правую часть нового равенства вместо второго слагаемого в выражение для функционала потерь (5), находим величину текущих потерь в оптимальном ФНК:

$$J_{k,\text{опт}}(\hat{\mathbf{x}}_k) = (\mathbf{z}_k - H_k (\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k))^T R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - H_k \hat{\mathbf{x}}_k). \quad (10)$$

При статистическом подходе к задаче фильтрации качество принято оценивать величинами математического ожидания и дисперсий ошибок фильтрации. В линейном случае оптимальным по критерию минимума дисперсий ошибок является фильтр Калмана. Очевидно, что при одинаковых исходных данных дисперсия ошибки ФНК будет больше, чем у фильтра Калмана, что является «платой» за выигрыш в трудоемкости. Представляет интерес сравнение точности нелинейных фильтров по этому критерию.

Ошибка фильтрации  $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$ . После подстановки выражений (1) и (7) уравнение ошибки имеет вид

$$\mathbf{e}_k = (I - K_{0,k} H_k) (\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k) - K_{1,k} (\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k) + (\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k) \mathbf{w}_k - K_{0,k} \mathbf{v}_k.$$

С учетом формулы (9) матрица  $(I - K_{0,k} H_k)$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} (I - K_{0,k} H_k) &= (Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1})^{-1} (Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1}) \left[ I - (Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} H_k^T R_k^{-1} H_k \right] = \\ &= (Q_k^{-1} + H_k^T R_k^{-1} H_k)^{-1} Q_k^{-1} = L_k^{-1} Q_k^{-1} = K_{1,k}. \end{aligned}$$

В итоге выражение для ошибки фильтрации принимает вид

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k = K_{1,k} (\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})) + K_{1,k} \mathbf{w}_k - K_{0,k} \mathbf{v}_k. \quad (11)$$

Это уравнение нелинейное и получить в конечном виде выражения для математического ожидания и ковариационной матрицы ошибки фильтрации нельзя. Для приближенного решения можно воспользоваться разложением функции  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_{k-1})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  и ограничиться линейными членами этого разложения, т. е. полагать

$$\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_{k-1}) \approx \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (12)$$

где  $A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$  есть матрица Якоби.

В результате получается линейризованное уравнение ошибки

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = K_{1,k} A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tilde{\mathbf{e}}_{k-1} + K_{1,k} \mathbf{w}_k - K_{0,k} \mathbf{v}_k.$$

При нулевых математических ожиданиях  $\langle w_k \rangle = \langle v_k \rangle = 0$  приближенные уравнения для математического ожидания и ковариационной матрицы ошибок фильтрации находятся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{m}}_{e,k} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle = K_{1,k} A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tilde{\mathbf{m}}_{e,k-1}, \\ \tilde{P}_{e,k} &= \langle (\tilde{\mathbf{e}}_k - \tilde{\mathbf{m}}_{e,k})(\tilde{\mathbf{e}}_k - \tilde{\mathbf{m}}_{e,k})^T \rangle = \\ &= K_{1,k} A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tilde{P}_{e,k-1} (A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T K_{1,k}^T + K_{1,k} Q_k K_{1,k}^T + K_{0,k} R_k K_{0,k}^T. \end{aligned}$$

Здесь и далее треугольные скобки обозначают операцию нахождения математического ожидания. В отличие от линейного ФНК эти уравнения должны решаться совместно с уравнением оценки (7) для нахождения  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ , что является следствием нелинейного характера задачи. Заметим, что для нахождения коэффициентов усиления ФНК не требуется решения этих уравнений.

**Уравнение квазиоптимального нелинейного ФНК в общем случае.** В том случае, когда модели исходного процесса и измерений нелинейные, необходимо использовать общий вид уравнения функционала потерь (3). При этом нахождение уравнения ФНК в явном виде возможно лишь при линейризации векторной функции измерений  $\mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_k)$ , т. е. такой фильтр будет квазиоптимальным. Линейное приближение в окрестности точки  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$  на основе ряда Тейлора представляется формулой

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) \approx \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}), \quad (13)$$

где  $H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})$  – матрица Якоби.

После подстановки формулы (13) в (3) получается следующее уравнение функционала потерь:

$$\begin{aligned} J_k(\hat{\mathbf{x}}_k) &= (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T R_k^{-1} \times \\ &\times (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})) + \\ &+ (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k)^T Q_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (14)$$

Исходя из уравнения оптимальности (4) приходим к равенству

$$\begin{aligned} (H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\hat{\mathbf{x}}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})) = \\ = Q_k^{-1} (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Его решение приводит к квазиоптимальному нелинейному уравнению ФНК

$$\hat{\mathbf{x}}_k = K_{2,k} + K_{1,k} (\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k) + K_{0,k} \mathbf{z}_k.$$

Здесь коэффициенты  $K_{i,k}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , зависят от  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ :

$$K_{2,k} = B_k (H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T R_k^{-1} (H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})); \quad (16)$$

$$K_{1,k} = B_k Q_k^{-1}; \quad (17)$$

$$K_{0,k} = B_k (H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T R_k^{-1}, \quad (18)$$

где матрицу  $B_k$  в соответствии с леммой матричного тождества можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} B_k &= \left[ Q_k^{-1} + (H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T R_k^{-1} (H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})) \right]^{-1} = \\ &= \left[ I - Q_k H_k'^T (R_k + H'_k Q_k H_k'^T)^{-1} H'_k \right] Q_k. \end{aligned}$$

Используя равенство (15) и уравнение (14), получаем величину текущих потерь в квазиоптимальном фильтре

$$\begin{aligned} J_{k,\text{опт}}(\hat{\mathbf{x}}_k) &= (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T \times \\ &\times R_k^{-1} (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})(\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})). \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом линеаризации функции  $\mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k)$  по формуле (12) приближенная величина ошибки фильтрации  $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$  вычисляется как

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = K_{1,k} A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tilde{\mathbf{e}}_{k-1} + K_{1,k} \mathbf{w}_k - K_{0,k} \mathbf{v}_k - K_{2,k} - K_{0,k} (\mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}).$$

Отсюда находятся уравнения для математического ожидания

$$\tilde{\mathbf{m}}_{e,k} = K_{1,k} A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tilde{\mathbf{m}}_{e,k-1} - K_{2,k} - K_{0,k} (\mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - H'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1})\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (20)$$

и ковариационной матрицы ошибок фильтрации

$$\tilde{P}_{e,k} = K_{1,k} A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \tilde{P}_{e,k-1} (A'_k(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}))^T K_{1,k}^T + K_{1,k} Q_k K_{1,k}^T + K_{0,k} R_k K_{0,k}^T. \quad (21)$$

Таким образом, квазиоптимальное нелинейное уравнение ФНК требует линеаризации лишь функции измерений  $h_k(\mathbf{x}_k)$ , что отличает его от соответствующего уравнения РФК. Вычислительная трудоемкость в ФНК меньше, чем у РФК, так как коэффициенты усиления находятся по формулам, не требующим решения дополнительного уравнения.

**Пример.** Рассматривается случайная последовательность, задаваемая линейным стохастическим конечно-разностным уравнением второго порядка ( $m = 2$ ,  $u_k = 0$ ,  $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k$ ), являющимся частным случаем уравнения (1). Значения элементов матрицы  $A$  выбраны следующими:  $a_{1,1} = 0,45$ ,  $a_{1,2} = 0,4$ ,  $a_{2,1} = 0,4$ ,  $a_{2,2} = 0,4$ . Дисперсии формирующих белых шумов  $\mathbf{w}_k$  выбраны таким образом, чтобы среднеквадратические отклонения (СКО) процессов  $x_{1,k}$  и  $x_{2,k}$  в установившемся режиме были равны  $\sigma_{x_1} = 1$ ,  $\sigma_{x_2} = 0,5$ . Одномерное ( $n = 1$ ) уравнение измерений (2) полагается нелинейным  $z_{1,k} = h_1(x_{1,k}) + v_{1,k}$ . СКО шума измерений  $v_{1,k}$  выбирается по формуле  $\sigma_{v_1} = \sigma_{x_1}/q$ , где  $q$  есть отношение сигнала к шумам.

Задача состоит в нахождении ошибок фильтрации в установившемся режиме для фильтров ФНК и РФК. Рассматриваются два типа нелинейных функций  $h_1(x_{1,k})$ .

В первом случае выбрана функция типа «ограничение» с уравнением

$$h(x) = \frac{\alpha x}{\sqrt{1 + \beta^2 x^2}}.$$

График этой функции показан на рис. 1 для значений  $\alpha = 0,83$ ,  $\beta = 0,1$ .

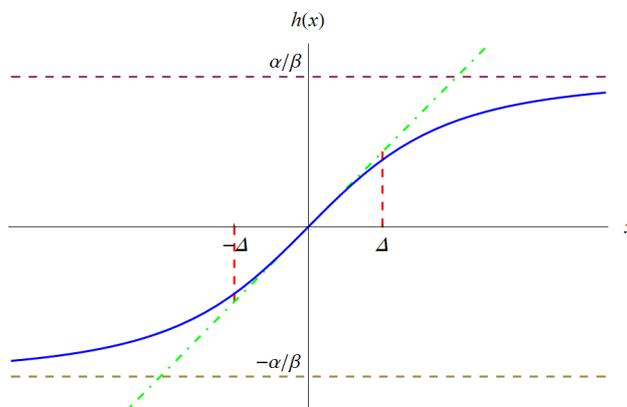


Рис. 1. Нелинейная функция типа «ограничение»

Заметим, что при малых значениях  $x$  функция  $h(x)$  аппроксимируется линейной  $\alpha x$ , а при больших значениях стремится к величинам  $\pm\alpha/\beta$ . При нулевом математическом ожидании входного процесса вероятность его значений концентрируется в окрестности точки  $x = 0$ , для которой можно определить «зону линейности» функции  $h(x)$ , задаваясь допустимой относительной разностью между линейной функцией и нелинейной  $(\alpha x - h(x))/\alpha x$ . При разности, равной 0,1, получаем формулу для размера зоны линейности  $\Delta = 0,48/\beta$ .

На рис. 2 изображены графики изменения СКО ошибки фильтрации для ФНК и РФК при различных значениях  $\Delta$  и отношении сигнала к шумам  $q = 5$ .

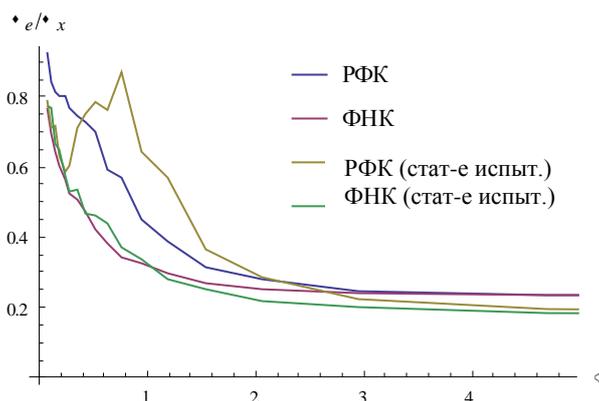


Рис. 2. СКО ошибок фильтрации при наличии ограничения

Кривыми коричневого и зеленого цветов показаны изменения СКО для РФК и ФНК соответственно, полученные методом Монте-Карло по 1000 реализациям. Кривыми синего и красного цветов показаны значения СКО для РФК и ФНК, полученные аналитически и приближенно отображающие дисперсии ошибок фильтрации. Следует отметить, что при малых значениях  $\Delta$  ошибки РФК, полученные методом Монте-Карло, значительно возрастают, что подтверждалось неоднократным моделированием. Это говорит о том, что для данного типа нелинейности при малых значениях зоны линейности РФК работает с большими ошибками.

Во втором примере рассмотрена нелинейная функция типа «зона нечувствительности» с уравнением

$$h(x) = \frac{\alpha x^3}{\beta^2 + x^2}.$$

Эта функция при  $\alpha = 0,83$  и  $\beta = 5$  изображена на рис. 3. При малых значениях  $x$  она имеет зону нечувствительности, а при  $x \gg \beta$  функция  $h(x)$  линеаризуется, стремясь к  $\alpha x$ . Величину зоны нечувствительности данной функции, как и выше, можно оценить посредством значения относительной ошибки  $(\alpha x - h(x))/\alpha x$  в точке, где функция становится близкой к линейной. При заданной ошибке 0,1 величина зоны нелинейности находится по формуле  $\Delta = 3\beta$  (рис. 3).

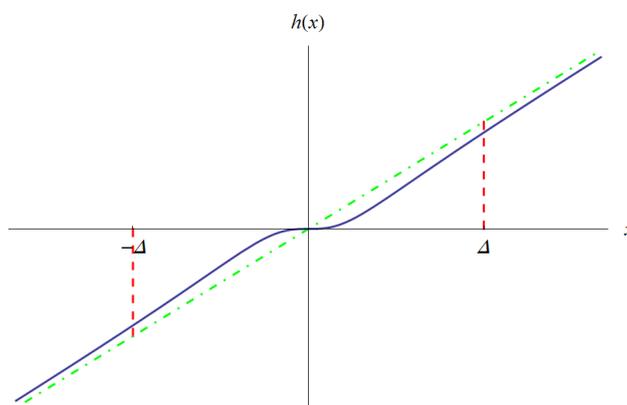


Рис. 3. Нелинейная функция типа «зона нечувствительности»

На рис. 4 изображены графики изменения СКО ошибки фильтрации для РФК и ФНК при отношении сигнала к шумам  $q = 5$ .

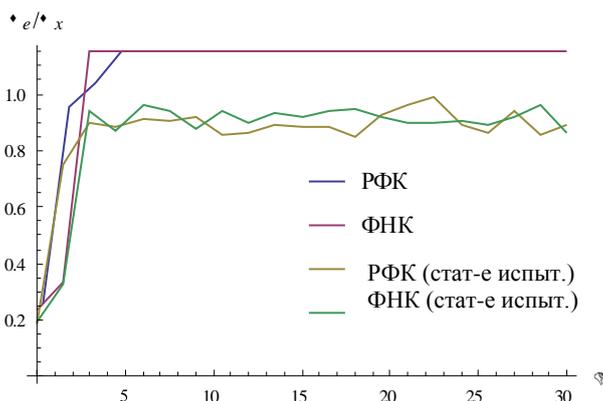


Рис. 4. СКО ошибок фильтрации при наличии зоны нечувствительности

Коричневым и зеленым цветами для РФК и ФНК показаны графики зависимости СКО, полученные методом Монте-Карло. Синим и красным цветами показаны СКО этих фильтров, полученные путем решения соответствующих ковариационных уравнений.

Результаты решения примеров методом статистических испытаний показывают, что ошибки фильтрации РФК и ФНК мало отличаются друг от друга. Аналитические оценки значений СКО также близки друг к другу, однако отличаются от результатов моделирования в сторону увеличения. Отличие обусловлено тем, что соответствующие ковариационные уравнения ошибок являются приближенными. Сравнительные результаты моделирования РФК и ФНК показывают, что вычислительные затраты в первом случае примерно в два раза выше, чем у ФНК.

**Заключение.** Оптимальная нелинейная фильтрация случайных последовательностей является сложной задачей, и точное ее решение в общем случае невозможно. Для нахождения квазиоптимальных алгоритмов фильтрации чаще всего используют линейризованные алгоритмы, из которых наиболее распространенным является расширенный фильтр Калмана. Его недостаток состоит в высокой вычислительной трудоемкости, обусловленной необходимостью решения в реальном масштабе времени ковариационного уравнения ошибки фильтрации. В статье рассмотрен метод решения на основе расширенного метода наименьших квадратов, требующий линейризации лишь нелинейной векторной функции измерений. По своей вычислительной трудоемкости он в несколько раз меньше, чем расширенный фильтр Калмана, поскольку коэффициенты усиления фильтра находятся непосредственно по формулам и не требуют решения дополнительного уравнения в процессе фильтрации. Сравнительная оценка точности обоих типов фильтров показана на примере, из которого следует, что ошибки фильтрации в этих случаях мало отличаются друг от друга. Использование методологии синтеза фильтра на основе расширенного метода наименьших квадратов особенно эффективно в задачах высокой размерности, когда реализация расширенного фильтра Калмана в реальном масштабе времени вызывает большие вычислительные сложности.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф16-063.

#### Список использованных источников

1. Jazwinski, A. H. Stochastic Processes and Filtering Theory / A. H. Jazwinski. – N.Y.: Academic Press, 1970. – 362 p.
2. Справочник по теории автоматического управления / под. ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 711 с.
3. Mandel, I. M. Computational requirements for a discrete Kalman filter / I. M. Mandel // IEEE Trans. Autom. Control. – 1971. – Vol. AC-16. – P. 748–758.
4. Адаптивные фильтры / под. ред. П. Н. Гранта, К. Ф. Коузана. – М.: Мир, 1988. – 388 с.
5. Артемьев, В. М. Линейная фильтрация многомерных случайных последовательностей расширенным методом наименьших квадратов / В. М. Артемьев, А. О. Наумов, Л. Л. Кохан // Информатика. – 2016. – № 4(52). – С. 20–25.
6. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

**Информация об авторах**

*Артемьев Валентин Михайлович* – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, Минск, Республика Беларусь). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

*Наумов Александр Олегович* – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, Минск, Республика Беларусь). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

*Кохан Леонид Леонидович* – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики НАН Беларуси (ул. Академическая, 16, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by

**Information about the authors**

*Valentin M. Artemiev* – Corresponding Members of National Academy of Sciences of Belarus, D. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: artemiev@iaph.bas-net.by

*Alexander O. Naumov* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: naumov@iaph.bas-net.by

*Leonid L. Kokhan* – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kokhanll@iaph.bas-net.by