

ISSN 1816-0301 (print)
УДК 519.8

Поступила в редакцию 17.11.2017
Received 17.11.2017

И. В. Рубанов, М. С. Баркетов, М. Я. Ковалев

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии
наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ БЕЗ ОСТАНОВОК ПО СЕТИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МАРШРУТОВ

Аннотация. Рассматривается задача моделирования движения объектов по сети пересекающихся маршрутов. Задача формулируется в терминах дизъюнктивного линейного программирования, смешанного целочисленного линейного программирования и теории графов. Рассматривается несколько вариантов задания ограничений на сближение объектов. Доказывается NP-полнота задачи в сильном смысле.

Ключевые слова: маршрутизация, построение расписаний, безопасность полетов, разностная логика, выполнимость формул в теориях, целочисленное линейное программирование, дизъюнктивное программирование

Для цитирования: Рубанов, И. В. Построение расписания непрерывного движения объектов по сети пересекающихся маршрутов / И. В. Рубанов, М. С. Баркетов, М. Я. Ковалев // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 1. – С. 21–33.

I. V. Rubanov, M. S. Barketau, M. Y. Kovalyov

*The United Institute of Informatics Problems of the National Academy
of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

MODELING MOVEMENT OF OBJECTS WITHOUT STOPS IN A NETWORK OF CROSSING ROUTES

Abstract. Modeling of movement of objects without stops in a network of crossing routes is studied. The problem is formulated in terms of disjunctive linear programming, mixed integer linear programming and graph theory. Several variants for representing constraints on convergence of objects are considered. NP-completeness of the problem in the strong sense is proved.

Keywords: routing, scheduling, flight safety, difference logic, satisfiability modulo theories, linear programming, disjunctive programming

For citation: Rubanov I. V., Barketau M. S., Kovalyov M. Y. Modeling Movement of Objects without Stops in a Network of Crossing Routes. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 1, pp. 21–33 (in Russian).

Введение. В настоящей работе рассматривается следующая задача:

1. Задана область S в пространстве R^3 и некоторое множество точек O_1 , либо являющихся внутренними точками S , либо находящихся на ее границе.

2. Задано множество K маршрутов, представляющих собой в общем случае незамкнутые и несамопересекающиеся кривые, каждая из которых соединяет две точки множества O_1 . Маршруты могут иметь общие участки и пересекаться в точках некоторого множества O_2 , такого, что в общем случае $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

3. Задано множество N объектов, $|N| = n$. Объект $i \in N$ движется по заданному для него маршруту $k \in K$ с постоянной скоростью v_i .

4. Для каждого объекта i требуется найти момент времени $t_i^{(k)}$ начала движения по соответствующему маршруту k при следующих ограничениях:

– для каждого объекта i заданы минимальные и максимальные значения моментов времени начала движения T_i^{\min} и T_i^{\max} ;

– расстояние между объектами, находящимися на одном и том же маршруте либо общем участке маршрутов, в каждый момент времени не менее L_0 .

1. Модель, основанная на дизъюнктивном линейном программировании. Сделаем допущение о том, что объекты движутся с постоянными скоростями, и построим математическую модель такой задачи в виде системы неравенств.

Для соблюдения ограничений на сближение двух объектов, движущихся по двум разным маршрутам, должна выполняться система неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(t_{i_1}^{(k_1)} + L_M^{(k_1)} / v_{i_1} \right) - \left(t_{i_2}^{(k_2)} + L_M^{(k_2)} / v_{i_2} \right) \geq L_0 / \min(v_{i_1}, v_{i_2}), \right. \\ \left. \left(t_{i_2}^{(k_2)} + L_M^{(k_2)} / v_{i_2} \right) - \left(t_{i_1}^{(k_1)} + L_M^{(k_1)} / v_{i_1} \right) \geq L_0 / \min(v_{i_1}, v_{i_2}), \right. \\ \left. T_i^{\min} \leq t_i^{(k)} \leq T_i^{\max}, \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

где $L_M^{(k_1)}$ ($L_M^{(k_2)}$) – длина пути от начала маршрута k_1 (k_2) объекта i_1 (i_2) до пересечения в точке $M \in O_2$ с маршрутом k_2 (k_1) объекта i_2 (i_1). Квадратная скобка в системе (1) означает дизъюнктивное объединение неравенств, т. е. требуется выполнение либо одного, либо второго, либо двух ограничений вместе.

Для того чтобы были выполнены условия недопустимости сближения на расстояние менее чем L_0 двух объектов, движущихся по одному маршруту в одном направлении, должна выполняться система неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{i_1}^{(k)} - t_{i_2}^{(k)} \geq L_0 / v_{i_2}, \\ \left[\left(t_{i_2}^{(k)} + L^{(k)} / v_{i_2} \right) - \left(t_{i_1}^{(k)} + L^{(k)} / v_{i_2} \right) \geq L_0 / v_{i_2}, \right. \\ \left. T_i^{\min} \leq t_i^{(k)} \leq T_i^{\max}, \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

где k – общий для двух объектов маршрут, длина которого $L^{(k)}$ и $v_{i_1} \leq v_{i_2}$, т. е. объект с меньшей скоростью должен либо начать движение по маршруту позже другого на величину L_0 / v_{i_2} , либо закончить движение раньше на ту же величину. В случае совпадающего участка двух маршрутов к величинам t_{i_1} и t_{i_2} должно быть прибавлено время движения объекта до начала участка, а величина L_0 / v_{i_2} заменена на L_0 / v_{i_1} для того, чтобы учесть сближение до начала или после окончания общего участка.

При возможном встречном движении объектов по общему маршруту требуется выполнение системы неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(t_{i_1}^{(k)} + L^{(k)} / v_{i_1} \right) - t_{i_2}^{(k)} \geq 0, \right. \\ \left. \left(t_{i_2}^{(k)} + L^{(k)} / v_{i_2} \right) - t_{i_1}^{(k)} \geq 0, \right. \\ \left. T_i^{\min} \leq t_i^{(k)} \leq T_i^{\max}, \right. \end{array} \right. \quad (3)$$

т. е. какой-либо из двух объектов должен закончить движение по маршруту раньше, чем начнет движение другой объект. В случае совпадающего участка двух маршрутов к величинам t_{i_1} и t_{i_2} должно быть прибавлено время движения объекта до ближайшей к точке начала его движения точки участка, а в правой части обоих неравенств следует разместить величину L_0 / v_{i_1} .

Выполнение условий (1)–(3) требуется для каждой пары объектов в каждой точке пересечения их маршрутов (либо для каждого общего участка маршрутов).

Таким образом, математическая модель задачи, сформулированной во введении, при сделанном допущении о постоянных скоростях может быть представлена следующей системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_i - x_j \leq A_{ij}, & (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\ x_j - x_i \leq A_{ji}, \\ X_i^{\min} \leq x_i \leq X_i^{\max}, & i \in N, \end{cases} \quad (4)$$

где P – множество пар индексов, встречающихся в дизъюнктивных парах неравенств; $N = \{1, \dots, n\}$. Следует обратить внимание на то, что, строго говоря, постоянные A_{ij} не могут задаваться произвольно, так как зависят от вида кривых, задающих маршруты, и координат их границ, что определяет время движения объектов до каждой точки пересечения. Далее в этой статье, если не оговорено другое, будет предполагаться, что A_{ij} могут быть заданы произвольно.

Подобная модель может быть линейной и при непостоянных скоростях объектов, если достаточно точно известен закон движения $v_i(t)$ каждого объекта i и значение имеет только разность во времени начала движения для каждой пары объектов. Здесь и далее t без индексов обозначает аргумент функции времени.

В реальной ситуации величины $t_i^{(k)}$, v_i не могут быть соблюдены объектами абсолютно точно. Простейшим способом учета неопределенности этих параметров, сохраняющим линейность и детерминированность предлагаемой модели, может быть внесение в соотношения (1)–(3) допусков. Например, пусть $\Delta_i^{(k)}$ – возможная задержка начала движения объекта i по маршруту k ; \underline{v}_i и \bar{v}_i – известные верхние и нижние границы возможных значений величины v_i соответственно. Тогда, например, для обеспечения наибольшей безопасности соотношения (1) могут быть изменены следующим образом:

$$\begin{cases} \left[\left(t_i^{(k_1)} + L_M^{(k_1)} / \bar{v}_i \right) - \left(t_{i_2}^{(k_2)} + \Delta_{i_2}^{(k_2)} + L_M^{(k_2)} / \underline{v}_{i_2} \right) \right] \geq L_0 / \min(\underline{v}_i, \underline{v}_{i_2}), \\ \left[\left(t_{i_2}^{(k_2)} + L_M^{(k_2)} / \bar{v}_{i_2} \right) - \left(t_i^{(k_1)} + \Delta_i^{(k_1)} + L_M^{(k_1)} / \underline{v}_i \right) \right] \geq L_0 / \min(\underline{v}_i, \underline{v}_{i_2}), \\ T_i^{\min} \leq t_i^{(k)} \leq T_i^{\max}. \end{cases} \quad (5)$$

То же самое изменение может быть сделано и для соотношений (2), (3) – наименьшая возможная левая часть неравенств сравнивается с наибольшей возможной правой частью. Соотношения вида (5) со всеми допусками можем назвать «наихудшим сценарием» для объектов i , j . Для такого сценария можно предложить уменьшить значение допустимого расстояния либо установить его близким к нулю. Например, в авиационной предметной области L_0 можно задать несколько большим (в пределах сотен или десятков метров), чем удвоенная погрешность измерения расстояний объективными средствами наблюдения.

В авиационной предметной области форма маршрутов также не может быть известна абсолютно точно, для движения воздушных судов определены так называемые «воздушные коридоры» прямоугольного сечения. В этом случае область возможного сближения объектов может быть задана в виде сектора (см. разд. 5) и модель может быть линейной при внесении допусков по параметру $L^{(k)}$ коридора k .

Модели движения объектов при ограничениях на сближение, заданных в форме дизъюнктивного объединения неравенств, можно встретить в литературе по математическим методам в приложении к предметной области, связанной с управлением воздушным транспортом [1–4].

Задача (4) может быть отнесена к подклассу задач SMT (satisfiability modulo theories, выполнимость формул в теориях). Модель движения объектов по сети пересекающихся маршрутов ранее была предложена авторами в [5]. В работах [6–8] предлагались некоторые

методы поиска решений задачи (4) и ее подзадач. Далее в разд. 4 настоящей статьи представлено доказательство NP-полноты в сильном смысле такой задачи. Вопрос о сложности и способах решения, возможно, различных вариантов (4), где A_{ij} не могут задаваться произвольно, требует дальнейших исследований. В разд. 6 будет дан простейший пример одного из таких вариантов.

2. Сближение объектов на поверхности. В авиационной предметной области может быть актуальной задача, в которой задается минимальное расстояние для объектов не вдоль маршрутов, а как радиус сближения на плоскости либо на участке сферы. Покажем, что модель с таким ограничением на сближение объектов при движении по пересекающимся маршрутам при сделанных ранее и некоторых дополнительных допущениях также может быть сведена к системе (4).

Пусть по пересекающимся маршрутам, проложенным на участке сферы в плоскостях, проходящих через ее центр, движутся объекты i_1 и i_2 с постоянными в окрестности точки $M \in O_2$ пересечения маршрутов путевыми скоростями v_{i_1} и v_{i_2} и пусть $v_{i_1} \leq v_{i_2}$. Острый угол между маршрутами равен α .

Зафиксируем момент времени t_0 , когда i_2 находится в точке M . На рис. 1 показано положение объектов в моменты времени немного раньше и немного позже t_0 . Величина L – это расстояние между объектами, L_k – расстояние между объектами, когда они оба находятся на маршруте объекта с минимальной скоростью.

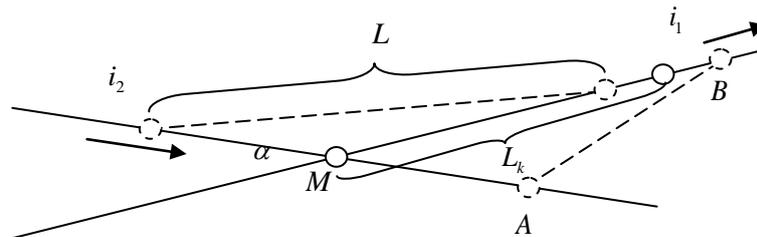


Рис. 1. Сближение объектов, движущихся по пересекающимся маршрутам

Найдем функцию $L = f(L_k, \alpha, v_{i_1}, v_{i_2}, t)$ в окрестности точки M . По сферической теореме косинусов [9]

$$\cos AB = \cos AM \cos BM + \sin AM \sin BM \cos \alpha, \quad (6)$$

где

$$AB = \frac{L_k}{l}, \quad AM = \frac{v_{i_2} t}{l}, \quad BM = \frac{L_k + v_{i_1} t}{l}, \quad (7)$$

величины в числителе выражают длины дуг маршрутов, l – длина одного радиана дуги маршрута. Перепишем (6) с учетом (7):

$$L = l \arccos \left(\cos \frac{v_{i_2} t}{l} \cos \frac{L_k + v_{i_1} t}{l} + \sin \frac{v_{i_2} t}{l} \sin \frac{L_k + v_{i_1} t}{l} \cos \alpha \right). \quad (8)$$

График линейной интерполяции по значениям данной функции в точках $t = -0,1, 0, \dots, 1,5$ при значениях параметров

$$v_{i_1} = 10, \quad v_{i_2} = 15, \quad L_k = 10, \quad l = 111,11 \times \frac{180}{\pi}, \quad \alpha = \pi/8 \quad (9)$$

показан на рис. 2.

Нахождение аналитически точки локальных минимумов функции $L(t)$, приравнивая ее производную по времени к нулю и решая получившиеся уравнения относительно t в общем виде, представляется сложным, значение минимума $L(t)$ в окрестностях точки $t=1$, найденное методом деления отрезка пополам с точностью до 10^{-8} , при указанных значениях параметров (9) составляет $L_{\min}(t) \approx 8,29951421$.

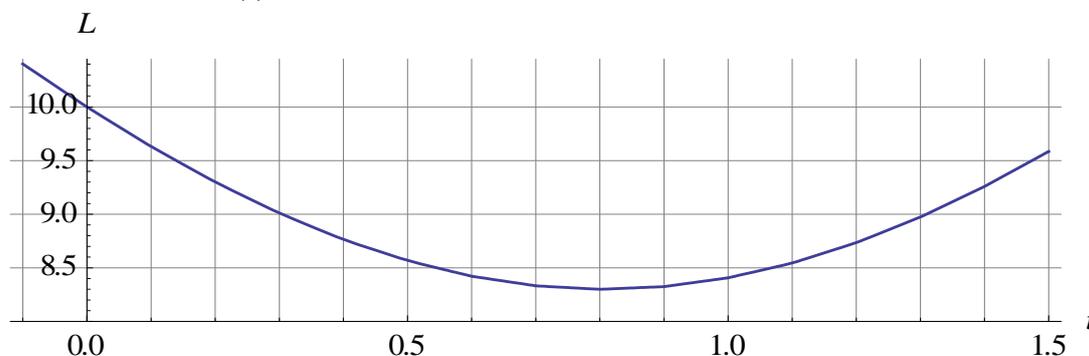


Рис 2. График функции сближения объектов по поверхности сферы в окрестности точки пересечения маршрутов

Допустим, что участки маршрутов в окрестности порядка L_k от точки пересечения являются отрезками прямых на плоскости, и определим функцию $L^{pl} = f^{pl}(L_k, \alpha, v_1, v_2, t)$ в окрестности точки M , аналогичную L . По теореме косинусов

$$L^{pl} = \sqrt{(v_2 t)^2 + (L_k + v_1 t)^2 - 2v_2 t(L_k + v_1 t)\cos\alpha}. \quad (10)$$

Найдем аналитически локальный минимум функции $L^{pl}(t)$, который для данной функции будет являться и глобальным. Возьмем производную $L^{pl}(t)$:

$$L^{pl'}(t) = \frac{v_1^2 t + v_1(L_k - 2v_2 t \cos\alpha) + v_2(-L_k \cos\alpha + v_2 t)}{\sqrt{(v_2 t)^2 + (L_k + v_1 t)^2 - 2v_2 t(L_k + v_1 t)\cos\alpha}}. \quad (11)$$

Найдем t при $L^{pl'}(t) = 0$:

$$t = L_k \frac{v_2 \cos\alpha - v_1}{v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha + v_2^2}. \quad (12)$$

Подставив (12) в (10), получим не зависящую от t формулу для минимального расстояния между объектами:

$$L_{\min}^{pl} = L_k \frac{v_2 \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha + v_2^2}}. \quad (13)$$

Величина (13) при значениях параметров (9) с точностью до 10^{-8} составляет $L_{\min}^{pl} \approx 8,29951768$. Таким образом, ошибка определения минимума по методу (13) при указанных значениях параметров (9) составляет $\Delta = L_{\min}(t) - L_{\min}^{pl} \approx -0,00000347$, относительная

погрешность $\delta = \frac{\Delta}{L_{\min}(t)} \approx -4,2 \times 10^{-7}$. Если в (9) размерности величин расстояний определить как километры, а скоростей – как километры в минуту, то $\Delta \approx -3,5$ мм.

Так как $\min L_{\min}^{pl}$ прямо пропорциональна L_k , можем считать, что если

$$L_k \geq L_{\min}^{pl} \frac{\sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2}}{v_2 \sin \alpha}, \quad (14)$$

то объекты с точностью до сделанного допущения о плоских маршрутах не сблизятся на величину менее чем L_{\min}^{pl} ни в какой момент времени и вместо L_0 в (1) можно подставить величину

$$\tilde{L}_0 = L_0 \frac{\sqrt{v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha + v_2^2}}{v_2 \sin \alpha}. \quad (15)$$

Вопрос точности расчета ограничения на сближение при допущениях о плоских маршрутах по формуле (15) может потребовать отдельного исследования. Очевидно, ошибка должна увеличиваться с уменьшением α при прочих равных параметрах. При одном и том же соотношении скоростей $u = v_2/v_1$ значение L_{\min}^{pl} будет зависеть от L_k , u и α , а время его достижения от момента пребывания объекта i_1 в точке M будет обратно пропорционально скоростям объектов:

$$L_{\min}^{pl} = L_k \frac{uv_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 - 2uv_1^2 \cos \alpha + u^2 v_1^2}} = L_k \frac{u \sin \alpha}{\sqrt{1 - 2u \cos \alpha + u^2}}; \quad (16)$$

$$t = L_k \frac{uv_1 \cos \alpha - v_1}{v_1^2 - 2uv_1^2 \cos \alpha + u^2 v_1^2} = L_k \frac{1}{v_1} \frac{u \cos \alpha - 1}{1 - 2u \cos \alpha + u^2}. \quad (17)$$

Расчет минимума функции (8) с точностью до 10^{-8} при $v_1 = 20$, $v_2 = 30$ дает в результате ту же величину $L_{\min}(t)$.

Подобный (13) вид функции минимального расстояния между равномерно и прямолинейно движущимися объектами предложен в статье [10]. Среди зарубежных источников известны статьи [11, 12], в которых функция расстояния между объектами от времени используется для оценки риска их конфликта.

3. Модель, основанная на теории графов. Представим интервальные ограничения $X_i^{\min} \leq x_i \leq X_i^{\max}$ в системе (4) в виде $(x_i - x_0 \leq A_{0,i}) \wedge (x_0 - x_i \leq A_{i,0}) \wedge (x_0 = 0)$, где $A_{0,i} = X_i^{\max}$, $A_{i,0} = -X_i^{\min}$. Таким образом, (4) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \begin{cases} x_i - x_j \leq A_{ji}, \\ x_j - x_i \leq A_{ij}, \end{cases} & (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\ \begin{cases} x_i - x_0 \leq A_{0,i}, \\ x_0 - x_i \leq A_{i,0}, \end{cases} & i \in N, \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

и определить как задачу разностной логики (difference logic) с дополнительным ограничением-равенством.

Создадим по системе (18) взвешенный смешанный (дизъюнктивный) граф $\{G\}$, в котором каждая вершина i сопоставлена переменной x_i , каждая ориентированная дуга $0, i$ ($i, 0$) – неравенству $x_i - x_0 \leq A_{0,i}$ ($x_0 - x_i \leq A_{i,0}$) и вес дуги равен $A_{0,i}$ ($A_{i,0}$), объединения пар неравенств $(x_i - x_j \leq A_{ji}) \vee (x_j - x_i \leq A_{ij})$ представляются ребрами. В работе [13] предложена классификация задач построения расписаний, которые могут быть представлены в виде смешанных графов, и сформулированы свойства некоторых из них. Рассматриваемая задача представляется смешанным графом, в котором дуги могут присутствовать только между вершиной 0 и какой-либо из остальных, ребра – только между вершинами $i \neq 0$ и $j \neq 0$.

Очевидно, что система (18) разрешима тогда и только тогда, когда найдется хотя бы один конъюнктивно объединенный разрешимый набор неравенств r , состоящий из выбранных по одному неравенству из каждой дизъюнктивной пары в (18) и всех ограничений с переменной x_0 . Каждый такой набор может быть представлен в виде сети ограничений G , получающейся из вышеуказанного смешанного графа $\{G\}$ в результате ориентации ребер, каждому из которых присваивается вес A_{ij} (A_{ji}), если она направлена от вершины i (j) к вершине j (i). Известно [13, 14], что r разрешим тогда и только тогда, когда в G отсутствуют циклы отрицательной длины. Очевидно также, что при отсутствии интервальных ограничений задача (18) становится всегда разрешимой, так как всегда можно выбрать r , которому соответствует ациклическая сеть [13].

Систему (18) назовем полной, если в ней присутствуют дизъюнктивные пары ограничений между всеми возможными парами переменных и оба ограничения между каждой переменной и переменной x_0 , и неполной в противном случае. Такие же термины будем применять и к задаче (4). Неполная система может быть сведена к полной при помощи добавления фиктивных неравенств $(x_i - x_j \leq Q) \vee (x_j - x_i \leq Q)$ и $(x_i - x_0 \leq Q) \wedge (x_0 - x_i \leq Q)$, где $Q \geq \sum |A_{ij}| : A_{ij} < 0, i, j = \overline{0, n}$.

4. NP-полнота задачи в сильном смысле. Рассмотрим задачу распознавания, соответствующую специальному случаю задачи (4). Пусть X_i^{\min}, X_i^{\max} – целые числа, одинаковые для всех переменных x_i , и все $A_{ij} = 1$. Вопрос состоит в том, существует ли решение следующей системы:

$$\begin{cases} |x_i - x_j| \geq 1, & (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\ X^{\min} \leq x_i \leq X^{\max}, & i \in N. \end{cases} \quad (19)$$

Назовем эту задачу $P(19)$ и сведем к ней задачу «раскрашиваемость графа». Сформулируем задачу «раскрашиваемость графа». Дан граф $G_U = G_U(V, E)$. Вопрос задачи о раскрашиваемости заключается в том, можно ли раскрасить все вершины графа не более чем в C цветов так, что никакие две смежные вершины не будут раскрашены в два одинаковых цвета. По графу $G_U = G_U(V, E)$ построим пример задачи (19). Количество N переменных x_i равно количеству вершин графа, $X^{\min} = 1, X^{\max} = C$. Каждому ребру $\{i, j\} \in E$ сопоставим неравенство $|x_i - x_j| \geq 1$.

Представим отрезок $[X^{\min}, X^{\max}]$ в виде объединения непересекающихся незамкнутых слева интервалов и точки $X^{\min} = 1$, о которой далее также будем говорить как об интервале:

$$[X^{\min}, X^{\max}] = [1] \cup (1, 2] \cup \dots \cup (C-1, C]. \quad (20)$$

Ясно, что если набор значений переменных является решением $P(19)$, то значения переменных, связанных дизъюнктивной парой неравенств, находятся в разных интервалах правой части (20).

Докажем теперь, что построенный пример задачи $P(19)$ имеет ответ «да» тогда и только тогда, когда имеет ответ «да» пример задачи «раскрашиваемость графа».

Предположим, что ответ задачи «раскрашиваемость графа» «да». Тогда пусть цвету c соответствует c -й интервал отрезка $[1, C]$. Так как каждой вершине сопоставлен цвет и этот цвет неодинаков для пары вершин, между которыми есть ребро, можно поставить в соответствие вершине цвета c , $1 \leq c \leq C$, правую границу c -го интервала (20), и при этом все неравенства в (19) будут выполняться, т. е. ответ задачи $P(19)$ «да».

Обратно, предположим, что ответ задачи $P(19)$ «да». Согласно вышеприведенному свойству значения любых двух переменных из одного и того же неравенства находятся в разных интервалах (20). Раскрасим вершину i в цвет, соответствующий интервалу, в котором находится переменная x_i . Ясно, что вершины, связанные ребром, будут раскрашены в разные цвета и количество цветов не более C , т. е. ответ в примере задачи «раскрашиваемость графа» «да».

Очевидно, что задача $P(19)$ находится в классе \mathcal{NP} , и, так как задача «раскрашиваемость графа» NP-полна в сильном смысле [15], доказана NP-полнота в сильном смысле специального случая $P(19)$ задачи (4) и справедлива

Теорема. *Задача (4) NP-полна в сильном смысле.*

5. Модель смешанного целочисленного линейного программирования. Одним из способов решения системы (4) может быть метод ветвей и границ, заключающийся в поиске по дереву вариантов выбора одного из ограничений из каждой дизъюнктивной пары с отсечением ветвей, исходящих из узлов с несовместной подсистемой. Более гибкой является модель целочисленного линейного программирования, позволяющая формулировать разнообразные задачи как выяснения существования решения, так и оптимизационные.

Сформулируем (4) в виде набора ограничений задачи смешанного целочисленного линейного программирования:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_i - x_j - Qz_{ij} \leq A_{ji}, \\ x_j - x_i - Q(1 - z_{ij}) \leq A_{ij}, \end{cases} & (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\ X_i^{\min} \leq x_i \leq X_i^{\max}, \\ z_{ij} \in \{0, 1\}, \end{cases} \quad (21)$$

где Q – большое число, здесь и далее выбираемое так, чтобы гарантировать выполнение неравенств при любых значениях x_i . Например, для (21) можно предложить $Q = \max_i (X_i^{\max}) - \min_i (X_i^{\min}) - \min_{i,j} (A_{ij})$.

Следует заметить, что некоторые решатели, например IBM ILOG CPLEX, умеют решать задачи непосредственно в формулировке SMT, добавляя целочисленные переменные автоматически.

К системе (21) можно добавить две переменные x^{\min} и x^{\max} и сформулировать задачу минимизации максимальной разности моментов времени начала движения объектов:

$$\begin{aligned}
 & x^{\max} - x^{\min} \rightarrow \min, \\
 & \begin{cases} x_i - x_j - Qz_{ij} \leq A_{ji}, \\ x_j - x_i - Q(1 - z_{ij}) \leq A_{ij}, \end{cases} \quad (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\
 & \begin{cases} X_i^{\min} \leq x_i \leq X_i^{\max}, \\ x^{\min} \leq x_i \leq x^{\max}, \\ z_{ij} \in \{0, 1\}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Предположим, что каждому объекту может быть назначено несколько возможных маршрутов и каждой паре (i, k) сопоставлен доход $p_i^{(k)}$, получаемый в случае прохождения объекта i по маршруту k . Введем переменные времени $x_i^{(k)}$, равные моментам начала движения объекта i по возможному для него маршруту k , и задача максимизации дохода может быть сформулирована в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \in N} \sum_{k \in K_i} p_i^{(k)} y_i^{(k)} \rightarrow \max, \\
 & \begin{cases} x_i^{(k_1)} - x_j^{(k_2)} - Qz_{ij}^{(k_1 k_2)} - Q(1 - y_i^{(k_1)}) - Q(1 - y_j^{(k_2)}) \leq A_{ji}^{(k_2 k_1)}, \\ x_j^{(k_2)} - x_i^{(k_1)} - Q(1 - z_{ij}^{(k_1 k_2)}) - Q(1 - y_i^{(k_1)}) - Q(1 - y_j^{(k_2)}) \leq A_{ij}^{(k_1 k_2)}, \end{cases} \\
 & (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\
 & \sum_{k \in K_i} y_i^{(k)} \leq 1, \quad i \in N, \\
 & X_i^{\min} \leq x_i \leq X_i^{\max}, \\
 & z_{ij}^{(k_1 k_2)} \in \{0, 1\}, \\
 & y_i^{(k)} \in \{0, 1\},
 \end{cases} \tag{23}$$

где K_i – множество маршрутов, доступное для объекта i . Здесь каждое из разностных ограничений является существенным при $y_i^{(k)} = 1$, а вторая группа ограничений гарантирует, что объект не будет назначен на несколько маршрутов.

В качестве примера расширения функциональности модели сформулируем еще одну задачу, которая может быть актуальной в авиационной предметной области. Предположим, что область S разбита на участки, которые будем называть секторами. Сформулируем группу ограничений, гарантирующих совместное пребывание не более чем m объектов одновременно в каком-либо секторе s области S .

Определим множество O_3 точек пересечения маршрутами границ секторов. Предположим, что какие-либо маршруты k_1 и k_2 пересекают границы сектора s в точках $M_1(k) \in O_3$ и $M_2(k) \in O_3$. Для того чтобы объекты i_1 и i_2 , движущиеся по маршрутам k_1 и k_2 с постоянными скоростями v_{i_1} и v_{i_2} , не находились одновременно в одном секторе, должно выполняться условие

$$\begin{cases} \left[(t_{i_1} + L_{M_1(k_1)}/v_{i_1}) - (t_{i_2} + L_{M_2(k_2)}/v_{i_2}) \right] \geq 0, \\ \left[(t_{i_2} + L_{M_1(k_2)}/v_{i_2}) - (t_{i_1} + L_{M_2(k_1)}/v_{i_1}) \right] \geq 0, \\ T_i^{\min} \leq t_i^{(k)} \leq T_i^{\max}, \end{cases} \tag{24}$$

гарантирующее, что объект i_1 , прошедший путь длиной $L_{M_1(k_1)}^{(k_1)}$ от начала маршрута до точки $M_1(k_1)$, войдет через нее в сектор позже, чем объект i_2 выйдет из сектора через точку $M_2(k_2)$, пройдя до нее путь $L_{M_2(k_2)}^{(k_2)}$, либо, наоборот, объект i_2 войдет в сектор позже, чем выйдет i_1 . Таким образом, для объектов i и j получим пару разностных ограничений уже известного вида, к которой добавим возможность отключения при помощи целочисленных переменных $z_{ij}^{(s)}$:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_i - x_j - Qz_{ij}^{(s)} \leq A_{ji}, \\ x_j - x_i - Qz_{ij}^{(s)} \leq A_{ij}, \end{cases} & (i, j) \in P \subseteq N \times N, \\ X_i^{\min} \leq x_i \leq X_i^{\max}, \\ z_{ij}^{(s)} \in \{0, 1\}. \end{cases} \quad (25)$$

Эту пару ограничений требуется записать по каждой возможной паре прохождений r через сектор s пересекающих его объектов. Обозначим через $I_r^{(s)}$ множество таких прохождений для объекта i и добавим к полученной группе ограничений следующие ограничения:

$$\sum_{j \neq i} z_{ij}^{(s)} \leq m - 1, \quad \forall i \in I_r^{(s)}. \quad (26)$$

Примеры сформулированных задач смешанного целочисленного линейного программирования, по-видимому, целесообразно решать с использованием профессиональных специализированных решателей. Авторами делались попытки решения тестовых примеров различной размерности в коммерческих решателях Wolfram Mathematica и уже упоминавшемся IBM ILOG CPLEX, показавшем значительное преимущество по времени при решении индивидуальных задач вида (21)–(23), (25), (26) и их комбинаций с количеством переменных более пяти.

6. Полиномиально разрешимый случай задачи (4). Ранее в разд. 1 говорилось о том, что в задачах с известными структурой сети и скоростными параметрами объектов правые части неравенств (4) не могут быть заданы произвольно. С этим может быть связано существование полиномиально разрешимых случаев или классов задач предлагаемой модели. Сформулируем рассматриваемый в данном разделе простейший специальный случай основной задачи.

Пусть сеть пересекающихся маршрутов имеет следующий вид. Имеются две группы параллельных маршрутов общим количеством n , количество маршрутов в первой и второй группах m и $n - m$ соответственно. Начальные точки маршрутов расположены на линии, параллельной маршрутам из другой группы (рис. 3). Объекты с номерами $i \in \{1, m\}$ движутся по маршрутам с теми же номерами, расположенным на рисунке горизонтально. Объекты с номерами $i \in \{m + 1, n\}$ движутся по маршрутам, расположенным на рисунке наклонно. Скорости v всех объектов одинаковы.

Обозначим t_i момент времени начала движения объекта i , $T_i^{(j)}$ – время движения объекта i от начала маршрута с тем же номером до узла, сформированного этим маршрутом и маршрутом с номером j . Тогда ограничение на сближение в точке ij пересечения маршрутов i и j можно записать следующим образом:

$$\left| (t_i + T_i^{(j)}) - (t_j + T_j^{(i)}) \right| \geq L_0 / v. \quad (27)$$

Обозначим также T_i^{\max} максимально допустимое значение для $t_i \geq 0$, $T_i^{(j,j\pm k)}$ – время движения объекта i по маршруту с тем же номером между узлами, сформированными этим маршрутом и маршрутами с номерами j и $j \pm k$, т. е. $T_i^{(j\pm k)} = T_i^{(j)} \pm T_i^{(j,j\pm k)}$. К специальному условию, определяющему расположения маршрутов в сети, и условию равенства скоростей объектов добавим условие выполнения соотношения

$$T_i^{(j,j\pm k)} \geq 2L_0 / v. \quad (28)$$

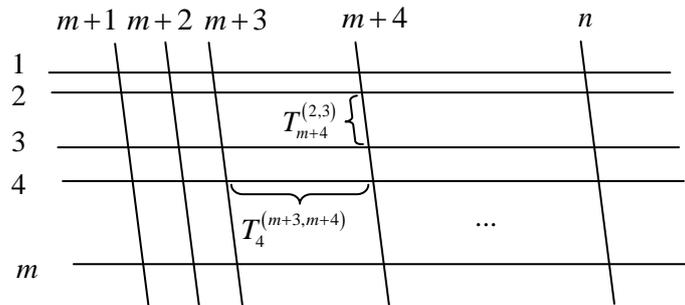


Рис. 3. Сеть из двух групп параллельных маршрутов

Приведенная задача решается с помощью следующего алгоритма:

Шаг 1. Установим все $t_i = 0$, $i \in \{1, n\}$.

Шаг 2. Если после выполнения шага 1 в каком-то узле ij для объектов i и j не выполняется условие (27) и объект $i \in \{1, m\}$ пришел в точку ij вторым (первым), устанавливаем для него

$$t_i = L_0 / v \pm |T_i^{(j)} - T_j^{(i)}| \quad (29)$$

со знаком «–» («+») перед величиной $|T_i^{(j)} - T_j^{(i)}|$ либо правую часть (29) для t_j со знаком «+» («–») там же. Если удалось выбрать переменную так, чтобы применение (29) сохраняло выполнение условий $t_i \leq T_i^{\max}$, $t_j \leq T_j^{\max}$, повторяем шаг 2; если нет, задача не имеет решения. Шаг 2 повторяется до тех пор, пока будут существовать точки, в которых нарушается условие (27).

Корректность алгоритма может быть обоснована следующим образом. Предположим, что после выполнения шага 1 в каком-то узле ij для объектов i и j не выполняется условие (27), т. е. оказывается, что

$$|T_i^{(j)} - T_j^{(i)}| < L_0 / v. \quad (30)$$

Очевидно, что выполнение (29) устраняет нарушение (27) в рассматриваемом узле. Так как для всех переменных $t_i = 0$ все v одинаковы, то в сети определенной в условии структуры выполняется

$$T_j^{(i)} = T_j^{(i)}, \quad T_i^{(j)} = T_{i\pm k}^{(j)} \quad (31)$$

и, с учетом (28), (30), (31),

$$|T_i^{(j\pm k)} - T_{j\pm k}^{(i)}| = |(T_i^{(j)} \pm T_i^{(j,j\pm k)}) - T_j^{(i)}| = |(T_i^{(j)} - T_j^{(i)}) \pm T_i^{(j,j\pm k)}| \geq L_0 / v. \quad (32)$$

Аналогичное соотношение, получающееся из (33) при перемене индексов i и j , тоже верно, т. е. других нарушений ограничения на сближение с участием объекта i или j не существует. Таким образом, точек сети, в которых нарушено условие (27), будет не более чем $\min(m, n - m)$. Значений для t_i или t_j , необходимых для устранения конфликта, меньших, чем определяются по (29), нет, и если для всех возможных новых значений оказывается, что $t_i > T_i^{\max}$, $t_j > T_j^{\max}$, решения для данной точки не существует.

Так как для объектов с номерами $j \in \{\overline{m+1}, n\}$ ($i \in \{\overline{1}, m\}$), с которыми возможно пересечение объекта i (j), моменты времени начала их движения $t_j = 0$ ($t_i = 0$) не были изменены, то, используя (29) с требуемым знаком и (32), можем записать

$$\left| t_i + T_i^{(j \pm k)} - T_{j \pm k}^{(i)} \right| = \left| L_0 / v \pm \left| T_i^{(j)} - T_j^{(i)} \right| + \left(T_i^{(j)} \pm T_i^{(j, j \pm k)} \right) - T_j^{(i)} \right| = \left| L_0 / v \pm T_i^{(j, j \pm k)} \right| \geq L_0 / v, \quad (33)$$

то же верно и при перемене индексов i и j , т. е. нарушений ограничения на сближение (27) в других точках пересечения маршрута i (j) с маршрутами из другой группы не возникает.

На второй итерации шага 2, переходя к рассмотрению другой точки ij с нарушением условия (27), учитывая (32) и (33), также можно быть уверенным, что других нарушений с участием новых объектов i и j существовать не будет, а после выполнения (29) будет справедливо либо (33), либо

$$\left| t_i + T_i^{(j \pm k)} - T_{j \pm k}^{(i)} - t_{j \pm k} \right| = \left| \pm T_i^{(j, j \pm k)} \pm \left| T_{j \pm k}^{(l)} - T_l^{(j \pm k)} \right| \right| \geq L_0 / v, \quad (34)$$

где l – индекс объекта, участвовавшего в конфликте с объектом $j \pm k$ на предыдущей итерации шага 2, то же верно и при перемене индексов i и j , т. е. новых нарушений с участием выбранных объектов также не возникнет. Так как конфликтов с объектами, к которым применялось (29), в дальнейшем не возникает, т. е. для всех потенциально конфликтующих объектов $t_i = 0$, установка для t_i какого-либо из них величины не менее одного из вариантов правой части (29) с требуемым знаком остается необходимым условием устранения конфликта.

Вычислительная сложность приведенного алгоритма обусловливается необходимостью проверки временных разностей в $m \times (n - m) \approx (n/2)^2$ узлах и установки значений времени максимум для $m \approx n/2$ объектов, т. е. может быть оценена как $O(n^2)$.

Приведенный простой пример иллюстрирует возможность существования легко решаемых примеров со специально подобранными условиями, среди которых могут быть определенные типы конфигурации сети, величины интервальных ограничений, скоростные параметры и т. д. Возможно, в дальнейшем на основе приведенного здесь или других простейших примеров будут найдены какие-либо обобщенные комбинации условий задачи, при которых алгоритм ее решения будет полиномиальным. Вообще, модель движения объектов может быть поставлена как задача конфигурирования сети, например поиска таких наборов параметров A_{ij} в системе (4), при которых она становится полиномиально разрешимой.

Заключение. В статье рассмотрена задача моделирования движения объектов без остановок по сети пересекающихся маршрутов при ограничении на минимальное расстояние их сближения. Задача сформулирована в виде модели разностной логики с одним дополнительным ограничением-равенством и произвольными константами в правых частях неравенств. Также предложены несколько вариантов формулировки задачи в терминах целочисленного линейного программирования. Доказана NP-полнота в сильном смысле задачи.

Верхняя оценка временной сложности решения задачи составляет $O(n^3 2^{C_n^2})$, так как можно перебрать все варианты обычной системы разностных неравенств, получаемой из исходной дизъюнктивной системы, и решить каждую обычную систему за время $O(n^3)$. Число C_n^2 равно количеству дизъюнктивных пар исходной системы. Таким образом, вопрос об эффективных способах решения задачи требует дальнейших исследований. Некоторые методы ранее предложены авторами в [7].

Модель сформулирована также в виде нескольких вариантов задач линейно-целочисленного программирования построения допустимого или оптимального по некоторым критериям расписания.

Вопрос о сложности и способах решения задачи, в которой на правые части неравенств накладываются дополнительные ограничения, также требует дальнейших исследований.

Список использованных источников

1. Крыжановский, Г. А. Введение в прикладную теорию управления воздушным движением : учебник для вузов гражданской авиации / Г. А. Крыжановский. – М.: Машиностроение, 1984. – 368 с.
2. Солодухин, В. А. Задачи оптимизации процессов планирования и управления потоками воздушного движения / В. А. Солодухин // Научный вестник МГТУ ГА. – 2009. – № 139. – С. 85–90.
3. Безряков, В. В. Прямые и обратные задачи оптимизации управления потоками воздушного движения в районе аэродрома / В. В. Безряков, Г. А. Крыжановский, В. А. Солодухин // Научный вестник МГТУ ГА. – 2011. – № 171. – С. 109–113.
4. Dell’Olmo, P. A new hierarchical architecture for Air Traffic Management: Optimisation of airway capacity in a Free Flight scenario / P. Dell’Olmo, G. Lulli // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol. 144. – P. 179–193.
5. Рубанов, И. В. Задача выбора маршрутов движения объектов при ограничении на сближение / И. В. Рубанов, М. С. Баркетов, М. Я. Ковалев // Танаевские чтения : докл. Междунар. науч. конф., Минск, 27–29 марта 2014 г. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2014. – С. 136–140.
6. Рубанов, И. В. Малозатратные методы решения системы разностных и интервальных ограничений / И. В. Рубанов, М. С. Баркетов, М. Я. Ковалев // Танаевские чтения : докл. Седьмой Междунар. науч. конф., Минск, 28–29 марта 2016 г. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. – С. 170–174.
7. Рубанов, И. В. Подходы к решению дизъюнктивной системы разностных и интервальных ограничений / И. В. Рубанов, М. С. Баркетов, М. Я. Ковалев // Танаевские чтения : докл. Седьмой Междунар. науч. конф., Минск, 28–29 марта 2016 г. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2016. – С. 175–180.
8. Рубанов, И. В. Методы поиска нескольких решений системы разностных и интервальных ограничений / И. В. Рубанов, М. С. Баркетов, М. Я. Ковалев // Информатика. – 2016. – № 3(51). – С. 67–79.
9. Кранц, П. Сферическая тригонометрия : пер. с нем. / П. Кранц ; под ред. Я.В. Шпильрейна. – 2-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 96 с.
10. Кузнецов, С. В. Прикладные задачи обоснования минимальных интервалов эшелонирования воздушных судов с использованием системы наблюдения ОВД в соответствии с отечественными и международными правилами / С. В. Кузнецов, В. Б. Спрысков // Научный вестник ГосНИИ «Аэронавигация» : сб. науч. тр. – М., 2012. – № 11 : Организация воздушного движения. Использование воздушного пространства. Безопасность полетов. – С. 47–63.
11. Netjasov, F. Framework for airspace planning and design based on conflict risk assessment. Part 2 : Conflict risk assessment model for airspace tactical planning / F. Netjasov // Transportation Research Part C. – 2012. – No. 24. – P. 213–226.
12. Systemic identification of airspace collision risk tipping points using an evolutionary multi-objective scenario-based methodology / S. Alam [et al.] // Transportation Research Part C. – 2013. – No. 35. – P. 57–84.
13. Сотсков, Ю. Н. Построение расписания, допустимого относительно смешанного мультиграфа / Ю. Н. Сотсков, В. С. Танаев // Вес. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1989. – № 4. – С. 94–98.
14. Peron, M. An Abstract Domain Extending Difference-Bound Matrices with Disequality Constraints / M. Peron, N. Halbwachs. – Grenoble, France, 2006. – 15 p.
15. Гэри, М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

Информация об авторах

Рубанов Игорь Владимирович – старший преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин, Белорусская государственная академия авиации (ул. Уборевича, 77, 220096, Минск, Республика Беларусь). E-mail: irubanov@inbox.ru

Баркетов Максим Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: barketau@mail.ru

Ковалев Михаил Яковлевич – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, заместитель генерального директора, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by

Information about the authors

Igor V. Rubanov – Senior Lecturer of the Department of Science Disciplines, Belarusian State Academy of Aviation (77, Uborevicha Str., 220096, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irubanov@inbox.ru

Maksim S. Barketau – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of Mathematical Cybernetics Laboratory, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganova Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: barketau@mail.ru

Mikhail Y. Kovalyov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Deputy General Director, the United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganova Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by