ISSN 1816-0301 (print)
УДК 519.61; 004.93'1; 004.932

Поступила в редакцию 19.12.2017
Received 19.12.2017

**В. М. Демко**

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

# ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОБСТВЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ВРАЩЕНИЯ

**Аннотация.** Приводится математическое обоснование алгоритма синтеза собственного преобразования и нахождения формулы собственных значений персимметричной матрицы размерности $N = 2^k$ ($k = \overline{1, 4}$) на основе ортогональных операторов вращения. Предложенный алгоритм позволил усовершенствовать разработанный автором подход к вычислению собственных значений на основе численных примеров для максимальной размерности матриц $64 \times 64$, в результате чего удалось получить аналитические соотношения для вычисления собственных значений персимметричной матрицы. Показывается, что собственное преобразование имеет факторизованную структуру в виде произведения операторов вращения, каждый из которых является прямой суммой элементарных матриц вращения Гивенса и Якоби.

**Ключевые слова:** персимметричная матрица, собственные значения, операторы вращения

**Для цитирования.** Демко, В. М. Ортогональное представление собственного преобразования персимметричной матрицы на основе операторов вращения / В. М. Демко // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 34–50.

**V. M. Demko**

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

# ORTHOGONAL REPRESENTATION OF THE PROPER TRANSFORMATION OF A PERSYMMETRIC MATRIX BASED ON ROTATION OPERATORS

**Abstract.** The mathematical substantiation of the algorithm for synthesis of the proper transformation and finding the eigenvalue formulae of a persymmetric matrix of dimension $N = 2^k$ ($k = \overline{1, 4}$) based on orthogonal rotation operators is given. The proposed algorithm made it possible to improve the author's approach to calculating eigenvalues based on numerical examples for the maximal dimension of matrices 64×64, resulting the possibility to obtain analytical relations for calculating the eigenvalues of the persymmetric matrix. It is shown that the proper transformation has a factorized structure in the form of a product of rotation operators, each of which is a direct sum of elementary Givens and Jacobian rotation matrices.

**Keywords:** persymmetric matrix, eigenvalues, rotation operators

**For citation.** Demko V. M. Orthogonal Representation of the Proper Transformation of a Persymmetric Matrix Based on Rotation Operators. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 1, pp. 34–50 (in Russian).

**Введение.** Решение задачи анализа случайных процессов непосредственно связано с задачей определения собственных функций и значений симметричной матрицы. В частном случае для процессов, описываемых статистикой в виде матриц ковариаций, проблема нахождения оптимального базиса решается на основе интегрального уравнения Фредгольма второго рода, матричная форма которого известна как уравнение Карунена – Лоэва:

$$\Psi^T R \Psi = \left[d_{ij}\delta_{ij}\right]_{N\times N},$$

где $R$ – матрица ковариаций, $\Psi$ – базис собственных функций, $\left[d_{ij}\delta_{ij}\right]_{N\times N}$ – диагональная матрица собственных значений.

Вопросы диагонализации симметричных матриц рассмотрены в ряде работ. В частности, в [1] предложен один из эффективных *QL*-алгоритмов, который требует предварительного приведения исходной матрицы к трехдиагональной форме. В частном случае персимметричной матрицы (где симметрия имеет место и относительно побочной диагонали) *QL*-алгоритм является избыточным. Кроме того, в *QL*-алгоритме используются преобразования подобия довольно сложной структуры, которые не позволяют эффективно организовать вычислительный процесс при реализации собственного базиса.

В настоящей статье представлен алгоритм синтеза собственного преобразования и нахождения формулы собственных значений персимметричной матрицы размерности $N = 2^k$ ($k = \overline{1, 4}$) на основе ортогональных операторов вращения.

**Операторы вращения и их свойства.** Оператор вращения – это матрица размерности $n \times n,\ n = 2^i$ ($i = 2, 4, \ldots, N$), которая является прямой суммой элементарных матриц вращения Гивенса и Якоби.

Рассмотрим операторы вращения следующего вида:

$$H^{(n)} = \sqrt{2}/2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ & & 1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & -1 & & \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & -1 \end{array}\right]_{n\times n}, \quad \overline{H}^{(n)} = \sqrt{2}/2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ & & -1 & 1 & & \\ \hline & & 1 & 1 & & \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & & & 0 & 1 \end{array}\right]_{n\times n},$$

$$G^{(n)} = \sqrt{2}/2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \ddots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \ddots & & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]_{n\times n}, \quad T^{(n)} = \left[\begin{array}{cc|cc} c_k & 0 & 0 & s_k \\ \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ 0 & c_k & s_k & 0 \\ \hline 0 & s_k & -c_k & 0 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots \\ s_k & 0 & 0 & -c_k \end{array}\right]_{n\times n}, \qquad (1)$$

$$\overline{T}^{(n)} = \left[\begin{array}{cc|cc} s_k & 0 & 0 & c_k \\ \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ 0 & s_k & c_k & 0 \\ \hline 0 & c_k & -s_k & 0 \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots \\ c_k & 0 & 0 & -s_k \end{array}\right]_{n\times n}, \quad H_j^{(N)} = \left[H^{(n)} \oplus \cdots \oplus H^{(n)}\right]_{N\times N},$$

$$G_j^{(N)} = \left[G^{(n)} \oplus \cdots \oplus G^{(n)}\right]_{N\times N}, \quad T_j^{(N)} = \left[T^{(n)} \oplus \cdots \oplus T^{(n)}\right]_{N\times N},$$

где $c_k = \cos\alpha_k$; $s_k = \sin\alpha_k$; $j = N/n$ – количество подматриц в операторах $H_j^{(N)}$, $G_j^{(N)}$, $T_j^{(N)}$; $n$ – размерность подматриц ($n = 2, 4, \ldots, N/2$); $\oplus$ – символ прямой суммы матриц.

Из выражений (1) видно, что операторы $H^{(n)}$, $\overline{H}^{(n)}$ и $\overline{T}^{(n)}$ представляют собой частный случай оператора $T^{(n)}$, в частности $H^{(n)} = T^{(n)}$, а $\overline{H}^{(n)} = \overline{T}^{(n)}$ при $c_k = s_k = \sqrt{2}/2$, $\alpha_k = \pi/4$. Таким образом, имеем два основных типа операторов вращения $G^{(n)}$ и $T^{(n)}$, которые обозначим как $G$ и $T$.

Необходимо отметить следующие важные свойства операторов вращения:

1) операторы $G$ и $T$ представляют собой преобразования подобия, так как сохраняют симметрию исходной матрицы $R$ относительно главной диагонали, т. е. матрицы $GRG$ и $TRT$ также являются симметричными;

2) операторы $G$ и $T$ ортогональные, что следует из ортогональности элементарных матриц вращения, т. е. $G^{-1} = G^T$ и $T^{-1} = T^T$. Кроме того, из (1) следует, что $G^T = G$, $T^T = T$ ($T$ – символ транспонирования);

3) элементарные матрицы вращения, из которых состоят операторы $G$ и $T$, в отличие от известных алгоритмов (метода вращений, *QL*-алгоритма [1]) не коммутируют между собой.

**Алгоритм ортогонального представления собственного преобразования персимметричной матрицы на основе операторов вращения.** Известно [2], что всякая персимметричная матрица $P$ размерности $N = 2^i$ ортогональным преобразованием подобия $H^{(N)}$ приводится к блочно-диагональному виду с блоками $P_1$, $P_2$ размерности $N/2$, т. е.

$$H^{(N)} P H^{(N)} = \left[P_1 \oplus P_2\right]. \qquad (1')$$

Предположим, что задана *циркулянтная* матрица $A = \begin{bmatrix} a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} \\ a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} & a_1^{(4)} \\ a_3^{(4)} & a_4^{(4)} & a_1^{(4)} & a_2^{(4)} \\ a_4^{(4)} & a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} \end{bmatrix}$.

Тогда ковариационная матрица, построенная на ее основе, будет *персимметричной*:

$$\left[b_{ij}^{(4)}\right]_{4\times 4} = AA^T = \begin{bmatrix} b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} & b_{12}^{(4)} \\ b_{12}^{(4)} & b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} \\ b_{13}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{11}^{(4)} & b_{12}^{(4)} \\ b_{12}^{(4)} & b_{13}^{(4)} & b_{12}^{(4)} & b_{11}^{(4)} \end{bmatrix}.$$

Согласно (1') умножим матрицу $\left[b_{ij}^{(4)}\right]_{4\times 4}$ слева и справа на оператор $H^{(4)}$:

$$B_1^{(4)} = \left[\overline{b}_{ij}^{(4)}\right]_{4\times 4} = H^{(4)} \left[b_{ij}^{(4)}\right]_{4\times 4} H^{(4)} = \left[B_1^{(2)} \oplus B_2^{(2)}\right],$$

где $H^{(4)} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} \overline{b}_{11}^{(4)} & \overline{b}_{12}^{(4)} \\ \overline{b}_{12}^{(4)} & \overline{b}_{11}^{(4)} \end{bmatrix}$, $B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \overline{b}_{33}^{(4)} & \overline{b}_{34}^{(4)} \\ \overline{b}_{34}^{(4)} & \overline{b}_{33}^{(4)} \end{bmatrix}$, $\overline{b}_{11}^{(4)} = b_{11}^{(4)} + b_{12}^{(4)}$, $\overline{b}_{12}^{(4)} = b_{12}^{(4)} + b_{13}^{(4)}$, $\overline{b}_{33}^{(4)} = b_{11}^{(4)} - b_{12}^{(4)}$, $\overline{b}_{34}^{(4)} = b_{12}^{(4)} - b_{13}^{(4)}$. Так как матрицы $B_1^{(2)}$ и $B_2^{(2)}$ являются персимметричными, то, умножая $\left[\overline{b}_{ij}^{(4)}\right]_{4\times 4}$ слева и справа на оператор $H_2^{(4)} = \left[H^{(2)} \oplus H^{(2)}\right]$, получим в итоге диагональную матрицу

$$B_2^{(4)} = H_2^{(4)} \left[\bar{b}_{ij}^{(4)}\right]_{4\times4} H_2^{(4)} = \left[d_{ij}^{(4)}\delta_{ij}\right]_{4\times4}, \qquad H^{(2)} = \sqrt{2}/2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

где $d_{11}^{(4)} = \bar{b}_{11}^{(4)} + \bar{b}_{12}^{(4)} = b_{11}^{(4)} + 2b_{12}^{(4)} + b_{13}^{(4)}$, $d_{22}^{(4)} = \bar{b}_{11}^{(4)} - \bar{b}_{12}^{(4)} = b_{11}^{(4)} - b_{13}^{(4)}$, $d_{33}^{(4)} = \bar{b}_{33}^{(4)} + \bar{b}_{34}^{(4)} = b_{11}^{(4)} - b_{13}^{(4)}$, $d_{44}^{(4)} = \bar{b}_{33}^{(4)} - \bar{b}_{34}^{(4)} = b_{11}^{(4)} - 2b_{12}^{(4)} + b_{13}^{(4)}$.

Таким образом, собственные значения матрицы $\left[b_{ij}^{(4)}\right]_{4\times4}$ определяются соотношениями

$$d_{11}^{(4)} = b_{11}^{(4)} + 2b_{12}^{(4)} + b_{13}^{(4)},$$

$$d_{22}^{(4)} = b_{11}^{(4)} - b_{13}^{(4)}, \quad d_{33}^{(4)} = d_{22}^{(4)}, \tag{2}$$

$$d_{44}^{(4)} = b_{11}^{(4)} - 2b_{12}^{(4)} + b_{13}^{(4)},$$

а собственное преобразование имеет вид

$$\Psi^{(4)} = H^{(4)}\left[H^{(2)} \oplus H^{(2)}\right]. \tag{3}$$

Аналогично для ковариационной матрицы размером 8×8 (случай $N$ = 8) получим

$$B^{(8)} = A_8 A_8^T = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} \\
b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} \\
b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} \\
b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} \\
\hline
b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} \\
b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} \\
b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)} & b_{12}^{(8)} \\
b_{12}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{15}^{(8)} & b_{14}^{(8)} & b_{13}^{(8)} & b_{12}^{(8)} & b_{11}^{(8)}
\end{array}\right] = \left[b_{ij}^{(8)}\right]_{8\times8}.$$

Здесь $A_8$ – циркулянтная матрица восьмого порядка. Тогда $B_1^{(8)} = H^{(8)}\left[b_{ij}^{(8)}\right]_{8\times8} H^{(8)} = \left[B_1^{(4)} \oplus B_2^{(4)}\right]$,

где

$$B_1^{(4)} = \begin{bmatrix}
b_{11}^{(8)} + b_{12}^{(8)} & b_{12}^{(8)} + b_{13}^{(8)} & b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)} & b_{14}^{(8)} + b_{15}^{(8)} \\
b_{12}^{(8)} + b_{13}^{(8)} & b_{11}^{(8)} + b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} + b_{15}^{(8)} & b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)} \\
b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} + b_{15}^{(8)} & b_{11}^{(8)} + b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} + b_{13}^{(8)} \\
b_{14}^{(8)} + b_{15}^{(8)} & b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} + b_{13}^{(8)} & b_{11}^{(8)} + b_{12}^{(8)}
\end{bmatrix},$$

$$B_2^{(4)} = \begin{bmatrix}
b_{11}^{(8)} - b_{12}^{(8)} & b_{12}^{(8)} - b_{13}^{(8)} & b_{13}^{(8)} - b_{14}^{(8)} & b_{14}^{(8)} - b_{15}^{(8)} \\
b_{12}^{(8)} - b_{13}^{(8)} & b_{11}^{(8)} - b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} - b_{15}^{(8)} & b_{13}^{(8)} - b_{14}^{(8)} \\
b_{13}^{(8)} - b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} - b_{15}^{(8)} & b_{11}^{(8)} - b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} - b_{13}^{(8)} \\
b_{14}^{(8)} - b_{15}^{(8)} & b_{13}^{(8)} - b_{14}^{(8)} & b_{12}^{(8)} - b_{13}^{(8)} & b_{11}^{(8)} - b_{12}^{(8)}
\end{bmatrix}.$$

Так как матрицы $B_1^{(4)}$ и $B_2^{(4)}$ являются персимметричными, то

$$B_2^{(8)} = H_2^{(8)} B_1^{(8)} H_2^{(8)} = \left[H^{(4)} \oplus H^{(4)}\right]\left[B_1^{(4)} \oplus B_2^{(4)}\right]\left[H^{(4)} \oplus H^{(4)}\right] = \left[B_1^{(2)} \oplus B_2^{(2)} \oplus B_3^{(2)} \oplus B_4^{(2)}\right],$$

где

$$B_1^{(2)} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11}^{(8)} & \bar{b}_{12}^{(8)} \\ \bar{b}_{12}^{(8)} & \bar{b}_{11}^{(8)} \end{bmatrix}, \quad B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{33}^{(8)} & \bar{b}_{34}^{(8)} \\ \bar{b}_{34}^{(8)} & \bar{b}_{44}^{(8)} \end{bmatrix}, \quad B_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{55}^{(8)} & \bar{b}_{56}^{(8)} \\ \bar{b}_{56}^{(8)} & \bar{b}_{66}^{(8)} \end{bmatrix}, \quad B_4^{(2)} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{77}^{(8)} & \bar{b}_{78}^{(8)} \\ \bar{b}_{78}^{(8)} & \bar{b}_{77}^{(8)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{gathered} \bar{b}_{11}^{(8)} = b_{11}^{(8)} + b_{12}^{(8)} + b_{14}^{(8)} + b_{15}^{(8)}, \quad \bar{b}_{12}^{(8)} = b_{12}^{(8)} + 2b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)}, \quad \bar{b}_{33}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - b_{12}^{(8)} + b_{14}^{(8)} - b_{15}^{(8)}, \\ \bar{b}_{34}^{(8)} = b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}, \quad \bar{b}_{44}^{(8)} = b_{11}^{(8)} + b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)} - b_{15}^{(8)}, \quad \bar{b}_{55}^{(8)} = \bar{b}_{33}^{(8)}, \quad \bar{b}_{56}^{(8)} = \bar{b}_{34}^{(8)}, \\ \bar{b}_{66}^{(8)} = \bar{b}_{44}^{(8)}, \quad \bar{b}_{77}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)} + b_{15}^{(8)}, \quad \bar{b}_{77}^{(8)} = b_{12}^{(8)} - 2b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Матрицы $B_1^{(2)}$ и $B_4^{(2)}$ являются персимметричными, а матрицу $B_2^{(2)}$ следует привести к персимметричному виду посредством умножения на матрицу вращения $T^{(2)} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 & -c_1 \end{bmatrix}$:

$$\bar{B}_2^{(2)} = T^{(2)} B_2^{(2)} T^{(2)} = \begin{bmatrix} l_{33}^{(8)} & l_{34}^{(8)} \\ l_{34}^{(8)} & l_{44}^{(8)} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} l_{33}^{(8)} = \bar{b}_{33}^{(8)} c_1^2 + 2\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 + \bar{b}_{44}^{(8)} s_1^2, \; l_{44}^{(8)} = \bar{b}_{33}^{(8)} s_1^2 - 2\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 + \bar{b}_{44}^{(8)} c_1^2, \\ l_{34}^{(8)} = \bar{b}_{34}^{(8)} (s_1^2 - c_1^2) + (\bar{b}_{33}^{(8)} - \bar{b}_{44}^{(8)}) c_1 s_1, \quad c_1 = \cos\alpha_1, \quad s_1 = \sin\alpha_1, \end{gathered} \tag{5}$$

причем угол $\alpha_1$ требуется найти.

Определим значение $\alpha_1$, при котором $l_{33}^{(8)} = l_{44}^{(8)}$. В результате подстановки соотношений из (5) получим следующее уравнение:

$$(\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)}) s_1^2 + 4\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 - (\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)}) c_1^2 = 0, \;\; 4\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 = (\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)})(c_1^2 - s_1^2),$$

$$2\bar{b}_{34}^{(8)} \sin\lambda_1 = (\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)}) \cos\lambda_1, \quad \operatorname{tg}\lambda_1 = \frac{\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)}}{2\bar{b}_{34}^{(8)}}, \qquad \lambda_1 = 2\alpha_1.$$

Из соотношений (4) следует $\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)} = 2(b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}) = 2\bar{b}_{34}^{(8)}$ и, таким образом,

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = 1, \quad \lambda_1 = \pi/4, \quad \alpha_1 = \pi/8. \tag{6}$$

Так как согласно (4) $\bar{b}_{55}^{(8)} = \bar{b}_{33}^{(8)}$, $\bar{b}_{56}^{(8)} = \bar{b}_{34}^{(8)}$, $\bar{b}_{66}^{(8)} = \bar{b}_{44}^{(8)}$, то $B_3^{(2)} = B_2^{(2)}$ и процедура приведения матрицы $B_3^{(2)}$ к персимметричному виду аналогична вышеописанной.

Таким образом, на третьем шаге получим матрицу вида

$$B_3^{(8)} = T^{(8)} B_2^{(8)} T^{(8)} = \left[B_1^{(2)} \oplus \bar{B}_2^{(2)} \oplus \bar{B}_2^{(2)} \oplus B_4^{(2)}\right],$$

где $T^{(8)} = \left[E^{(2)} \oplus T^{(2)} \oplus T^{(2)} \oplus E^{(2)}\right]$, $E^{(2)}$ – единичная матрица второго порядка, $T^{(2)} = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ s_1 & -c_1 \end{bmatrix}$, $c_1 = \cos(\pi/8)$, $s_1 = \sin(\pi/8)$.

Так как матрицы $B_1^{(2)}$, $\bar{B}_2^{(2)}$, $B_4^{(2)}$ персимметричные, то $B_4^{(8)} = H_4^{(8)} B_3^{(8)} H_4^{(8)} = \left[d_{ij}^{(8)} \delta_{ij}\right]_{8\times 8}$, где

$$H_4^{(8)} = \left[H^{(2)} \oplus \bar{H}^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)}\right], \quad H^{(2)} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; \bar{H}^{(2)} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$d_{11}^{(8)} = \bar{b}_{11}^{(8)} + \bar{b}_{12}^{(8)} = b_{11}^{(8)} + 2(b_{12}^{(8)} + b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)}) + b_{15}^{(8)}, \quad d_{22}^{(8)} = \bar{b}_{11}^{(8)} - \bar{b}_{12}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - 2b_{13}^{(8)} + b_{15}^{(8)},$$

$$d_{33}^{(8)} = l_{33}^{(8)} - l_{34}^{(8)} = \bar{b}_{33}^{(8)} c_1^2 + 2\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 + \bar{b}_{44}^{(8)} s_1^2 - \bar{b}_{34}^{(8)} s_1^2 + \bar{b}_{34}^{(8)} c_1^2 - \bar{b}_{33}^{(8)} c_1 s_1 + \bar{b}_{44}^{(8)} c_1 s_1 =$$

$$= (\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{34}^{(8)}) s_1^2 + (2\bar{b}_{34}^{(8)} + \bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)}) c_1 s_1 + (\bar{b}_{33}^{(8)} + \bar{b}_{34}^{(8)}) c_1^2 .$$

Так как $\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{34}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - b_{15}^{(8)}$, $\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{33}^{(8)} = 2(b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}) = 2\bar{b}_{34}^{(8)}$, $\bar{b}_{33}^{(8)} + \bar{b}_{34}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - b_{15}^{(8)}$, то $d_{33}^{(8)} =$ $= (b_{11}^{(8)} - b_{15}^{(8)})(c_1^2 + s_1^2) + 4\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 = b_{11}^{(8)} + 2(b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}) \sin(2\alpha_1) - b_{15}^{(8)}$.

Аналогично

$$d_{44}^{(8)} = l_{44}^{(8)} + l_{34}^{(8)} = (\bar{b}_{33}^{(8)} + \bar{b}_{34}^{(8)}) s_1^2 + (\bar{b}_{33}^{(8)} - \bar{b}_{44}^{(8)} - 2\bar{b}_{34}^{(8)}) c_1 s_1 + (\bar{b}_{44}^{(8)} - \bar{b}_{34}^{(8)}) c_1^2 =$$

$$= (b_{11}^{(8)} - b_{15}^{(8)})(c_1^2 + s_1^2) - 4\bar{b}_{34}^{(8)} c_1 s_1 = b_{11}^{(8)} - 2(b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}) \sin(2\alpha_1) - b_{15}^{(8)}; \quad d_{55}^{(8)} = d_{44}^{(8)}, \quad d_{66}^{(8)} = d_{33}^{(8)},$$

$$d_{77}^{(8)} = \bar{b}_{77}^{(8)} + \bar{b}_{78}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - 2b_{13}^{(8)} + b_{15}^{(8)} = d_{22}^{(8)}, \quad d_{88}^{(8)} = \bar{b}_{77}^{(8)} - \bar{b}_{78}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - 2(b_{12}^{(8)} - b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)}) + b_{15}^{(8)}.$$

Так как $\alpha_1 = \pi/8$, $2\alpha_1 = \pi/4$, то $\sin(2\alpha_1) = \sqrt{2}/2 = s_0$. Тогда собственные значения матрицы $B^{(8)}$ определяются соотношениями

$$d_{11}^{(8)} = b_{11}^{(8)} + 2(b_{12}^{(8)} + b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)}) + b_{15}^{(8)}, \quad d_{22}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - 2b_{13}^{(8)} + b_{15}^{(8)}, \quad d_{33}^{(8)} = b_{11}^{(8)} + 2(b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}) s_0 - b_{15}^{(8)},$$

$$d_{44}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - 2(b_{12}^{(8)} - b_{14}^{(8)}) s_0 - b_{15}^{(8)}, \; d_{55}^{(8)} = d_{44}^{(8)}, \quad d_{66}^{(8)} = d_{33}^{(8)}, \quad d_{77}^{(8)} = d_{22}^{(8)}, \tag{7}$$

$$d_{88}^{(8)} = b_{11}^{(8)} - 2(b_{12}^{(8)} - b_{13}^{(8)} + b_{14}^{(8)}) + b_{15}^{(8)},$$

а собственное преобразование для данной матрицы имеет вид

$$\Psi^{(8)} = H^{(8)} \left[H^{(4)} \oplus H^{(4)}\right] \left[E^{(2)} \oplus T^{(2)} \oplus T^{(2)} \oplus E^{(2)}\right] \left[H^{(2)} \oplus \bar{H}^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)}\right]. \tag{8}$$

Для случая $N$=16 получим

$$F^{(16)} = A_{16} A_{16}^T = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{17} & f_{18} & f_{19} & f_{18} & \cdots & f_{13} & f_{12} \\
f_{12} & f_{11} & \cdots & f_{16} & f_{17} & f_{18} & f_{19} & \cdots & f_{14} & f_{13} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_{17} & f_{16} & \cdots & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & \cdots & f_{19} & f_{18} \\
f_{18} & f_{17} & \cdots & f_{12} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{18} & f_{19} \\
\hline
f_{19} & f_{18} & \cdots & f_{13} & f_{12} & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{17} & f_{18} \\
f_{18} & f_{19} & \cdots & f_{14} & f_{13} & f_{12} & f_{11} & \cdots & f_{16} & f_{17} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_{13} & f_{14} & \cdots & f_{19} & f_{18} & f_{17} & f_{16} & \cdots & f_{11} & f_{12} \\
f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{18} & f_{19} & f_{18} & f_{17} & \cdots & f_{12} & f_{11}
\end{array}\right]_{16\times 16},$$

где $A_{16}$ – циркулянтная матрица $\left[a_{ij}\right]_{16\times 16}$. Умножим матрицу $F^{(16)}$ на оператор $H^{(16)}$:

$$F_1^{(16)} = H^{(16)} F^{(16)} H^{(16)} = \left[F_1^{(8)} \oplus F_1^{(8)}\right],$$

где $F_1^{(8)}$ и $F_1^{(8)}$ – персимметричные матрицы. Аналогично получим

$$F_2^{(16)} = H_2^{(16)} F_1^{(16)} H_2^{(16)} = \left[H^{(8)} \oplus H^{(8)}\right]\left[F_1^{(8)} \oplus F_1^{(8)}\right]\left[H^{(8)} \oplus H^{(8)}\right] = \left[F_1^{(4)} \oplus F_2^{(4)} \oplus F_3^{(4)} \oplus F_4^{(4)}\right],$$

$$F_1^{(4)} = \begin{bmatrix} \bar f_{11} & \bar f_{12} & \bar f_{13} & \bar f_{14} \\ \bar f_{12} & \bar f_{22} & \bar f_{23} & \bar f_{13} \\ \bar f_{13} & \bar f_{23} & \bar f_{22} & \bar f_{12} \\ \bar f_{14} & \bar f_{13} & \bar f_{12} & \bar f_{11} \end{bmatrix}, \quad F_2^{(4)} = F_3^{(4)} = \begin{bmatrix} \bar f_{55} & \bar f_{56} & \bar f_{57} & \bar f_{58} \\ \bar f_{56} & \bar f_{66} & \bar f_{67} & \bar f_{68} \\ \bar f_{57} & \bar f_{67} & \bar f_{77} & \bar f_{78} \\ \bar f_{58} & \bar f_{68} & \bar f_{78} & \bar f_{88} \end{bmatrix}, \quad F_4^{(4)} = \begin{bmatrix} f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} & f'_{14} \\ f'_{12} & f'_{22} & f'_{23} & f'_{13} \\ f'_{13} & f'_{23} & f'_{22} & f'_{12} \\ f'_{14} & f'_{13} & f'_{12} & f'_{11} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} \bar f_{11} = f_{11} + f_{12} + f_{18} + f_{19}, \quad \bar f_{12} = f_{12} + f_{13} + f_{17} + f_{18}, \quad \bar f_{13} = f_{13} + f_{14} + f_{16} + f_{17}, \\ f_{14} = f_{14} + 2f_{15} + f_{16}, \quad \bar f_{22} = f_{11} + f_{14} + f_{16} + f_{19}, \quad \bar f_{23} = f_{12} + 2f_{15} + f_{18}, \\ \bar f_{55} = f_{11} - f_{12} + f_{18} - f_{19}, \quad \bar f_{56} = f_{12} - f_{13} + f_{17} - f_{18}, \quad \bar f_{57} = f_{13} - f_{14} + f_{16} - f_{17}, \quad \bar f_{58} = f_{14} - f_{16}, \\ \bar f_{66} = f_{11} - f_{14} + f_{16} - f_{19}, \quad \bar f_{67} = f_{12} - f_{18}, \quad \bar f_{68} = f_{13} + f_{14} - f_{16} - f_{17}, \quad \bar f_{77} = f_{11} + f_{14} - f_{16} - f_{19}, \\ \bar f_{78} = f_{12} + f_{13} - f_{17} - f_{18}, \quad \bar f_{88} = f_{11} + f_{12} - f_{18} - f_{19}, \quad f'_{11} = f_{11} - f_{12} - f_{18} + f_{19}, \quad f'_{12} = f_{12} - f_{13} - f_{17} + f_{18}, \\ f'_{13} = f_{13} - f_{14} - f_{16} + f_{17}, \quad f'_{14} = f_{14} - 2f_{15} + f_{16}, \quad f'_{22} = f_{11} - f_{14} - f_{16} + f_{19}, \quad f'_{23} = f_{12} - 2f_{15} + f_{18}. \end{gathered} \tag{9}$$

Матрицы $F_1^{(4)}$ и $F_4^{(4)}$ являются персимметричными, а матрицу $F_2^{(4)}$ предварительно умножим слева и справа на оператор $G^{(4)}$:

$$G^{(4)} = \sqrt{2}/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G^{(4)} F_2^{(4)} G^{(4)} = 1/2 \begin{bmatrix} l_{55} & l_{56} & l_{57} & l_{58} \\ l_{56} & l_{66} & l_{67} & l_{68} \\ l_{57} & l_{67} & l_{77} & l_{78} \\ l_{58} & l_{68} & l_{78} & l_{88} \end{bmatrix} = L_1^{(4)},$$

где

$$\begin{gathered} l_{55} = \bar f_{55} + 2\bar f_{57} + \bar f_{77} = 2f_{11} - f_{12} + 2f_{13} - f_{14} + f_{16} - 2f_{17} + f_{18} - 2f_{19}, \\ l_{56} = \bar f_{56} + \bar f_{58} + \bar f_{67} + \bar f_{78} = 3f_{12} + f_{14} - f_{16} - 3f_{18}, \; l_{57} = \bar f_{55} - \bar f_{77} = -f_{12} - f_{14} + f_{16} + f_{18}, \\ l_{58} = \bar f_{56} - \bar f_{58} + \bar f_{67} - \bar f_{78} = f_{12} - 2f_{13} - f_{14} + f_{16} + 2f_{17} - f_{18}, \\ l_{66} = \bar f_{66} + 2\bar f_{68} + \bar f_{88} = 2f_{11} + f_{12} + 2f_{13} + f_{14} - f_{16} - 2f_{17} - f_{18} - 2f_{19}, \\ l_{67} = \bar f_{56} + \bar f_{58} - \bar f_{67} - \bar f_{78} = -f_{12} - 2f_{13} + f_{14} - f_{16} + 2f_{17} + f_{18}, \qquad l_{68} = l_{57} = -f_{12} - f_{14} + f_{16} + f_{18}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$l_{77} = \bar{f}_{55} - 2\bar{f}_{57} + \bar{f}_{77} = 2f_{11} - f_{12} - 2f_{13} + 3f_{14} - 3f_{16} + 2f_{17} + f_{18} - 2f_{19},$$

$$l_{78} = \bar{f}_{56} - \bar{f}_{58} - \bar{f}_{67} + \bar{f}_{78} = f_{12} - f_{14} + f_{16} - f_{18},$$

$$l_{88} = \bar{f}_{66} - 2\bar{f}_{68} + \bar{f}_{88} = 2f_{11} + f_{12} - 2f_{13} - 3f_{14} + 3f_{16} + 2f_{17} - f_{18} - 2f_{19}.$$

Далее умножим полученную матрицу $L_1^{(4)}$ на оператор $T^{(4)}$:

$$T^{(4)} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & s_{11} \\ 0 & c_{11} & s_{11} & 0 \\ 0 & s_{11} & -c_{11} & 0 \\ s_{11} & 0 & 0 & -c_{11} \end{bmatrix}, \qquad L_2^{(4)} = T^{(4)} L_1^{(4)} T^{(4)} = 1/2 \begin{bmatrix} \bar{l}_{55} & \bar{l}_{56} & \bar{l}_{57} & \bar{l}_{58} \\ \bar{l}_{56} & \bar{l}_{66} & \bar{l}_{67} & \bar{l}_{68} \\ \bar{l}_{57} & \bar{l}_{67} & \bar{l}_{77} & \bar{l}_{78} \\ \bar{l}_{58} & \bar{l}_{68} & \bar{l}_{78} & \bar{l}_{88} \end{bmatrix} = \left[\bar{l}_{ij}\right]_{4\times4},$$

где

$$\begin{gathered} \bar{l}_{55} = l_{55}c_{11}^2 + 2l_{58}c_{11}s_{11} + l_{88}s_{11}^2, \ \ \bar{l}_{56} = l_{56}c_{11}^2 + (l_{57} + l_{68})c_{11}s_{11} + l_{78}s_{11}^2, \ \ \bar{l}_{57} = l_{68}s_{11}^2 + (l_{56} - l_{78})c_{11}s_{11} - l_{57}c_{11}^2, \\ \bar{l}_{58} = l_{58}s_{11}^2 + (l_{55} - l_{88})c_{11}s_{11} - l_{58}c_{11}^2, \ \ \bar{l}_{66} = l_{66}c_{11}^2 + 2l_{67}c_{11}s_{11} + l_{77}s_{11}^2, \ \ \bar{l}_{67} = l_{67}s_{11}^2 + (l_{66} - l_{77})c_{11}s_{11} - l_{67}c_{11}^2, \\ \bar{l}_{68} = l_{57}s_{11}^2 + (l_{56} - l_{78})c_{11}s_{11} - l_{68}c_{11}^2, \ \ \bar{l}_{77} = l_{66}s_{11}^2 - 2l_{67}c_{11}s_{11} + l_{77}c_{11}^2, \\ \bar{l}_{78} = l_{56}s_{11}^2 - (l_{57} + l_{68})c_{11}s_{11} + l_{78}c_{11}^2, \quad \bar{l}_{88} = l_{55}s_{11}^2 - 2l_{58}c_{11}s_{11} + l_{88}c_{11}^2. \end{gathered} \tag{11}$$

На основании (10) и (11) $\bar{l}_{57} = \bar{l}_{68}$, так как $l_{57} = l_{68} = -f_{12} - f_{14} + f_{16} + f_{18}$. Из условия симметрии матрицы $\left[\bar{l}_{ij}\right]_{4\times4}$ относительно побочной диагонали получим

$$\bar{l}_{55} = \bar{l}_{88}, \quad \bar{l}_{66} = \bar{l}_{77}, \quad \bar{l}_{56} = \bar{l}_{78}. \tag{12}$$

Покажем, что система уравнений (12) превращается в тождество при значении $\alpha_{11} = \pi/8$. Из уравнения $\bar{l}_{55} = \bar{l}_{88}$ следует, что $l_{55}c_{11}^2 + 2l_{58}c_{11}s_{11} + l_{88}s_{11}^2 = l_{55}s_{11}^2 - 2l_{58}c_{11}s_{11} + l_{88}c_{11}^2$, $(l_{88} - l_{55})s_{11}^2 + 4l_{58}c_{11}s_{11} - (l_{88} - l_{55})c_{11}^2 = 0$, $4l_{58}c_{11}s_{11} = (l_{88} - l_{55})(c_{11}^2 - s_{11}^2)$, $2l_{58}\sin(2\alpha_{11}) = (l_{88} - l_{55})\cos(2\alpha_{11})$, $\operatorname{tg}\lambda_2 = \dfrac{l_{88} - l_{55}}{2l_{58}}$ $\lambda_2 = 2\alpha_{11}$. Так как $l_{88} - l_{55} = 2f_{12} - 4f_{13} - 2f_{14} + 2f_{16} + 4f_{17} - 2f_{18} = 2(f_{12} - 2f_{13} - f_{14} + f_{16} + 2f_{17} - f_{18}) = 2l_{58}$, то $\operatorname{tg}\lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = \pi/4$, $\alpha_{11} = \pi/8$.

В результате подстановки соотношений (11) в уравнение $\bar{l}_{66} = \bar{l}_{77}$ имеем

$$(l_{77} - l_{66})s_{11}^2 + 4l_{67}c_{11}s_{11} - (l_{77} - l_{66})c_{11}^2 = 0, \quad 2l_{67}\sin(2\alpha_{11}) = (l_{77} - l_{66})\cos(2\alpha_{11}),$$

$$\operatorname{tg}\lambda_2 = \frac{l_{77} - l_{66}}{2l_{67}}, \quad l_{77} - l_{66} = -2f_{12} - 4f_{13} + 2f_{14} - 2f_{16} + 4f_{17} + 2f_{18} =$$

$$= 2(-f_{12} - 2f_{13} + f_{14} - f_{16} + 2f_{17} + f_{18}) = 2l_{67}, \quad \operatorname{tg}\lambda_2 = 1, \ \lambda_2 = \pi/4, \ \alpha_{11} = \pi/8.$$

Аналогично для уравнения $\bar{l}_{56}=\bar{l}_{78}$ получаем $(l_{78}-l_{56})s_{11}^2+2(l_{57}+l_{68})c_{11}s_{11}-(l_{78}-l_{56})c_{11}^2=0$, $(l_{57}+l_{68})\sin(2\alpha_{11})=(l_{78}-l_{56})\cos(2\alpha_{11})$, $\operatorname{tg}\lambda_2=\dfrac{l_{78}-l_{56}}{l_{57}+l_{68}}$. Так как $l_{57}=l_{68}$, то $l_{57}+l_{68}=2l_{57}$, $l_{78}-l_{56}=-2f_{12}-2f_{14}+2f_{16}+2f_{18}=2(-f_{12}-f_{14}+f_{16}+f_{18})=2l_{57}$, $\operatorname{tg}\lambda_2=1$, $\lambda_2=\pi/4$, $\alpha_{11}=\pi/8$.

Следовательно, уравнения (12) превращаются в тождества при значении аргумента $\alpha_{11}=\pi/8$, а матрица $L_2^{(4)}$ имеет вид

$$L_2^{(4)}=1/2\begin{bmatrix}\bar{l}_{55} & \bar{l}_{56} & \bar{l}_{57} & \bar{l}_{58}\\ \bar{l}_{56} & \bar{l}_{66} & \bar{l}_{67} & \bar{l}_{57}\\ \bar{l}_{57} & \bar{l}_{67} & \bar{l}_{77} & \bar{l}_{78}\\ \bar{l}_{58} & \bar{l}_{57} & \bar{l}_{78} & \bar{l}_{88}\end{bmatrix}.$$

Так как $F_3^{(4)}=F_2^{(4)}$, то матрица $F_3^{(4)}$ приводится к персимметричному виду аналогично $F_2^{(4)}$.

Таким образом, на третьем шаге получим матрицу

$$F_3^{(16)}=G_4^{(16)}F_2^{(16)}G_4^{(16)}=\left[F_1^{(4)}\oplus L_1^{(4)}\oplus L_1^{(4)}\oplus F_4^{(4)}\right],$$

где $G_4^{(16)}=\left[E_4\oplus G^{(4)}\oplus G^{(4)}\oplus E_4\right]$, $E_4$ – единичная матрица четвертого порядка, а на четвертом шаге – матрицу

$$F_4^{(16)}=T_4^{(16)}F_3^{(16)}T_4^{(16)}=\left[F_1^{(4)}\oplus L_2^{(4)}\oplus L_2^{(4)}\oplus F_4^{(4)}\right],\qquad T_4^{(16)}=\left[E_4\oplus T^{(4)}\oplus T^{(4)}\oplus E_4\right].$$

Так как матрицы $F_1^{(4)}$, $L_2^{(4)}$, $F_4^{(4)}$ персимметричные, то, умножив матрицу $F_4^{(16)}$ на оператор $H_4^{(16)}=\left[H^{(4)}\oplus\bar{H}^{(4)}\oplus H^{(4)}\oplus H^{(4)}\right]$, в соответствии с соотношениями (9) получим

$$F_5^{(16)}=H_4^{(16)}F_4^{(16)}H_4^{(16)}=\left[F_1^{(2)}\oplus F_2^{(2)}\oplus F_3^{(2)}\oplus F_4^{(2)}\oplus F_4^{(2)}\oplus F_3^{(2)}\oplus F_7^{(2)}\oplus F_8^{(2)}\right],$$

где

$$F_1^{(2)}=\begin{bmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{12} & l_{11}\end{bmatrix},\quad l_{11}=\bar{f}_{11}+\bar{f}_{14}=f_{11}+f_{12}+f_{14}+2f_{15}+f_{16}+f_{18}+f_{19},$$

$$l_{12}=\bar{f}_{12}+\bar{f}_{13}=f_{12}+2f_{13}+f_{14}+f_{16}+2f_{17}+f_{18};$$

$$F_2^{(2)}=\begin{bmatrix}l_{33} & l_{34}\\ l_{34} & l_{44}\end{bmatrix},\quad l_{33}=\bar{f}_{22}-\bar{f}_{23}=f_{11}-f_{12}+f_{14}-2f_{15}+f_{16}-f_{18}+f_{19}, \tag{13}$$

$$l_{34}=\bar{f}_{12}-\bar{f}_{13}=f_{12}-f_{14}-f_{16}+f_{18},$$

$$l_{44}=\bar{f}_{11}-\bar{f}_{14}=f_{11}+f_{12}-f_{14}-2f_{15}-f_{16}+f_{18}+f_{19};$$

$$F_3^{(2)}=\begin{bmatrix}e_{55} & e_{56}\\ e_{56} & e_{66}\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix}e'_{55} & e'_{56}\\ e'_{56} & e'_{66}\end{bmatrix}.$$

Исходя из соотношений (10) и (11) имеем

$$e'_{55}=\bar{l}_{55}-\bar{l}_{58}=(l_{55}+l_{58})c_{11}^2-(l_{55}-l_{88}-2l_{58})c_{11}s_{11}+(l_{88}-l_{58})s_{11}^2,$$

где

$$l_{55}+l_{58}=2(f_{11}-f_{14}+f_{16}-f_{19})=2y_1\,,\ \ l_{88}-l_{58}=2y_1\,,\ \ y_1=f_{11}-f_{14}+f_{16}-f_{19}\,,$$

$$l_{55}-l_{88}=-2(f_{12}-2f_{13}-f_{14}+f_{16}+2f_{17}-f_{18})=-2l_{58}\,,\ \ l_{55}-l_{88}-2l_{58}=-2l_{58}-2l_{58}=-4l_{58}\,.$$

Тогда

$$e'_{55}=2(y_1c_{11}^2+2l_{58}c_{11}s_{11}+y_1s_{11}^2)=2\left[y_1(c_{11}^2+s_{11}^2)+2l_{58}c_{11}s_{11}\right]=2(y_1+l_{58}\sin(2\alpha_{11}))=$$

$$=2(y_1+l_{58}\sin(\pi/4))=2(y_1+l_{58}s_0)\,,\ e_{55}=y_1+l_{58}s_0=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})s_0-2(f_{13}-f_{17})s_0-$$

$$-(f_{14}-f_{16})(1+s_0)\,;\quad e'_{56}=\bar{l}_{56}-\bar{l}_{57}=(l_{56}+l_{57})c_{11}^2+(2l_{57}-(l_{56}-l_{78}))c_{11}s_{11}+(l_{78}-l_{57})s_{11}^2\,,$$

где

$$l_{56}+l_{57}=2(f_{12}-f_{18})\,,\ \ l_{78}-l_{57}=2(f_{12}-f_{18})\,,\ \ l_{56}-l_{78}=-2(-f_{12}-f_{14}+f_{16}+f_{18})=-2l_{57}\,,$$

$$2l_{57}-(l_{56}-l_{78})=2l_{57}-(-2l_{57})=4l_{57}\,;\quad e'_{56}=2(f_{12}-f_{18})(c_{11}^2+s_{11}^2)+4l_{57}c_{11}s_{11}=$$

$$=2(f_{12}-f_{18}+l_{57}\sin(\pi/4))=2(f_{12}-f_{18}+l_{57}s_0)\,,\ e_{56}=f_{12}-f_{18}+l_{57}s_0=(f_{12}-f_{18})(1-s_0)-(f_{14}-f_{16})s_0\,.$$

Аналогично

$$e'_{66}=\bar{l}_{66}-\bar{l}_{67}=(l_{66}+l_{67})c_{11}^2+(2l_{67}-(l_{66}-l_{77}))c_{11}s_{11}+(l_{77}-l_{67})s_{11}^2\,,$$

$$l_{66}+l_{67}=2(f_{11}+f_{14}-f_{16}-f_{19})=2y_2\,,\ \ l_{77}-l_{67}=2y_2\,,\ \ y_2=f_{11}+f_{14}-f_{16}-f_{19}\,,$$

$$l_{66}-l_{77}=-2(-f_{12}-2f_{13}+f_{14}-f_{16}+2f_{17}+f_{18})=-2l_{67}\,,\quad 2l_{67}-(l_{66}-l_{77})=2l_{67}-(-2l_{67})=4l_{67}\,;\qquad (14)$$

$$e'_{66}=2(y_2(c_{11}^2+s_{11}^2)+l_{67}\sin(2\alpha_{11}))=2(y_2+l_{67}\sin(\pi/4))=2(y_2+l_{67}s_0)\,,$$

$$e_{66}=y_2+l_{67}s_0=f_{11}-f_{19}-(f_{12}-f_{18})s_0-2(f_{13}-f_{17})s_0+(f_{14}-f_{16})(1+s_0)\,.$$

Таким образом, элементы матрицы $F_3^{(2)}$ имеют вид

$$e_{55}=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})s_0-2(f_{13}-f_{17})s_0-(f_{14}-f_{16})(1+s_0)\,,$$

$$e_{56}=(f_{12}-f_{18})(1-s_0)-(f_{14}-f_{16})s_0\,,\qquad s_0=\sin(\pi/4)\,,\qquad (15)$$

$$e_{66}=f_{11}-f_{19}-(f_{12}-f_{18})s_0-2(f_{13}-f_{17})s_0+(f_{14}-f_{16})(1+s_0)\,.$$

Аналогично матрице $F_3^{(2)}$ получаем матрицу

$$F_4^{(2)}=\begin{bmatrix} e_{77} & e_{78} \\ e_{78} & e_{88}\end{bmatrix}=1/2\begin{bmatrix} e'_{77} & e'_{78} \\ e'_{78} & e'_{88}\end{bmatrix}.$$

На основании соотношений (10) и (11) $e'_{77}=\bar{l}_{77}+\bar{l}_{67}=(l_{77}-l_{67})c_{11}^2+(l_{66}-l_{77}-2l_{67})c_{11}s_{11}+$ $+(l_{66}+l_{67})s_{11}^2$, где, как следует из (14), $l_{77}-l_{67}=2y_2$, $y_2=f_{11}+f_{14}-f_{16}-f_{19}$, $l_{66}+l_{67}=2y_2$, $l_{66}-$ $-l_{77}-2l_{67}=-(2l_{67}-(l_{66}-l_{77}))=-4l_{67}$.

Тогда $e'_{77}=2(y_2(c_{11}^2+s_{11}^2)-l_{67}\sin(2\alpha_{11}))=2(y_2-l_{67}\sin(\pi/4))=2(y_2-l_{67}s_0)$, $e_{77}=y_2-l_{67}s_0=$ $=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})s_0+2(f_{13}-f_{17})s_0+(f_{14}-f_{16})(1+s_0)$.

Аналогично $e'_{88}=\bar{l}_{88}+\bar{l}_{58}=(l_{88}-l_{58})c_{11}^2+(l_{55}-l_{88}-2l_{58})c_{11}s_{11}+(l_{55}+l_{58})s_{11}^2$, где $l_{88}-l_{58}=2y_1$, $y_1=f_{11}-f_{14}+f_{16}-f_{19}$, $l_{55}+l_{58}=2y_1$, $l_{55}-l_{88}-2l_{58}=-4l_{58}$.

Следовательно,

$$e'_{88}=2(y_1(c_{11}^2+s_{11}^2)-l_{58}\sin(2\alpha_{11}))=2(y_1-l_{58}\sin(\pi/4))=2(y_1-l_{58}s_0),$$

$$e_{88}=y_1-l_{58}s_0=f_{11}-f_{19}-(f_{12}-f_{18})s_0+2(f_{13}-f_{17})s_0-(f_{14}-f_{16})(1+s_0);$$

$$e'_{78}=\bar{l}_{78}+\bar{l}_{57}=(l_{78}-l_{57})c_{11}^2+(-2l_{57}+l_{56}-l_{78})c_{11}s_{11}+(l_{56}+l_{57})s_{11}^2,$$

$$l_{78}-l_{57}=2(f_{12}-f_{18}),\ \ l_{56}+l_{57}=2(f_{12}-f_{18}),\ \ l_{56}-l_{78}=2(f_{12}+f_{14}-f_{16}-f_{18})=-2l_{57}.$$

Тогда

$$e'_{78}=2(f_{12}-f_{18})(c_{11}^2+s_{11}^2)-4l_{57}c_{11}s_{11}=2(f_{12}-f_{18}-l_{57}\sin(\pi/4))=2(f_{12}-f_{18}-l_{57}s_0),$$

$$e_{78}=f_{12}-f_{18}-l_{57}s_0=(f_{12}-f_{18})(1-s_0)+(f_{14}-f_{16})s_0.$$

Таким образом, элементы матрицы $F_4^{(2)}$ определяются соотношениями

$$e_{77}=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})s_0+2(f_{13}-f_{17})s_0+(f_{14}-f_{16})(1+s_0),$$

$$e_{78}=(f_{12}-f_{18})(1-s_0)+(f_{14}-f_{16})s_0,\quad s_0=\sin(\pi/4), \tag{16}$$

$$e_{88}=f_{11}-f_{19}-(f_{12}-f_{18})s_0+2(f_{13}-f_{17})s_0-(f_{14}-f_{16})(1+s_0).$$

Далее, матрицы $F_7^{(2)}$ и $F_8^{(2)}$ в соответствии с (9) имеют вид

$$F_7^{(2)}=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22}\end{bmatrix},\ \ g_{11}=f'_{11}+f'_{14}=f_{11}-f_{12}+f_{14}-2f_{15}+f_{16}-f_{18}+f_{19},$$

$$g_{22}=f'_{22}+f'_{23}=f_{11}+f_{12}-f_{14}-2f_{15}-f_{16}+f_{18}+f_{19}, \tag{17}$$

$$g_{12}=f'_{12}+f'_{13}=f_{12}-f_{14}-f_{16}+f_{18};$$

$$F_8^{(2)}=\begin{bmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{34} & g_{44}\end{bmatrix},\ \ g_{33}=g_{44}=f'_{22}-f'_{23}=f_{11}-f_{12}-f_{14}+2f_{15}-f_{16}-f_{18}+f_{19}, \tag{18}$$

$$g_{34}=f'_{12}-f'_{13}=f_{12}-2f_{13}+f_{14}+f_{16}-2f_{17}+f_{18}.$$

Матрица $F_1^{(2)}$ является персимметричной, а матрицу $F_2^{(2)}$ умножим на оператор $T_1^{(2)}$:

$$T_1^{(2)}F_2^{(2)}T_1^{(2)}=\bar{F}_2^{(2)},\quad \bar{F}_2^{(2)}=\begin{bmatrix} \bar{l}_{33} & \bar{l}_{34} \\ \bar{l}_{34} & \bar{l}_{44}\end{bmatrix},\quad T_1^{(2)}=\begin{bmatrix} c_{11} & s_{11} \\ s_{11} & -c_{11}\end{bmatrix},\quad c_{11}=\cos(\alpha_{11}),\ s_{11}=\sin(\alpha_{11}), \tag{19}$$

где $\bar{l}_{33}=l_{33}c_{11}^2+2l_{34}c_{11}s_{11}+l_{44}s_{11}^2$, $\bar{l}_{44}=l_{33}s_{11}^2-2l_{34}c_{11}s_{11}+l_{44}c_{11}^2$, $\bar{l}_{34}=l_{34}(s_{11}^2-c_{11}^2)+(l_{33}-l_{44})c_{11}s_{11}$.

Из условия $\bar{l}_{33} = \bar{l}_{44}$ и соотношений (13) получим

$$(l_{44} - l_{33})s_{11}^2 + 4l_{34}c_{11}s_{11} - (l_{44} - l_{33})c_{11}^2 = 0,\ 4l_{34}c_{11}s_{11} - (l_{44} - l_{33})(c_{11}^2 - s_{11}^2) = 0,\ 2l_{34}\sin\beta = (l_{44} - l_{33})\cos\beta,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{l_{44} - l_{33}}{2l_{34}},\quad l_{44} - l_{33} = 2(f_{12} - f_{14} - f_{16} + f_{18}) = 2l_{34},\ tg\beta = 1,\ \beta = 2\alpha_{11} = \pi/4,\ \alpha_{11} = \pi/8.$$

Аналогично матрицу $F_3^{(2)}$ умножим на оператор $\bar{T}_2^{(2)}$:

$$\bar{T}_2^{(2)}F_3^{(2)}\bar{T}_2^{(2)} = \bar{F}_3^{(2)},\quad \bar{F}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{55} & \bar{e}_{56} \\ \bar{e}_{56} & \bar{e}_{66} \end{bmatrix},\quad \bar{T}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} s_{12} & c_{12} \\ c_{12} & -s_{12} \end{bmatrix},\quad c_{12} = \cos\alpha_{12},\ s_{12} = \sin\alpha_{12}, \tag{20}$$

где $\bar{e}_{55} = e_{55}s_{12}^2 + 2e_{56}c_{12}s_{12} + e_{66}c_{12}^2$, $\bar{e}_{66} = e_{55}c_{12}^2 - 2e_{56}c_{12}s_{12} + e_{66}s_{12}^2$, $\bar{e}_{56} = e_{56}(c_{12}^2 - s_{12}^2) + (e_{55} - e_{66})c_{12}s_{12}$.

Из уравнения $\bar{e}_{55} = \bar{e}_{66}$ и соотношений (15) следует

$$(e_{55} - e_{66})s_{12}^2 + 4e_{56}c_{12}s_{12} - (e_{55} - e_{66})c_{12}^2 = 0,\ 2e_{56}\sin\beta_1 = (e_{55} - e_{66})\cos\beta_1,\ \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{e_{55} - e_{66}}{2e_{56}},\ \beta_1 = 2\alpha_{12},$$

$$e_{55} - e_{66} = 2[(f_{12} - f_{18})s_0 - (f_{14} - f_{16})(1 + s_0)],\quad e_{56} = (f_{12} - f_{18})(1 - s_0) - (f_{14} - f_{16})s_0,$$

$$tg\beta_1 = p_1,\quad p_1 = \frac{(f_{12} - f_{18})s_0 - (f_{14} - f_{16})(1 + s_0)}{(f_{12} - f_{18})(1 - s_0) - (f_{14} - f_{16})s_0},\ \beta_1 = \operatorname{arctg}(p_1),\quad \alpha_{12} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(p_1).$$

Далее матрицу $F_4^{(2)}$ умножим на оператор $\bar{T}_3^{(2)}$:

$$\bar{T}_3^{(2)}F_4^{(2)}\bar{T}_3^{(2)} = \bar{F}_4^{(2)},\quad \bar{F}_4^{(2)} = \begin{bmatrix} \bar{e}_{77} & \bar{e}_{78} \\ \bar{e}_{78} & \bar{e}_{88} \end{bmatrix},\quad \bar{T}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} s_{13} & c_{13} \\ c_{13} & -s_{13} \end{bmatrix},\quad c_{13} = \cos\alpha_{13},\ s_{13} = \sin\alpha_{13}, \tag{21}$$

где $\bar{e}_{77} = e_{77}s_{13}^2 + 2e_{78}c_{13}s_{13} + e_{88}c_{13}^2$, $\bar{e}_{88} = e_{77}c_{13}^2 - 2e_{78}c_{13}s_{13} + e_{88}s_{13}^2$, $\bar{e}_{78} = e_{78}(c_{13}^2 - s_{13}^2) + (e_{77} - e_{88})c_{13}s_{13}$.

Из условия $\bar{e}_{77} = \bar{e}_{88}$ и соотношений (16) получим

$$(e_{77} - e_{88})s_{13}^2 + 4e_{78}c_{13}s_{13} - (e_{77} - e_{88})c_{13}^2 = 0,\ 2e_{78}\sin\beta_2 = (e_{77} - e_{88})\cos\beta_2,\ \operatorname{tg}\beta_2 = \frac{e_{77} - e_{88}}{2e_{78}},\ \beta_2 = 2\alpha_{13},$$

$$e_{77} - e_{88} = 2[(f_{12} - f_{18})s_0 + (f_{14} - f_{16})(1 + s_0)],\quad e_{78} = (f_{12} - f_{18})(1 - s_0) + (f_{14} - f_{16})s_0,$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = p_2,\quad p_2 = \frac{(f_{12} - f_{18})s_0 + (f_{14} - f_{16})(1 + s_0)}{(f_{12} - f_{18})(1 - s_0) + (f_{14} - f_{16})s_0},\ \beta_2 = \operatorname{arctg}(p_2),\quad \alpha_{13} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(p_2).$$

Из (17) и (13) следует, что $F_7^{(2)} = F_2^{(2)}$, так как $g_{11} = l_{33}$, $g_{12} = l_{34}$, $g_{22} = l_{44}$. Соответственно матрица $F_7^{(2)}$ приводится к персимметричному виду аналогично матрице $F_2^{(2)}$, т. е. умножением на оператор $T_1^{(2)}$:

$$T_1^{(2)} = \begin{bmatrix} c_{11} & s_{11} \\ s_{11} & -c_{11} \end{bmatrix},\quad c_{11} = \cos(\alpha_{11}),\ s_{11} = \sin(\alpha_{11}),\quad \alpha_{11} = \pi/8.$$

Таким образом, исходя из соотношений (16)–(21) на шестом шаге алгоритма получим матрицу

$$F_6^{(16)} = T_2^{(16)} F_5^{(16)} T_2^{(16)} = \left[ F_1^{(2)} \oplus \bar{F}_2^{(2)} \oplus \bar{F}_3^{(2)} \oplus \bar{F}_4^{(2)} \oplus \bar{F}_4^{(2)} \oplus \bar{F}_3^{(2)} \oplus \bar{F}_2^{(2)} \oplus F_8^{(2)} \right], \tag{22}$$

где $T_2^{(16)} = \left[ E_2 \oplus T_1^{(2)} \oplus \bar{T}_2^{(2)} \oplus \bar{T}_3^{(2)} \oplus T_3^{(2)} \oplus T_2^{(2)} \oplus T_1^{(2)} \oplus E_2 \right]$.

Так как все матрицы второго порядка, которые включает в себя матрица $F_6^{(16)}$, являются персимметричными, то, умножив матрицу $F_6^{(16)}$ на оператор $H_2^{(16)}$, на заключительном этапе получим диагональную матрицу

$$F_7^{(16)} = H_2^{(16)} F_6^{(16)} H_2^{(16)} = \left[ d_{ij}^{(16)} \delta_{ij} \right]_{16\times 16},$$

где $H_2^{(16)} = \left[ H^{(2)} \oplus \bar{H}^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \right]$.

Следовательно, на основании (13)

$$d_{11}^{(16)} = l_{11} + l_{12} = f_{11} + 2(f_{12} + f_{13} + f_{14} + f_{15} + f_{16} + f_{17} + f_{18}) + f_{19},$$

$$d_{22}^{(16)} = l_{11} - l_{12} = f_{11} - 2(f_{13} - f_{15} + f_{17}) + f_{19}.$$

Из (19) следует, что

$$d_{33}^{(16)} = \bar{l}_{33} - \bar{l}_{34} = (l_{44} - l_{34}) s_{11}^2 + (2l_{34} + l_{44} - l_{33}) c_{11} s_{11} + (l_{33} + l_{34}) c_{11}^2,$$

где

$$l_{44} - l_{34} = f_{11} - 2f_{15} + f_{19} = y_3, \quad l_{33} + l_{34} = y_3, \quad l_{44} - l_{33} = 2(f_{12} - f_{14} - f_{16} + f_{18}) = 2l_{34},$$

$$2l_{34} + l_{44} - l_{33} = 2l_{34} + 2l_{34} = 4l_{34}, \quad y_3 = f_{11} - 2f_{15} + f_{19}.$$

Тогда

$$d_{33}^{(16)} = y_3(c_{11}^2 + s_{11}^2) + 4l_{34} c_{11} s_{11} = y_3 + 2l_{34} \sin(2\alpha_{11}) = y_3 + 2l_{34} \sin(\pi/4) = y_3 + 2l_{34} s_0 =$$

$$= f_{11} + 2((f_{12} - f_{14}) s_0 - f_{15} - (f_{16} - f_{18}) s_0) + f_{19}.$$

Аналогично

$$d_{44}^{(16)} = \bar{l}_{44} + \bar{l}_{34} = (l_{33} + l_{34}) s_{11}^2 + (l_{33} - l_{44} - 2l_{34}) c_{11} s_{11} + (l_{44} - l_{34}) c_{11}^2 =$$

$$= y_3(c_{11}^2 + s_{11}^2) - 4l_{34} c_{11} s_{11} = y_3 - 2l_{34} \sin(2\alpha_{11}) = y_3 - 2l_{34} \sin(\pi/4) = y_3 - 2l_{34} s_0 =$$

$$= f_{11} - 2((f_{12} - f_{14}) s_0 + f_{15} - (f_{16} - f_{18}) s_0) + f_{19}.$$

Исходя из (20) и (15)

$$d_{55}^{(16)} = \bar{e}_{55} + \bar{e}_{56} = (e_{66} + e_{56}) c_{12}^2 + (2e_{56} + e_{55} - e_{66}) c_{12} s_{12} + (e_{55} - e_{56}) s_{12}^2,$$

где

$$e_{66} + e_{56} = f_{11} - f_{19} + (f_{12} - f_{18})(1 - 2s_0) - 2(f_{13} - f_{17}) s_0 + f_{14} - f_{16} = y_5 + y_6,$$

$$y_5 = f_{11} - f_{19} - 2(f_{13} - f_{17}) s_0, \quad y_6 = (f_{12} - f_{18})(1 - 2s_0) + f_{14} - f_{16}, \quad e_{55} - e_{56} = f_{11} - f_{19} -$$

$$-(f_{12}-f_{18})(1-2s_0)-2(f_{13}-f_{17})s_0-(f_{14}-f_{16})=y_5-y_6\,,\quad 2e_{56}+e_{55}-e_{66}=$$

$$=2(f_{12}-f_{18}-(f_{14}-f_{16})(1+2s_0))=2y_7\,,\quad f_{12}-f_{18}-(f_{14}-f_{16})(1+2s_0)\,.$$

Тогда

$$d_{55}^{(16)}=(y_5+y_6)c_{12}^2+2y_7c_{12}s_{12}+(y_5-y_6)s_{12}^2=y_5(c_{12}^2+s_{12}^2)+y_6(c_{12}^2-s_{12}^2)+2y_7c_{12}s_{12}=$$

$$=y_5+y_6\cos\beta_1+y_7\sin\beta_1=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})\left[\sin\beta_1+(1-2s_0)\cos\beta_1\right]-2(f_{13}-f_{17})s_0+$$

$$+(f_{14}-f_{16})\left[\cos\beta_1-(1+2s_0)\sin\beta_1\right]=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})(\sin\beta_1+\gamma_1\cos\beta_1)-2(f_{13}-f_{17})s_0+$$

$$+(f_{14}-f_{16})(\cos\beta_1-\gamma_2\sin\beta_1)\,,\quad \gamma_1=1-2s_0\,,\quad \gamma_2=1+2s_0\,,\quad s_0=\sin(\pi/4)\,.$$

Аналогично

$$d_{66}^{(16)}=\bar{e}_{66}-\bar{e}_{56}=(e_{55}-e_{56})c_{12}^2-(2e_{56}+e_{55}-e_{66})c_{12}s_{12}+(e_{66}+e_{56})s_{12}^2=$$

$$=(y_5-y_6)c_{12}^2-2y_7c_{12}s_{12}+(y_5+y_6)s_{12}^2=y_5(c_{12}^2+s_{12}^2)-y_6(c_{12}^2-s_{12}^2)-2y_7c_{12}s_{12}=$$

$$=y_5-y_6\cos\beta_1-y_7\sin\beta_1=f_{11}-f_{19}-(f_{12}-f_{18})\left[\sin\beta_1+(1-2s_0)\cos\beta_1\right]-2(f_{13}-f_{17})s_0-$$

$$-(f_{14}-f_{16})\left[\cos\beta_1-(1+2s_0)\sin\beta_1\right]=f_{11}-f_{19}-(f_{12}-f_{18})(\sin\beta_1+\gamma_1\cos\beta_1)-2(f_{13}-f_{17})s_0-$$

$$-(f_{14}-f_{16})(\cos\beta_1-\gamma_2\sin\beta_1)\,.$$

На основании (16) и (21) получим

$$d_{77}^{(16)}=\bar{e}_{77}+\bar{e}_{78}=(e_{88}+e_{78})c_{13}^2+(2e_{78}+e_{77}-e_{88})c_{13}s_{13}+(e_{77}-e_{78})s_{13}^2\,,$$

где

$$e_{88}+e_{78}=f_{11}-f_{19}+2(f_{13}-f_{17})s_0+\left[(f_{12}-f_{18})-(f_{14}-f_{16})\right](1-2s_0)=y_9+y_{10}\,,$$

$$y_9=f_{11}-f_{19}+2(f_{13}-f_{17})s_0\,,\quad y_{10}=\left[(f_{12}-f_{18})-(f_{14}-f_{16})\right](1-2s_0)\,,\quad y_{11}=f_{12}-f_{18}+f_{14}-f_{16}\,,$$

$$e_{77}-e_{78}=y_9-y_{10}\,,\, e_{77}-e_{88}=2((f_{12}-f_{18})s_0+(f_{14}-f_{16})(1-s_0))\,,\, 2e_{78}+e_{77}-e_{88}=2(f_{12}-f_{18}+f_{14}-f_{16})\,.$$

Тогда

$$d_{77}^{(16)}=(y_9+y_{10})c_{13}^2+2y_{11}c_{13}s_{13}+(y_9-y_{10})s_{13}^2=y_9(c_{13}^2+s_{13}^2)+y_{10}(c_{13}^2-s_{13}^2)+2y_{11}c_{13}s_{13}=$$

$$=y_9+y_{10}\cos\beta_2+y_{11}\sin\beta_2=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})\left[\sin\beta_2+(1-2s_0)\cos\beta_2\right]+2(f_{13}-f_{17})s_0+$$

$$+(f_{14}-f_{16})\left[\sin\beta_2-(1-2s_0)\cos\beta_2\right]=f_{11}-f_{19}+(f_{12}-f_{18})(\sin\beta_2+\gamma_1\cos\beta_2)+2(f_{13}-f_{17})s_0+$$

$$+(f_{14}-f_{16})(\sin\beta_2-\gamma_1\cos\beta_2)\,.$$

Аналогично

$$d_{88}^{(16)}=\bar{e}_{88}-\bar{e}_{78}=(e_{77}-e_{78})c_{13}^2-(2e_{78}+e_{77}-e_{88})c_{13}s_{13}+(e_{88}+e_{78})s_{13}^2=$$

$$=(y_9-y_{10})c_{13}^2-2y_{11}c_{13}s_{13}+(y_9+y_{10})s_{13}^2=y_9(c_{13}^2+s_{13}^2)-y_{10}(c_{13}^2-s_{13}^2)-2y_{11}c_{13}s_{13}=$$

$$= y_9 - y_{10}\cos\beta_2 - y_{11}\sin\beta_2 = f_{11} - f_{19} - (f_{12} - f_{18})[\sin\beta_2 + (1-2s_0)\cos\beta_2] + 2(f_{13} - f_{17})s_0 -$$

$$-(f_{14} - f_{16})[\sin\beta_2 - (1-2s_0)\cos\beta_2] = f_{11} - f_{19} - (f_{12} - f_{18})(\sin\beta_2 + \gamma_1\cos\beta_2) + 2(f_{13} - f_{17})s_0 -$$

$$-(f_{14} - f_{16})(\sin\beta_2 - \gamma_1\cos\beta_2)\,.$$

Из (22) следует, что $d_{99}^{(16)} = d_{88}^{(16)}$, $d_{10,10}^{(16)} = d_{77}^{(16)}$, $d_{11,11}^{(16)} = d_{66}^{(16)}$, $d_{12,12}^{(16)} = d_{55}^{(16)}$, $d_{13,13}^{(16)} = d_{44}^{(16)}$, $d_{14,14}^{(16)} = d_{33}^{(16)}$.

Исходя из (18)

$$d_{15,15}^{(16)} = g_{33} + g_{34} = f_{11} - 2(f_{13} - f_{15} + f_{17}) + f_{19}\,,$$

$$d_{16,16}^{(16)} = g_{33} + g_{34} = f_{11} - 2(f_{12} - f_{13} + f_{14} - f_{15} + f_{16} - f_{17} + f_{18}) + f_{19} =$$

$$= f_{11} - 2(f_{12} + f_{14} + f_{16} + f_{18} - (f_{13} + f_{15} + f_{17})) + f_{19}\,.$$

Таким образом, собственные значения матрицы $F^{(16)}$ определяются соотношениями

$$d_{11}^{(16)} = f_{11} + 2(f_{12} + f_{13} + f_{14} + f_{15} + f_{16} + f_{17} + f_{18}) + f_{19}\,,$$

$$d_{22}^{(16)} = f_{11} - 2(f_{13} - f_{15} + f_{17}) + f_{19}\,,$$

$$d_{33}^{(16)} = f_{11} + 2((f_{12} - f_{14})s_0 - f_{15} - (f_{16} - f_{18})s_0) + f_{19}\,,$$

$$d_{44}^{(16)} = f_{11} - 2((f_{12} - f_{14})s_0 + f_{15} - (f_{16} - f_{18})s_0) + f_{19}\,,$$

$$d_{55}^{(16)} = f_{11} - f_{19} + (f_{12} - f_{18})(\sin\beta_1 + \gamma_1\cos\beta_1) - 2(f_{13} - f_{17})s_0 + (f_{14} - f_{16})(\cos\beta_1 - \gamma_2\sin\beta_1),$$

$$\gamma_1 = 1 - 2s_0\,, \quad \gamma_2 = 1 + 2s_0\,, \quad s_0 = \sin(\pi/4)\,, \tag{23}$$

$$d_{66}^{(16)} = f_{11} - f_{19} - (f_{12} - f_{18})(\sin\beta_1 + \gamma_1\cos\beta_1) - 2(f_{13} - f_{17})s_0 - (f_{14} - f_{16})(\cos\beta_1 - \gamma_2\sin\beta_1)\,,$$

$$d_{77}^{(16)} = f_{11} - f_{19} + (f_{12} - f_{18})(\sin\beta_2 + \gamma_1\cos\beta_2) + 2(f_{13} - f_{17})s_0 + (f_{14} - f_{16})(\sin\beta_2 - \gamma_1\cos\beta_2),$$

$$d_{88}^{(16)} = f_{11} - f_{19} - (f_{12} - f_{18})(\sin\beta_2 + \gamma_1\cos\beta_2) + 2(f_{13} - f_{17})s_0 - (f_{14} - f_{16})(\sin\beta_2 - \gamma_1\cos\beta_2),$$

$$d_{99}^{(16)} = d_{88}^{(16)}, \quad d_{10,10}^{(16)} = d_{77}^{(16)}, \quad d_{11,11}^{(16)} = d_{66}^{(16)}, \quad d_{12,12}^{(16)} = d_{55}^{(16)}, \quad d_{13,13}^{(16)} = d_{44}^{(16)}, \quad d_{14,14}^{(16)} = d_{33}^{(16)}, \quad d_{15,15}^{(16)} = d_{22}^{(16)},$$

$$d_{16,16}^{(16)} = f_{11} - 2(f_{12} + f_{14} + f_{16} + f_{18} - (f_{13} + f_{15} + f_{17})) + f_{19}\,,$$

а собственное преобразование для данной матрицы имеет вид

$$\Psi^{(16)} = H^{(16)}\left[H^{(8)} \oplus H^{(8)}\right]\left[E_4 \oplus G^{(4)} \oplus G^{(4)} \oplus E_4\right]\left[E_4 \oplus T^{(4)} \oplus T^{(4)} \oplus E_4\right]\times$$

$$\times\left[H^{(4)} \oplus \overline{H}^{(4)} \oplus H^{(4)} \oplus H^{(4)}\right]\left[E_2 \oplus T_1^{(2)} \oplus \overline{T}_2^{(2)} \oplus \overline{T}_3^{(2)} \oplus T_3^{(2)} \oplus T_2^{(2)} \oplus T_1^{(2)} \oplus E_2\right]\times \tag{24}$$

$$\times\left[H^{(2)} \oplus \overline{H}^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)} \oplus H^{(2)}\right],$$

где операторам $T^{(4)}$ и $T_1^{(2)}$ соответствует аргумент $\alpha_{11} = \pi/8$; операторам $T_2^{(2)}$ и $\overline{T}_2^{(2)}$ – аргумент $\alpha_{12} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(p_1)$, $p_1 = \dfrac{(f_{12} - f_{18})s_0 - (f_{14} - f_{16})(1 + s_0)}{(f_{12} - f_{18})(1 - s_0) - (f_{14} - f_{16})s_0}$; операторам $T_3^{(2)}$ и $\overline{T}_3^{(2)}$ – аргумент

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(p_2), \quad p_2 = \frac{(f_{12} - f_{18})s_0 + (f_{14} - f_{16})(1 + s_0)}{(f_{12} - f_{18})(1 - s_0) + (f_{14} - f_{16})s_0}.$$

Из (24) следует, что собственное преобразование $\Psi^{(16)}$ матрицы $F^{(16)}$ имеет факторизованную структуру в виде произведения операторов вращения $H_n$, $Q_n$, $T_n$, каждый из которых является прямой суммой не коммутирующих между собой элементарных матриц вращения. Факторизованная структура разработанного алгоритма предполагает его использование как в задачах анализа и моделирования динамических систем, так и сжатия информации, так как полученное собственное преобразование относится к классу преобразований Карунена – Лоэва. Процедуры сжатия информации представляют собой способы кодирования цифровых изображений на основе унитарных двухмерных преобразований (Фурье, Уолша, Хаара, косинусного, вейвлет, Карунена – Лоэва) [3–6], когда ширина двухмерного спектра уменьшается в результате отбрасывания малых по величине коэффициентов преобразования. Таким образом, ортогональное преобразование изображения частично декоррелирует его отсчеты в пространственно-частотной области. При этом полная декорреляция, а соответственно, и максимальное сжатие достигаются с помощью преобразования Карунена – Лоэва [7]. Однако практическое применение преобразования Карунена – Лоэва было ограничено из-за отсутствия быстрого алгоритма вычисления собственных функций ковариационной матрицы, поэтому в практических приложениях наиболее часто используется его аппроксимация в виде дискретного косинусного преобразования с последующим кодированием в трех основных стандартах на сжатие изображений: МКТТ, JPEG и MPEG, а также в формате CEOS.

В работе [8] использовано ортогональное преобразование, разработанное автором на основе численного примера персимметричной матрицы с целью сжатия полутонового изображения размером $64 \times 64$ элемента и реализованное в среде системы MATLAB.

Эффективность рассмотренного выше алгоритма оценим по количеству арифметических операций, необходимых для его реализации при умножении на произвольный вектор-столбец длиной $N$. В частности, количество операций сложения будет равно $A_N = (2l\,o\,qN - 4)N + 8$, а количество операций умножения $M_N = (2loq_2N - 5)N$.

**Заключение.** Предложенная в работе процедура позволила обобщить разработанный автором подход к вычислению собственных значений на основе численных примеров для максимальной размерности матриц $64 \times 64$, реализованный в операционной среде системы MATLAB, в результате чего удалось получить аналитические соотношения для вычисления собственных значений персимметричной матрицы. Показано, что собственное преобразование имеет факторизованную структуру в виде произведения операторов вращения, каждый из которых является прямой суммой не коммутирующих между собой элементарных матриц вращения Гивенса и Якоби, что позволяет осуществлять декомпозицию исходной матрицы на ряд независимых подматриц и производить распараллеливание вычислительного процесса. Факторизованная структура разработанного алгоритма предполагает его использование в задачах нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений методом преобразования рассеяния [9], а также сжатия информации, так как собственное преобразование относится к классу преобразований Карунена – Лоэва, осуществляющих максимальное сжатие. Получена оценка эффективности алгоритма по количеству операций сложения и умножения. Данный подход основан на использовании свойств симметрии матриц, возможно его обобщение для диагонализации как произвольных персимметричных матриц, так и симметричных матриц размерности $N \times N$.

### Список использованных источников

1. Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт. – М.: Мир, 1983. – 382 с.

2. Демко, В. М. Синтез быстрой процедуры преобразования Карунена – Лоэва для циклических матриц / В. М. Демко. – Минск, 1987. – 12 с. – (Препринт / Акад. наук БССР. Ин-т техн. кибернетики ; № 10).

3. Pizzolante, R. Band ordering and compression of hyperspectral images / R. Pizzolante, B. Carpentieri // Algorithm. – 2012. – Vol. 5. – P. 76–97.

4. Крот, А. М. Дискретные модели динамических систем на основе полиномиальной алгебры / А. М. Крот. – Минск: Навука і тэхніка, 1990. – 312 с.

5. Фликнер, М. Д. Вывод дискретного косинусного преобразования / М. Д. Фликнер, Н. Ахмед // ТИИЭР. – 1982. – Т. 20, № 9. – С. 304–305.

6. Jain, A. K. A Fast Karhunen – Loeve Transform for Finite Discrete Images / A. K. Jain // Proceedings National Elektronics Conf. – Chicago, Illinois, 1974. – P. 322–328.

7. Джайн, А. К. Успехи в области математических моделей для обработки изображений / А. К. Джайн // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69, № 5. – С. 9–39.

8. Демко, В. М. Применение быстрого алгоритма ортогонального преобразования Карунена – Лоэва в задаче сжатия информации / В. М. Демко, М. Н. Долгих // Интеллектуальные системы : сб. науч. тр. – Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. – Вып. 2. – С. 75–83.

9. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. – М.: Мир, 1988. – 694 с.

## Информация об авторе

*Демко Валерий Михайлович* – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории моделирования самоорганизующихся систем Объединенного института проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: selforg@newman.bas-net.by

## Information about the author

*Valery M. Demko* – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher at Laboratory of Self-organization System Modeling, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganova Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: selforg@newman.bas-net.by