

УДК 537.87

В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ БИИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Разрабатывается методика решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на слоистой структуре, расположенной на плоской магнитодиэлектрической подложке. Слои могут состоять из произвольных биизотропных материалов. На примерах слоистых структур и покрытий из материалов с киральными свойствами показывается точность и эффективность методики и реализующих ее программ. Приводятся результаты моделирования электромагнитных свойств слоистых структур из материалов с нулевыми диэлектрической и магнитной проницаемостями.*

### Введение

Исследования в области взаимодействия электромагнитного излучения со структурно неоднородными средами привели к разработке целого спектра материалов, обладающих новыми уникальными электромагнитными свойствами. К ним относятся композиты, метаматериалы, фотонные и электромагнитные кристаллы [1–5]. Для их внедрения в практику необходимо использовать методы математического моделирования электродинамических задач, позволяющие оптимально учесть электромагнитные свойства материалов. В связи с этим разработана методика решения краевых задач дифракции электромагнитных волн на объектах, в состав которых входят слоистые структуры из биизотропных материалов, является важной и актуальной задачей.

Статья развивает методики, изложенные в [6–9], и посвящена решению задачи рассеяния плоской электромагнитной волны с произвольными поляризацией и направлением распространения поля на структуре, расположенной на магнитодиэлектрической подложке. Под магнитодиэлектрической подложкой понимается однородное материальное полупространство с комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим полупространство  $D_2 (z > h)$  с поверхностью  $\Gamma_2 (z = h)$ , заполненное магнитодиэлектрической средой с комплексными диэлектрической  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  и магнитной  $\mu = \mu_r \mu_0$  проницаемостями. На плоскости  $\Gamma_2$  размещено плоское слоистое покрытие  $D (0 < z < h)$  толщиной  $h$ , состоящее из  $n$  слоев  $\Omega_s (z_s < z < z_{s+1})$  с толщинами  $\Delta_s = z_{s+1} - z_s$ ,  $s = \overline{1, n}$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_{n+1} = h$ ,  $h = \sum_{s=1}^n \Delta_s$ . Слои  $\Omega_s$ , ограниченные плоскостями  $\Gamma^{(s)} (z = z_s)$ ,  $\Gamma^{(s+1)} (z = z_{s+1})$  ( $\Gamma^{(1)} = \Gamma_1$ ,  $\Gamma^{(n+1)} = \Gamma_2$ ), заполнены биизотропными материалами с электромагнитными комплексными параметрами  $\varepsilon_s, \mu_s, G_s, Z_s$ , где  $\varepsilon_s, \mu_s$  – диэлектрические и магнитные проницаемости;  $G_s, Z_s$  – параметры киральности слоев. Из полупространства  $D_1 (z < 0)$ , заполненного средой с параметрами  $\varepsilon_0, \mu_0$  (вакуум), на покрытие  $D$  падает плоская электромагнитная волна  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$  [10, с. 96]:

$$\mathbf{E}_0 = A\mathbf{W}_0^{(-1)} + B\mathbf{W}_0^{(-2)}, \quad \mathbf{H}_0 = h_0(A\mathbf{W}_0^{(-2)} + B\mathbf{W}_0^{(-1)}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{W}_0^{(\mp 1)} = \frac{i}{\lambda}(\alpha_2 \mathbf{e}_x - \alpha_1 \mathbf{e}_y) \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp \nu_0 z)$ ;

$$\mathbf{W}_0^{(\mp 2)} = \frac{1}{k_0} \left( \mp \frac{iv_0}{\lambda} (\alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_y) + \lambda \mathbf{e}_z \right) \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_0 z);$$

$$h_0 = \frac{1}{iZ_0}; \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = k_0 \sin \theta_0; \quad k_0 = \frac{\omega}{c}; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377;$$

$$v_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} = -ik_0 \cos \theta_0;$$

$\omega$  – круговая частота поля;

$A, B$  – произвольные комплексные амплитуды поля;

$\alpha_1 = k_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0$ ,  $\alpha_2 = k_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0$ ,  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ;  $\theta_0, \varphi_0$  – сферические

углы направления распространения первичного поля.

Обозначим:  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  – поле в области  $D_2$ ;  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$  – отраженное поле в области  $D_1$ ;  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$  – суммарное поле в  $D_1$ ;  $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$  – поля в областях  $\Omega_s$ .

Ставится задача дифракции плоской электромагнитной волны  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  на подложке  $D_2$  с многослойным покрытием  $D$  из композитных материалов.

*Краевая задача дифракции.* Для заданного первичного плоского поля  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  (1) требуется определить поля  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$ ;  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ ;  $\mathbf{E}^{(s)}, \mathbf{H}^{(s)}$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}'_1 &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}'_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}'_1 = -i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}'_1 \quad \text{в } D_1; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(s)} &= i\omega (\mu_s \mathbf{H}^{(s)} + Z_s \mathbf{E}^{(s)}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(s)} = -i\omega (\epsilon_s \mathbf{E}^{(s)} + G_s \mathbf{H}^{(s)}) \quad \text{в } \Omega_s; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 &= i\omega \mu \mathbf{H}_2, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_2 = -i\omega \epsilon \mathbf{E}_2 \quad \text{в } D_2, \end{aligned} \quad (2)$$

граничным условиям на плоскостях  $\Gamma^{(s)}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{1\tau} - \mathbf{E}_{\tau}^{(1)})|_{z=0} &= 0, \quad (\mathbf{H}_{1\tau} - \mathbf{H}_{\tau}^{(1)})|_{z=0} = 0; \\ (\mathbf{E}_{\tau}^{(n)} - \mathbf{E}_{2\tau})|_{z=h} &= 0, \quad (\mathbf{H}_{\tau}^{(n)} - \mathbf{H}_{2\tau})|_{z=h} = 0; \\ (\mathbf{E}_{\tau}^{(s-1)} - \mathbf{E}_{\tau}^{(s)})|_{z=z_s} &= 0, \quad (\mathbf{H}_{\tau}^{(s-1)} - \mathbf{H}_{\tau}^{(s)})|_{z=z_s} = 0, \quad s = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

и условиям на бесконечности.

Отраженное поле в области  $D_1$  отыскивается в виде плоских волн:

$$\mathbf{E}'_1 = x_1 \mathbf{W}_0^{(+1)} + y_1 \mathbf{W}_0^{(+2)}, \quad \mathbf{H}'_1 = h_0 (x_1 \mathbf{W}_0^{(+2)} + y_1 \mathbf{W}_0^{(+1)}). \quad (4)$$

В результате решение краевой задачи (2), (3) сводится к определению амплитуд  $x_1, y_1$  поля (4).

## 2. Алгоритм определения отраженного поля

На основании методики работы [7] вычисляется матрица

$$\hat{B}^c = \begin{pmatrix} B_{11}^c & B_{12}^c & B_{13}^c & B_{14}^c \\ B_{21}^c & B_{22}^c & B_{23}^c & B_{24}^c \\ B_{31}^c & B_{32}^c & B_{33}^c & B_{34}^c \\ B_{41}^c & B_{42}^c & B_{43}^c & B_{44}^c \end{pmatrix}.$$

Строятся матрицы

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

матричные элементы которых выражаются через элементы матрицы  $\hat{B}^{(c)}$ :

$$\begin{aligned} l_{11} &= B_{11}^c, & l_{12} &= B_{12}^c, & m_{11} &= B_{13}^c, & m_{12} &= B_{14}^c, \\ l_{21} &= B_{21}^c, & l_{22} &= B_{22}^c, & m_{21} &= B_{23}^c, & m_{22} &= B_{24}^c, \\ n_{11} &= B_{31}^c, & n_{12} &= B_{32}^c, & q_{11} &= B_{33}^c, & q_{12} &= B_{34}^c, \\ n_{21} &= B_{41}^c, & n_{22} &= B_{42}^c, & q_{21} &= B_{43}^c, & q_{22} &= B_{44}^c. \end{aligned}$$

Вычисляются матричный импеданс подложки  $D_2$ :

$$\hat{Z}_{II} = \frac{Z_0 \mu_r}{ik^2 \bar{v}} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2, & \bar{k}^2 - \bar{\alpha}_1^2 \\ \bar{\alpha}_2^2 - \bar{k}^2, & -\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{k}^2 = \varepsilon_r \mu_r, \quad v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v < \frac{\pi}{2}, \quad \bar{v} = v/k_0, \quad \bar{\alpha}_1 = \cos \varphi_0 \sin \theta_0, \quad \bar{\alpha}_2 = \sin \varphi_0 \sin \theta_0,$$

а также вспомогательные матрицы размерности  $2 \times 2$ :

$$\hat{Z}^c = (\hat{Z}_{II} \hat{N} - \hat{L})^{-1} (\hat{M} - \hat{Z}_{II} \hat{Q});$$

$$\hat{C}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} c_{11}^{(\pm)} & c_{12}^{(\pm)} \\ c_{21}^{(\pm)} & c_{22}^{(\pm)} \end{pmatrix}, \quad c_{11}^{(\pm)} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{v}_0}, \quad c_{12}^{(\pm)} = \pm \bar{\alpha}_1, \quad c_{21}^{(\pm)} = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{v}_0}, \quad c_{22}^{(\pm)} = \pm \bar{\alpha}_2;$$

$$\hat{D}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(\pm)} & d_{12}^{(\pm)} \\ d_{21}^{(\pm)} & d_{22}^{(\pm)} \end{pmatrix}, \quad d_{11}^{(\pm)} = \pm \bar{\alpha}_1, \quad d_{12}^{(\pm)} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{v}_0}, \quad d_{21}^{(\pm)} = \pm \bar{\alpha}_2, \quad d_{22}^{(\pm)} = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{v}_0}.$$

Амплитуды отраженного поля (4) вычисляются с помощью формул

$$\mathbf{X}_1 = \hat{R} \mathbf{X}_0; \tag{5}$$

$$\hat{R} = -(\hat{C}^{(+)} - h_0 \hat{Z}^c \hat{D}^{(+)})^{-1} (\hat{C}^{(-)} - h_0 \hat{Z}^c \hat{D}^{(-)}),$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В случае когда подложка  $D_2$  идеально проводящая,

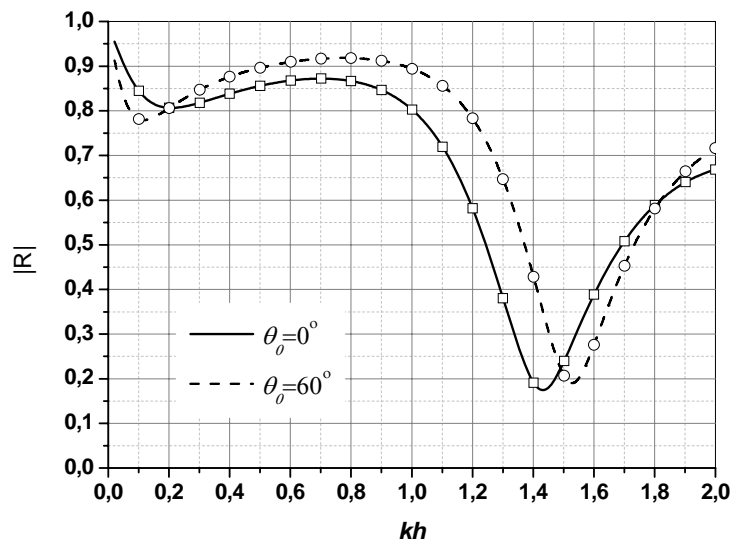
$$\hat{R} = -(\hat{C}^{(+)} + h_0 \hat{L}^{-1} \hat{M} \hat{D}^{(+)})^{-1} (\hat{C}^{(-)} + h_0 \hat{L}^{-1} \hat{M} \hat{D}^{(-)}). \tag{7}$$

### 3. Вычислительный эксперимент

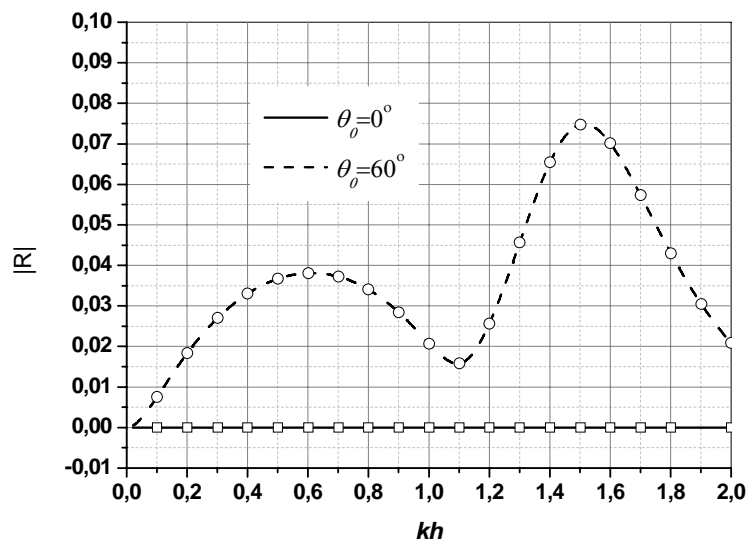
На базе описанной выше методики разработана компьютерная программа для расчета комплексных амплитуд  $x_1, y_1$  отраженного электромагнитного поля (4) для слоистого покры-

тия с произвольным числом слоев из биизотропных материалов при заданных режимах возбуждения (частота, угол падения, поляризация). Методика и реализующая ее программа прошли комплексное тестирование при решении различных тестовых задач.

В качестве тестового примера проанализируем взаимодействие плоской линейно поляризованной электромагнитной волны с одним плоским слоем из кирального материала с параметрами  $\varepsilon_{1r} = 1,0$ ,  $\mu_{1r} = 5,0 + i1,0$ ,  $\chi_1 = 0,7$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1r}\varepsilon_0$ ,  $\mu_1 = \mu_{1r}\mu_0$ ,  $Z_1 = -i\chi_1\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $G_1 = i\chi_1\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ) на идеально проводящей подложке  $D_2$ . Рассмотрен случай, когда вектор магнитного поля параллелен плоскости подложки ( $A = 0$ ,  $B = 1$ ). При построении графиков на рис. 1 использовались формулы (5), (7). Графики соответствуют результатам, полученным в настоящей работе, а квадратные и круговые маркеры соответствуют результатам из [11]. Совпадение результатов, полученных независимо разными авторами, подтверждает адекватность разработанной в статье модели.



а)



б)

Рис. 1. Зависимости коэффициентов отражения поля от толщины кирального слоя:

а) основная поляризация,  $|R| = |y_1|$ ; б) кроссовая поляризация,  $|R| = |x_1|$

Исследованию электромагнитных свойств метаматериалов с нулевыми значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей и ненулевым коэффициентом киральности посвящен ряд работ [12–14]. Установлено, что материалы данного типа обладают важными для практического применения свойствами.

Рассмотрим структуру из двух плоских слоев, толщины которых  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1,5$  см, а материальные параметры  $\varepsilon_{1r} = \varepsilon_{2r} = \mu_{1r} = \mu_{2r} = 10^{-6}$ ;  $\chi_1 = \chi_2 = 0,1$  ( $\varepsilon_s = \varepsilon_{sr}\varepsilon_0$ ,  $\mu_s = \mu_{sr}\mu_0$ ,  $Z_s = -i\chi_s\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $G_s = i\chi_s\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ,  $s = 1, 2$ ). Полупространство  $D_2$  – вакуум. На рис. 2 показаны зависимости коэффициентов отражения по основной и кроссполяризованной компонентам электромагнитного поля от угла падения плоской линейно поляризованной волны. Расчеты проводились на частоте  $f = 10$  ГГц,  $A = 1$ ,  $B = 0$  (вектор электрического поля параллелен плоскости подложки). На этом же рисунке изображены аналогичные зависимости для случая, когда коэффициенты киральности для двух слоев имеют одинаковые по модулю, но разные по знаку значения при равенстве всех остальных материальных параметров. Анализ результатов показывает, что изменение знака коэффициента киральности одного из слоев приводит к существенному расширению углового диапазона радиопрозрачности рассматриваемой двухслойной структуры.

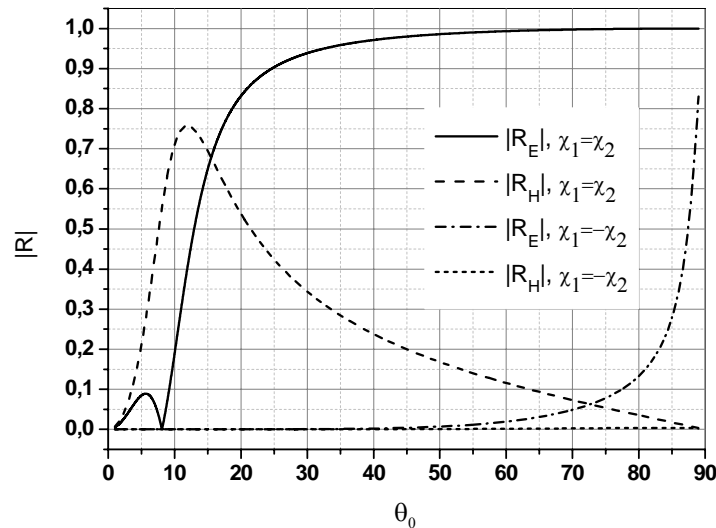


Рис. 2. Угловая зависимость коэффициентов отражения для двухслойной структуры,  $|R_E| = |x_1|$ ,  $|R_H| = |y_1|$

Рассмотрим возможность использования тонкого плоского слоя материала с нулевыми диэлектрической и магнитной проницаемостями и ненулевым коэффициентом киральности для согласования свободного полупространства  $D_1$  с проводящим полупространством  $D_2$ . В качестве проводящего материала будем рассматривать никель, проводимость которого  $\sigma = 1,44 \cdot 10^7$  (См/м), а магнитная проницаемость  $\mu_r = 600$ . Диэлектрическая проницаемость металла определялась по формуле [15]

$$\varepsilon_r \approx 1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 2\pi f}.$$

На поверхности границы раздела сред разместим плоский слой, имеющий толщину  $\Delta_1 = 1$  мм. Эффективные материальные параметры слоя  $\varepsilon_{1r} = 10^{-7}$ ;  $\mu_{1r} = 10^{-7}$ ;  $\chi_1 = 0,01, 0,001, 0,0001$ . Исследовалась зависимость коэффициента отражения от угла падения на частоте  $f = 5$  ГГц для основной и кроссовой поляризаций. Использовались формулы (5), (6). Магнитная компонента падающей волны параллельна плоскости подложки ( $A = 0$ ,  $B = 1$ ). Результаты расчетов представлены на рис. 3.

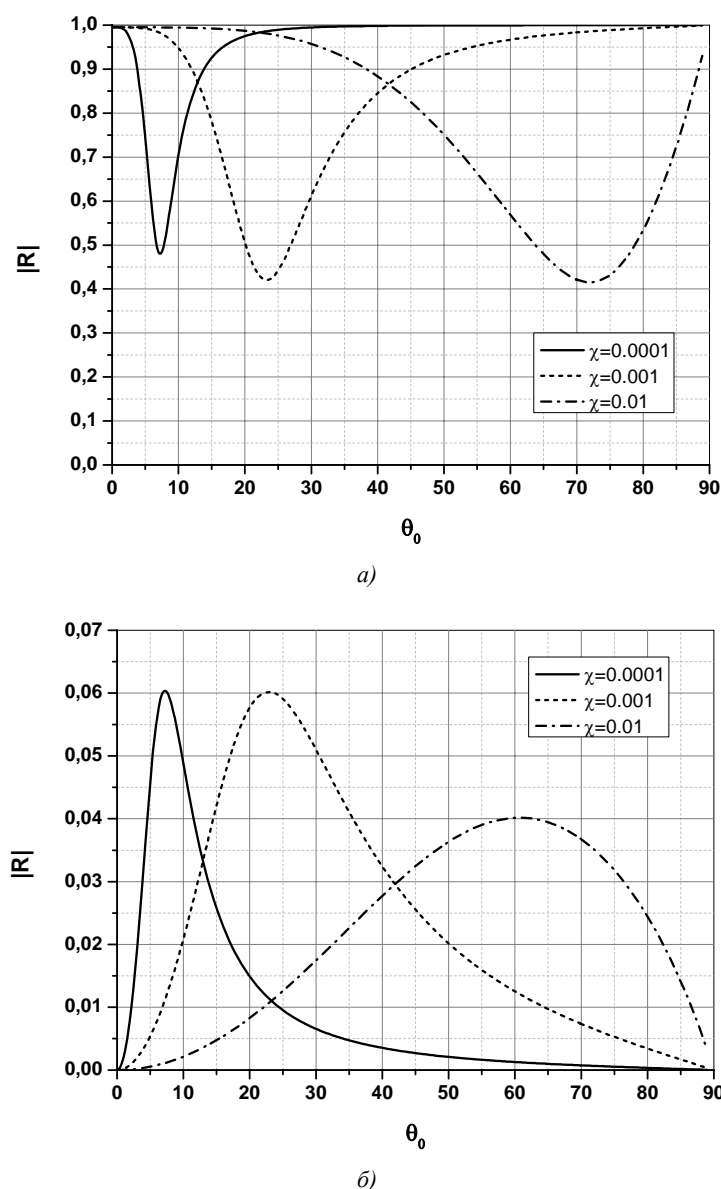


Рис. 3. Угловые зависимости коэффициентов отражения поля для проводящего полупространства с киральным согласующим слоем: а) основная поляризация,  $|R| = |y_1|$ ; б) крсовая поляризация,  $|R| = |x_1|$

Анализ результатов показывает, что использование согласующего слоя позволяет для основной поляризации существенно уменьшить уровень отражения плоской электромагнитной волны. Угловое положение минимума отражения зависит от коэффициента киральности. При отсутствии согласующего слоя коэффициент отражения равен единице практически во всем угловом диапазоне для плоской электромагнитной волны с произвольной поляризацией.

### Заключение

Разработана методика и программные средства для расчета взаимодействия плоской электромагнитной волны с плоскоструктурированными структурами из биизотропных материалов, расположенных на границе раздела свободного пространства и магнитоэлектрической среды. Для решения задачи дифракции использовались импедансные граничные условия на слоистых структурах.

Проведено комплексное тестирование методики, установлена высокая точность и вычислительная эффективность реализующих ее алгоритмов и программ.

Установлено, что слоистые структуры из материалов с нулевыми диэлектрической и магнитной проницаемостями и ненулевым коэффициентом киральности могут использоваться в качестве высокоэффективных экранирующих, радиопрозрачных и согласующих покрытий.

Работа выполнена по заданию № 20110838 ГПНИ «Информатика и космос».

### Список литературы

1. Cui, Tie Jun. *Metamaterials. Theory, Design, and Applications* / Tie Jun Cui, David R. Smith, Ruopeng Liu. – Springer, 2009. – 367 p.
2. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. – Boston : Artech House, 1994. – 324 p.
3. Виноградов, А.П. *Электродинамика композитных материалов* / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
4. Неганов, В.А. Современное состояние электродинамики искусственных киральных сред (обзор) / В.А. Неганов, О.В. Осипов // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 7–33.
5. Гуляев, Ю.В. *Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения* / Ю.В. Гуляев, А.Н. Лагарьков, С.А. Никитов // *Вестник Российской академии наук*. – 2008. – Т. 78, № 5. – С. 438–457.
6. Ерофеенко, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоском слое из биизотропного материала / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // *Вестник БГУ. Сер. 1*. – 2010. – № 2. – С. 11–16.
7. Ерофеенко, В.Т. Алгоритм численного исследования экранирующих свойств многослойных экранов из композитных материалов / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // *Информатика*. – 2010. – № 4 (28). – С. 96–103.
8. Ерофеенко, В.Т. Модели граничных условий электродинамики на экранах и оболочках с распределенными неоднородностями / В.Т. Ерофеенко, Д.П. Тавакколи // *Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2008. – № 1. – С. 49–55.
9. Ерофеенко, В.Т. Импедансные граничные условия для краевых задач дифракции на поверхностях многослойных композитных структур / В.Т. Ерофеенко // *Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2011. – № 3 – С. 40–46.
10. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
11. Неганов, В.А. Отражение электромагнитных волн от плоских киральных структур / В.А. Неганов, О.В. Осипов // *Известия вузов. Радиофизика*. – 1999. – Т. XLII, № 9. – С. 870–878.
12. Lakhtakia, A. An electromagnetic trinity from «negative permittivity» and «negative permeability» / A. Lakhtakia // *Int. J. Millimeter and Infrared Waves*. – 2001. – Vol. 22. – P. 1731–1734.
13. Lakhtakia, A. On perfect lenses and nihility / A. Lakhtakia // *Int. J. Millimeter and Infrared Waves*. – 2002. – Vol. 23. – P. 339–343.
14. Ziolkowski, R.W. Propagation in and scattering from a matched metamaterial having a zero index of refraction / R.W. Ziolkowski // *Phys. Rev. E*. – 2004. – 70:046608.
15. Гольдштейн, Л.Д. *Электромагнитные поля и волны* / Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. – М. : Сов. радио, 1971. – 662 с.

Поступила 18.10.11

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: bsu\_erofeenko@tut.by,  
maly@bsu.by*

**V.T. Erofeenko, S.V. Maly**

**DIFFRACTION OF THE PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE  
ON A PLANE STRATIFIED STRUCTURE OF BIISOTROPIC MATERIALS**

A technique of the solution of the problem of a plane electromagnetic wave diffraction on the stratified structure located on a plane magneto-dielectric substrate was developed. The layers may consist of arbitrary biisotropic materials.

The accuracy and efficiency of the technique was demonstrated on examples of stratified structures and coats made from materials with chiral properties. Results of modeling of electromagnetic properties of stratified structures from materials with zero dielectric permittivity and magnetic permeability are presented.