ИНФОРМАТИКА

2012 апрель-июнь № 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.21

А.Р. Еремина

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ И ДИСЦИПЛИНОЙ DPS

Рассматриваются открытые и замкнутые сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания «дискриминаторное разделение процессора» (DPS). Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся для обслуживания заявок и переключения режимов работы приборов в узлах, при фиксированных математических ожиданиях.

Введение

Системы и сети массового обслуживания уже давно применяются в качестве вероятностных моделей различных информационно-компьютерных систем и сетей [1, 2]. В последнее время они также нашли широкое применение в финансовом секторе, производстве, логистике, технике и т. д.

Для указанных отраслей большое значение имеет изучение сетей, в узлах которых обслуживающие приборы могут работать с различной производительностью, требовать ремонта или замены. Ю.В. Малинковский ввел в рассмотрение сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями [3, 4]. В таких сетях однолинейные узлы могут работать в различных режимах, которые характеризуются разной производительностью обслуживающего прибора. При этом прибор не выходит из строя полностью – уменьшается его производительность. Подобные сети исследовались также в работе [5].

Вместе с распространением сетей в качестве моделей реальных объектов растет и актуальность их исследования. При этом важную роль играет проблема инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний сетей по отношению к функциональному виду распределений величин работ, требующихся для обслуживания заявок и переключения режимов работы приборов в узлах. Это связано с тем, что в реальных сетях указанные распределения часто отличаются от экспоненциального. Поэтому большую практическую значимость имеет изучение таких сетей массового обслуживания, в которых заявки обслуживаются не только по экспоненциальному закону, а обслуживающие приборы в узлах могут полностью или частично выходить из строя, работать с меньшей (или большей) производительностью, требовать ремонта или замены.

Для вычислительных сетей также представляют интерес модели, описывающие эффект разделения средств сети между несколькими требованиями, работами и т. д. При так называемых дисциплинах «разделения процессора» все или некоторые группы заявок обслуживаются одновременно единственным прибором с переменной скоростью обслуживания, принимающей дробные значения и изменяющейся во времени в зависимости от состояния сети. К группе данных дисциплин относятся «обобщенное разделение процессора» (GPS – Generalized Processor-Sharing), «справедливое разделение процессора» (EPS – Egalitarian Processor-Sharing), «дискриминаторное разделение процессора» (DPS – Discriminatory Processor-Sharing) и др. Подробно они рассмотрены в [6]. Свойства инвариантности сетей с разделением процессора исследовались в работах Чанди, Ховарда и Тоуслея [7], Келли [8] и др.

В настоящей работе впервые исследуются открытые и замкнутые сети с многорежимными стратегиями и дисциплиной обслуживания DPS, для которых величины работ по обслуживанию заявок и переключению режимов приборов в узлах имеют произвольные законы распределения, а сами заявки являются разнотипными.

1. Постановка задачи

Рассматриваются открытые и замкнутые сети с многорежимными стратегиями обслуживания, состоящие из N узлов, в которых циркулируют заявки M типов. Принадлежность заявки определенному типу обусловливает количество работы, необходимое для обслуживания данной заявки прибором узла.

В случае открытой сети поступающий поток заявок – простейший с интенсивностью λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в l-й узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(l,u)}$, $l=\overline{1,N}$, $u=\overline{1,M}$ ($\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p_{0(l,u)}=1$). В случае замкнутой сети в ней циркулирует $\sum_{l=1}^{N} n(l)=\overline{N}<\infty$ заявок, где $n(l)$ – общее число заявок в l-м узле.

Обслуживание заявок в узлах осуществляется в соответствии с дисциплиной обслуживания DPS. Поступившая в узел заявка сразу начинает обслуживаться (очередь в ее традиционном понимании отсутствует). В моменты поступления новых или ухода обслуженных заявок происходят скачки скорости обслуживания. При такой дисциплине каждая заявка имеет свою скорость выполнения работы по обслуживанию, которая пропорциональна числу заявок данного типа в рассматриваемом узле и обратно пропорциональна общему числу заявок в узле.

После обслуживания в l-м узле заявка типа u мгновенно и независимо от других заявок направляется в k-й узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть ($\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p_{(l,u)(k,v)}+p_{(l,u)0}=1$ для открытой сети и $\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p_{(l,u)(k,v)}=1$ для замкнутой сети; $l,k=\overline{1,N}$; $u,v=\overline{1,M}$).

В каждом узле l находится единственный обслуживающий прибор, который может работать в r_l+1 режимах 0, 1, ..., r_l, $l=\overline{1,N}$. В качестве основного режима работы полагается режим 0. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в узле не меняется. Переход возможен только на соседние режимы. Под соседними понимаются режимы, номера которых имеют разницу ± 1.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_N(t))$, где $x_l(t)=(\overline{x}_l(t),j_l(t))=(x_{l1}(t),x_{l2}(t),...,x_{lM}(t),j_l(t))$ описывает состояние l-го узла в момент времени t. Здесь $x_{lu}(t)$ – число заявок u-го типа в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ – режим, в котором работает l-й узел в момент времени t. Тогда $x(t)$ обладает не более чем счетным фазовым пространством состояний $X=X_1\times X_2\times...\times X_N$, где $X_l=\{(\overline{x}_l,j_l)=(x_{l1},x_{l2},...,x_{lM},j_l),\ x_{lu}=0,1,2,...;l=\overline{1,N},u=\overline{1,M},j_l=\overline{0,r_l}\}$, в случае открытой сети и конечным фазовым пространством состояний $Y=(x\in X_1\times X_2\times...\times X_N:|x_1|+|x_2|+...+|x_N|=\overline{N}<\infty)$ в случае замкнутой сети. Здесь x_{lu} – число заявок типа u в l-м узле, $|x_l|=\sum_{u=1}^{M} x_{lu}$ – общее число заявок в l-м узле.

Обозначим через $(\overline{0},0)$ такое состояние l-го узла, когда в нем отсутствуют заявки и узел функционирует в режиме работы 0.

Количество работы по обслуживанию поступившей в l-й узел заявки u-го типа является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B_{lu}(\widetilde{u})$ и математическим ожиданием $\tau_{lu}<\infty$.

Пусть в момент времени t состояние l-го узла есть вектор $(\overline{x}_l,j_l)$. Тогда работа по обслуживанию заявки типа u выполняется со скоростью $\alpha_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)=\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\dfrac{x_{lu}}{|x_l|}$, если в узле находится всего $|x_l|$ заявок, x_{lu} заявок типа u и узел работает в режиме j_l

$(l=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}, j_l=\overline{0,r_l})$. При этом полагается, что $\alpha_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)>0$, если $x_{lu}\neq 0$; $\alpha_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)=0$, если $x_{lu}=0$ или $|x_l|=0$.

Пусть $v_l(\overline{x}_l,j_l)$ – скорость выполнения работы по переходу l-го узла из режима j_l в режим j_l+1 ($j_l=\overline{0,r_l-1}$); $\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)$ – скорость выполнения работы по переходу l-го узла из режима j_l в режим j_l-1 ($j_l=\overline{1,r_l}$). Полагается, что $v_l(\overline{x}_l,r_l)=0$, $\varphi_l(\overline{x}_l,0)=0$.

Количество работы, необходимое для перехода прибора l-го узла из основного (нулевого) режима в режим 1, является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(0,\widetilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(0)<\infty$. При этом если в момент времени t состояние узла есть вектор $(\overline{x}_l,0)$, то работа по осуществлению указанного перехода выполняется со скоростью $v_l(\overline{x}_l,0)$.

Для состояния $(\overline{x}_l,j_l)$, у которого $1\leq j_l\leq r_l-1$, количество работы, необходимое для изменения режима (на j_l-1 или j_l+1), также является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l,\widetilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(j_l)<\infty$. Если в момент времени t состояние узла есть $(\overline{x}_l,j_l)$, то работа по изменению режима выполняется со скоростью $v_l(\overline{x}_l,j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)$, при этом с вероятностью $\dfrac{v_l(\overline{x}_l,j_l)}{v_l(\overline{x}_l,j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)}$ прибор l-го узла переходит в режим j_l+1, а с вероятностью $\dfrac{\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)}{v_l(\overline{x}_l,j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)}$ – в режим j_l-1.

Аналогично количество работы, необходимое для перехода прибора l-го узла из режима r_l в r_l-1, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l,\widetilde{u})$ и математическое ожидание $\eta_l(r_l)<\infty$. При этом если в момент времени t состояние узла – $(\overline{x}_l,r_l)$, то работа по осуществлению указанного перехода выполняется со скоростью $\varphi_l(\overline{x}_l,r_l)$.

Полагаем, что матрица маршрутизации $(p_{(l,u)(k,v)})$, $u,v=\overline{1,M}$, неприводима (в случае открытой сети $l,k=\overline{0,N}$, $p_{(0,u)(0,v)}=0$, а в случае замкнутой сети $l,k=\overline{1,N}$).

Тогда система уравнений трафика в случае открытой сети принимает вид

$$\varepsilon_{lu}=\lambda p_{0(l,u)}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\varepsilon_{kv}p_{(k,v)(l,u)},\ l=\overline{1,N},\ u=\overline{1,M}, \tag{1}$$

где ε_{lu} – средняя интенсивность поступления в l-й узел заявок типа u.

Данная система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_{lu},\ l=\overline{1,N},\ u=\overline{1,M})$, что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получим систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [9].

Аналогично в случае замкнутой сети система уравнений трафика

$$\varepsilon_{lu}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\varepsilon_{kv}p_{(k,v)(l,u)},\ l=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}, \tag{2}$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение $(\varepsilon_{lu},\ l=\overline{1,N},\ u=\overline{1,M})$.

При данном описании очередь в традиционном ее понимании отсутствует. Однако заявки, поступающие в узел и уже находящиеся там на обслуживании, можно пронумеровать в зависимости от количества выполненной работы по их обслуживанию. Таким образом, состояние l-го узла в момент времени t может быть уточнено вектором $x_l(t)=(\overline{x}_l(t),j_l(t))=$ $=(x_{l1}(t),x_{l2}(t),...,x_{lM}(t),j_l(t))=(x_{l11}(t),x_{l12}(t),...,x_{l1x_{l1}}(t);x_{l21}(t),x_{l22}(t),...,x_{l2x_{l2}}(t);...;x_{lM1}(t),x_{lM2}(t),...,$

$x_{lMx_{lM}}(t); j_l(t))$, где $x_{lu1}(t)$ – заявка типа u, поступившая в l-й узел первой среди находящихся там в момент времени t заявок типа u; $x_{lux_{lu}}(t)$ – заявка типа u, поступившая в l-й узел последней среди находящихся там в момент времени t заявок типа u, $u=\overline{1,M}$.

Пусть $\psi_{lun}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки типа u, стоящей на позиции n в l-м узле, $\psi_l(t)=(\psi_{l11}(t),\psi_{l12}(t),...,\psi_{l1x_{l1}}(t);$ $\psi_{l21}(t),\psi_{l22}(t),...,\psi_{l2x_{l2}}(t);...;\psi_{lM1}(t),\psi_{lM2}(t),...,\psi_{lMx_{lM}}(t)),\ l=\overline{1,N}$.

Пусть $\xi_{lj_l}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для перехода прибора l-го узла из режима j_l в соседний режим, $\xi(t)=(\xi_{1,j_1(t)}(t),\xi_{2,j_2(t)}(t),...,\xi_{N,j_N(t)}(t))$.

Таким образом,

$$\frac{\partial\psi_{lun}(t)}{\partial t}=-\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\frac{x_{lu}}{|x_l|};$$

$$\frac{\partial\xi_{lj_l}(t)}{\partial t}=-\Big(v_l(\overline{x}_l,j_l)I_{(j_l\neq r_l)}+\phi_l(\overline{x}_l,j_l)I_{(j_l\neq 0)}\Big),$$

когда состояние l-го узла есть $(\overline{x}_l,j_l)$. Здесь I_A – индикатор события A, равный 1, если событие A происходит, и равный 0, если событие A не происходит.

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t)=\big(x(t),\psi(t),\xi(t)\big)$, полученный путем добавления к $x(t)$ непрерывных компонент $\psi(t)=(\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ ...,\ \psi_N(t))$ и $\xi(t)$.

Под $P=\{P(x)\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Введем в рассмотрение стационарные функции распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$:

$$\begin{gathered}F(x,y,z)=F(x,y_{111},y_{112},...,y_{11x_{11}};y_{121},y_{122},...,y_{12x_{12}};...;y_{1M1},y_{1M2},...,y_{1Mx_{1M}};\\ y_{211},y_{212},...,y_{21x_{21}};y_{221},y_{222},...,y_{22x_{22}};...;y_{2M1},y_{2M2},...,y_{2Mx_{2M}};...;\\ y_{N11},y_{N12},...,y_{N1x_{N1}};y_{N21},y_{N22},...,y_{N2x_{N2}};...;y_{NM1},y_{NM2},...,y_{NMx_{NM}};z_{1,j_1},...,z_{N,j_N})=\\ =\lim_{t\to\infty}P\{x(t)=x;\psi_{l11}(t)<y_{l11},\psi_{l12}(t)<y_{l12},...,\psi_{l1x_{l1}}(t)<y_{l1x_{l1}};...;\\ \psi_{lM1}(t)<y_{lM1},\psi_{lM2}(t)<y_{lM2},...,\psi_{lMx_{lM}}(t)<y_{lMx_{lM}},l=\overline{1,N};\\ \xi_{1,j_1(t)}(t)<z_{1,j_1},...,\xi_{N,j_N(t)}(t)<z_{N,j_N}\Big\}.\end{gathered}$$

Обозначим $\vartheta_l(\overline{x}_l,j_l)=v_l(\overline{x}_l,j_l)I_{(j_l\neq r_l)}+\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)I_{(j_l\neq 0)}$.

2. Основной результат для открытой сети

В работе [10] был рассмотрен случай, когда длительности обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение, т. е. для l-го узла $B_{lu}(\tilde{u})=1-\exp\{-\mu_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)\tilde{u}\}$ $(\tilde{u}>0)$, где $\mu_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)$ – интенсивность обслуживания заявок типа u в l-м узле. Тогда $x(t)$ – марковский процесс с непрерывным временем. Установлено, что при выполнении условий

$$\begin{gathered}\nu_l(x_{l1},x_{l2},...,x_{lM},j_l-1)\mu_{lu}(x_{lu},j_l)\varphi_l(x_{l1},...,x_{lu}-1,...,x_{lM},j_l)=\\ =\nu_l(x_{l1},...,x_{lu}-1,...,x_{lM},j_l-1)\mu_{lu}(x_{lu},j_l-1)\varphi_l(x_{l1},x_{l2},...,x_{lM},j_l),\\ x_{lu}\neq 0,\ u=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N},\ j_l=\overline{1,r_l};\end{gathered}\tag{3}$$

$$\sum_{x\in X} q(x)\prod_{l=1}^{N}|x_l|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{1}{\mu_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(\overline{0},k-1)}{\varphi_l(\overline{0},k)}<\infty, \tag{4}$$

$$q(x)=\lambda+\sum_{l=1}^{N}\left(\nu_l(\overline{x}_l,j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)\right)+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{lu}(x_{lu},j_l)\frac{x_{lu}}{|x_l|},$$

марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$P(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)\times\ldots\times p_N(x_N),$$

где $p_l(\overline{x}_l,j_l)=|x_l|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{1}{\mu_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(\overline{0},k-1)}{\varphi_l(\overline{0},k)}p_l(\overline{0},0)$, ε_{lu} находятся из (1), а

$$p_l(\overline{0},0)=\left(\sum_{x_l\in X_l}|x_l|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{1}{\mu_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l(\overline{0},k-1)}{\varphi_l(\overline{0},k)}\right)^{-1}.$$

Для описанных выше открытых сетей в случае, когда количество работы по обслуживанию поступившей в узел заявки имеет произвольную функцию распределения $B_{lu}(\tilde{u})$, а количество работы по переключению режима работы прибора в узле – произвольную функцию распределения $\Phi_l(k,\tilde{u})$, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$\begin{gathered}\nu_l(x_{l1},x_{l2},\ldots,x_{lM},j_l-1)\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\varphi_l(x_{l1},\ldots,x_{lu}-1,\ldots,x_{lM},j_l)=\\=\nu_l(x_{l1},\ldots,x_{lu}-1,\ldots,x_{lM},j_l-1)\alpha_{lu}(x_{lu},j_l-1)\varphi_l(x_{l1},x_{l2},\ldots,x_{lM},j_l),\\ x_{lu}\neq 0,\ u=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N},\ j_l=\overline{1,r_l};\end{gathered} \tag{5}$$

$$\sum_{x\in X} q(x)\prod_{l=1}^{N}|x_l|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{\tau_{lu}}{\alpha_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l\left(\overline{0},k-1\right)}{\varphi_l\left(\overline{0},k\right)}<\infty, \tag{6}$$

где $\left(\varepsilon_{lu},\ l=\overline{1,N},\ u=\overline{1,M}\right)$ *– решение системы уравнений трафика (1);* $q(x)=\lambda+\sum_{l=1}^{N}\left(\eta_l^{-1}(j_l)\nu_l(\overline{x}_l,j_l)+\eta_l^{-1}(j_l)\varphi_l(\overline{x}_l,j_l)+\sum_{u=1}^{M}\frac{\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)}{\tau_{lu}}\frac{x_{lu}}{|x_l|}\right)$ *– интенсивность выхода из состояния x, то процесс* $\zeta(t)$ *эргодичен, при этом стационарные функции распределения вероятностей состояний* $F(x,y,z)$ *определяются по формулам*

$$\begin{gathered}F(x,y,z)=p_1(x_1)p_2(x_2)\times\ldots\times p_N(x_N)\times\\ \times\prod_{l=1}^{N}\prod_{u=1}^{M}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\tau_{lu}^{-1}\int_0^{y_{luw}}\left(1-B_{lu}(\tilde{u})\right)d\tilde{u}\prod_{l=1}^{N}\eta_l^{-1}(j_l)\int_0^{z_{l,j_l}}\left(1-\Phi_l(j_l,\tilde{u})\right)d\tilde{u},x\in X,\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$p_l\left(\overline{x}_l,j_l\right)=\frac{\eta_l(j_l)}{\eta_l(0)}|x_l|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{\tau_{lu}}{\alpha_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l\left(\overline{0},k-1\right)}{\phi_l\left(\overline{0},k\right)}p_l\left(\overline{0},0\right); \tag{8}$$

$$\begin{gathered}p_l\left(\overline{0},0\right)=\eta_l(0)\left[\sum_{x_l\in X_l}|x_l|!\eta_l(j_l)\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{\tau_{lu}}{\alpha_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l\left(\overline{0},k-1\right)}{\phi_l\left(\overline{0},k\right)}\right]^{-1},\\ x\in X,l=\overline{1,N}.\end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Пусть выполнены условия (3), (4), т. е. в случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$. Тогда, по-видимому, и в общем случае при выполнении условий (5), (6) существует стационарное эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент, а $\mu_{lu}^{-1}(x_{lu},|x_l|,j_l)=\tau_{lu}\alpha_{lu}^{-1}(x_{lu},|x_l|,j_l)$. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии 0 (в каждом узле сети нет заявок и прибор работает в нулевом режиме), и периодов занятости сети (в противном случае). Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [11, с. 41], при этом учитывается, что среднее время обслуживания заявки равно среднему времени обслуживания заявки в марковском случае, а среднее время переключения режима прибора равно среднему времени переключения режима прибора в марковском случае.

Для упрощения процедуры доказательства введем в рассмотрение некоторые вспомогательные обозначения и операторы:

$$x\pm e_{lu}=\left(x_1,...,\left(x_{l1},...,x_{lu}\pm 1,...,x_{lM},j_l\right),...,x_N\right);$$

$$x+e_{lu}-e_{kv}=\left(x_1,...,\left(x_{l1},...,x_{lu}+1,...,x_{lM},j_l\right),...,\left(x_{k1},...,x_{kv}-1,...,x_{kM},j_k\right),...,x_N\right);$$

$$x\pm e_l'=\left(x_1,...,\left(x_{l1},...,x_{lM},j_l\pm 1\right),...,x_N\right);$$

$$T^{+}_{(l,u,n)}(y,z_{lun})=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_N),$$

$$\tilde{y}_k=(y_{k11},y_{k12},...,y_{k1x_{k1}};y_{k21},y_{k22},...,y_{k2x_{k2}};...;y_{kM1},y_{kM2},...,y_{kMx_{kM}}),k\neq l,$$

$$\tilde{y}_l=(y_{l11},...,y_{l1x_{l1}};y_{l21},...,y_{l2x_{l2}};...;y_{lu1},...,y_{l,u,n-1},t_{lun},y_{lun},...,y_{lux_{lu}};...;y_{lM1},...,y_{lMx_{lM}}),$$

$$n=\overline{1,x_{lu}+1};$$

$$T^{-}_{(l,u,n)}(y)=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_N),$$

$$\tilde{y}_k=(y_{k11},y_{k12},...,y_{k1x_{k1}};y_{k21},y_{k22},...,y_{k2x_{k2}};...;y_{kM1},y_{kM2},...,y_{kMx_{kM}}),k\neq l,$$

$$\tilde{y}_l=(y_{l11},...,y_{l1x_{l1}};y_{l21},...,y_{l2x_{l2}};...;y_{lu1},...,y_{l,u,n-1},y_{l,u,n+1},...,y_{lux_{lu}};...;y_{lM1},...,y_{lMx_{lM}}),$$

$$n=\overline{1,x_{lu}}.$$

Для $F(x,y,z)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned}
\lambda F(x,y,z)={}&\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{n=1}^{x_{lu}}\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\frac{x_{lu}}{|x_l|}\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y_{lun}}-\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y_{lun}}\right)_{y_{lun}=0}\right)+\\
&+\sum_{l=1}^{N}\vartheta_l(\overline{x}_l,j_l)\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z_{l,j_l}}-\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z_{l,j_l}}\right)_{z_{l,j_l}=0}\right)+\lambda\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{n=1}^{x_{lu}}p_{0(l,u)}B_{lu}(y_{lun})F(x-e_{lu},T^{-}_{(l,u,n)}(y),z)+\\
&+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{n=1}^{x_{lu}+1}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\frac{x_{lu}+1}{|x_l|+1}p_{(l,u)0}\left(\frac{\partial F(x+e_{lu},T^{+}_{(l,u,n)}(y,t_{lun}),z)}{\partial t_{lun}}\right)_{t_{lun}=0}+\\
&+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u,v=1}^{M}\sum_{m=1}^{x_{su}+1}\sum_{n=1}^{x_{lv}}\alpha_{su}(x_{su}+1,j_s)\frac{x_{su}+1}{|x_s|+1}p_{(s,u)(l,v)}B_{lv}(y_{lvn})\left(\frac{\partial F(x+e_{su}-e_{lv},T^{+}_{(s,u,m)}(T^{-}_{(l,v,n)}(y,t_{lvn})),z)}{\partial t_{sum}}\right)_{t_{lvn}=0}+\\
&+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u,v=1}^{M}\sum_{m=1}^{x_{lu}}\sum_{n=1}^{x_{lv}}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\frac{x_{lu}+1}{|x_l|}p_{(l,u)(l,v)}B_{lv}(y_{lvn})\left(\frac{\partial F(x+e_{lu}-e_{lv},T^{+}_{(l,u,m)}(T^{-}_{(l,v,n)}(y,t_{lvn})),z)}{\partial t_{lum}}\right)_{t_{lvn}=0}+\\
&+\sum_{l=1}^{N}\left(v_l(\overline{x}_l,j_l-1)\Phi_l(j_l,z_{l,j_l})\left(\frac{\partial F(x-e_l',y,z)}{\partial z_{l,j_l-1}}\right)_{z_{l,j_l-1}=0}+\phi_l(\overline{x}_l,j_l+1)\Phi_l(j_l,z_{l,j_l})\left(\frac{\partial F(x+e_l',y,z)}{\partial z_{l,j_l+1}}\right)_{z_{l,j_l+1}=0}\right),
\end{aligned}\tag{10}$$

$$x\in X.$$

В полученных уравнениях предполагается, что если аргумент функции $F(x,y,z)$ не принадлежит фазовому пространству, т. е. $x \notin X$, то $F(x,y,z)=0$.

Разобьем эту систему уравнений на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\lambda F(x,y,z)=\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{n=1}^{x_{lu}+1}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\frac{x_{lu}+1}{|x_l|+1}p_{(l,u)0}\left(\frac{\partial F(x+e_{lu},T^{+}_{(l,u,n)}(y,t_{lun}),z)}{\partial t_{lun}}\right)_{t_{lun}=0}; \tag{11}$$

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{n=1}^{x_{lu}}\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\frac{x_{lu}}{|x_l|}\left(\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y_{lun}}\right)_{y_{lun}=0}-\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y_{lun}}\right)=$$
$$=\lambda p_{0(l,u)}B_{lu}(y_{lun})F(x-e_{lu},T^{-}_{(l,u,n)}(y),z)+$$
$$+\sum_{s=1,s\neq l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{m=1}^{x_{su}+1}\alpha_{su}(x_{su}+1,j_s)\frac{x_{su}+1}{|x_s|+1}p_{(s,u)(l,v)}B_{lv}(y_{lvn})\left(\frac{\partial F(x+e_{su}-e_{lv},T^{+}_{(s,u,m)}(T^{-}_{(l,v,n)}(y,t_{lvn})),z)}{\partial t_{sum}}\right)_{t_{lvn}=0}+ \tag{12}$$
$$+\sum_{u=1}^{M}\sum_{m=1}^{x_{lu}}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\frac{x_{lu}+1}{|x_l|}p_{(l,u)(l,v)}B_{lv}(y_{lvn})\left(\frac{\partial F(x+e_{lu}-e_{lv},T^{+}_{(l,u,m)}(T^{-}_{(l,v,n)}(y,t_{lvn})),z)}{\partial t_{lum}}\right)_{t_{lvn}=0};$$

$$\vartheta_l(\overline{x}_l,j_l)\left(\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z_{l,j_l}}\right)_{z_{l,j_l}=0}-\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z_{l,j_l}}\right)=$$
$$=v_l(\overline{x}_l,j_l-1)\Phi_l(j_l,z_{l,j_l})\left(\frac{\partial F(x-e'_l,y,z)}{\partial z_{l,j_l-1}}\right)_{z_{l,j_l-1}=0}+\varphi_l(\overline{x}_l,j_l+1)\Phi_l(j_l,z_{l,j_l})\left(\frac{\partial F(x+e'_l,y,z)}{\partial z_{l,j_l+1}}\right)_{z_{l,j_l+1}=0}, \tag{13}$$
$$l=\overline{1,N}, x\in X.$$

Функции распределения вероятностей $F(x,y,z)$, определенные формулами (7)–(9), являются решением уравнений (11)–(13) и, значит, уравнений (10).

Действительно, подставим (7) в (11) и разделим обе части полученного соотношения на $F(x,y,z)$. Результатом будет являться следствие уравнения трафика $\lambda=\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\varepsilon_{lu}p_{(l,u)0}$.

Подставим (7) в (12), приведем подобные слагаемые и разделим обе части полученного соотношения на $B_{lu}(y_{lun})F(x-e_{lu},T^{-}_{(l,u,n)}(y),z)$. Результатом будет являться уравнение трафика (1).

Наконец, подставим (7) в (13). Учитывая (5), получим тождество.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если выполняются соотношения (5), (6), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $P=\{P(x),x\in X\}$ не зависит от вида функций распределения $B_l(\tilde{u})$, $\Phi_l(k,\tilde{u})$ и имеет вид*

$$P(x)=p_1(x_1)p_2(x_2)\times\ldots\times p_N(x_N),$$

где $p_l(x_l)$ определяются по формулам (8), (9).

3. Основной результат для замкнутой сети

Для замкнутой сети справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Процесс $\zeta(t)$ эргодичен. Если выполняются соотношения*

$$\nu_l(x_{l1},x_{l2},\ldots,x_{lM},j_l-1)\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\varphi_l(x_{l1},\ldots,x_{lu}-1,\ldots,x_{lM},j_l)=$$
$$=\nu_l(x_{l1},\ldots,x_{lu}-1,\ldots,x_{lM},j_l-1)\alpha_{lu}(x_{lu},j_l-1)\phi_l(x_{l1},x_{l2},\ldots,x_{lM},j_l), \tag{14}$$
$$x_{lu}\neq 0,\ u=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N},\ j_l=\overline{1,r_l},\ \sum_{l=1}^{N}|x_l|=\overline{N},$$

то стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x,y,z)$ *определяются по формулам*

$$F(x,y,z)=C(N,M,\overline{N})p_1(x_1)p_2(x_2)\times\ldots\times p_N(x_N)\times$$
$$\times\prod_{l=1}^{N}\prod_{u=1}^{M}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\tau_{lu}{}^{-1}\int_0^{y_{luw}}\left(1-B_{lu}(\tilde{u})\right)d\tilde{u}\prod_{l=1}^{N}\eta_l^{-1}(j_l)\int_0^{z_{l,j_l}}\left(1-\Phi_l(j_l,\tilde{u})\right)d\tilde{u},x\in Y\,,$$

где

$$p_l\left(\overline{x}_l,j_l\right)=\eta_l(j_l)\left|x_l\right|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{\tau_{lu}}{\alpha_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l\left(\overline{0},k-1\right)}{\phi_l\left(\overline{0},k\right)},\tag{15}$$

ε_{lu} *находятся из (2) и*

$$C(N,M,\bar{N})^{-1}=\sum_{\substack{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_N|\ge 0,\\ |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_N|=\bar{N}}}\sum_{j_1=0}^{r_1}\sum_{j_2=0}^{r_2}\ldots\sum_{j_N=0}^{r_N}\prod_{l=1}^{N}\eta_l(j_l)\left|x_l\right|!\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\frac{\tau_{lu}}{\alpha_{lu}(w,j_l)}\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l\left(\overline{0},k-1\right)}{\phi_l\left(\overline{0},k\right)},\tag{16}$$

$$l=\overline{1,N},\;\; x\in Y\,.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Процесс* $x(t)$ *эргодичен. Если выполняются соотношения (14), то его стационарное распределение* $P=\{P(x),x\in Y\}$ *не зависит от функционального вида распределений* $B_l(\widetilde{u})$, $\Phi_l(k,\widetilde{u})$ *и имеет вид*

$$P(x)=C(N,M,\overline{N})p_1(x_1)p_2(x_2)\times\ldots\times p_N(x_N)\,,$$

где $p_l(x_l)$ *определяются по формулам (15), а* $C(N,M,\overline{N})$ *– по формуле (16).*

Заключение

Исследованы открытые и замкнутые сети массового обслуживания, в которых циркулируют заявки нескольких типов. В случае открытой сети входной поток заявок – простейший. В каждом из узлов находится единственный прибор, который может работать в нескольких режимах. Дисциплина обслуживания заявок прибором – «дискриминаторное разделение процессора» (DPS). Количество работы по обслуживанию заявки и количество работы по переключению режима прибора в узле являются случайными величинами с произвольными функциями распределения.

Установлены условия нечувствительности стационарного распределения вероятностей состояний указанных сетей к виду законов распределения величин работ, требующихся на обслуживание заявок и переключение режимов приборов в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов. Также определено, что стационарное распределение сети имеет форму произведения, где каждый множитель есть стационарное распределение изолированного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду с пуассоновским входящим потоком. Этот результат был получен с помощью метода расширения фазового пространства, когда процесс, описывающий поведение сети (вообще говоря, немарковский), дополняют непрерывными компонентами.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Ю.В. Малинковскому, за полезные обсуждения и помощь в анализе полученных результатов.

Список литературы

1. Вишневский, В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневский. – М. : Техносфера, 2003. – 506 с.

2. Маталыцкий, М.А. Теория массового обслуживания и ее применения / М.А. Маталыцкий, О.М. Тихоненко, А.В. Паньков. – Гродно : ГрГУ, 2008. – 771 с.

3. Малинковский, Ю.В. Замкнутые информационные сети с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Материалы I Междунар. конф. «Информационные системы и технологии» (IST'2002). – Минск, 2002. – Ч. 1. – С. 324–328.

4. Малинковский, Ю.В. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 129–134.

5. Нуеман, А.Ю. Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками / А.Ю. Нуеман // Вестник ТГУ. – 2002. – № 1. – С. 90–93.

6. Яшков, С.Ф. Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора / С.Ф. Яшков // Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика. – М. : ВИНИТИ, 1990. – № 29. – С. 3–82.

7. Chandy, K.M. Product form and local balance in queueing networks / K.M. Chandy, I.H. Howard, D.F. Towsley // J-ACM. – 1977. – № 2. – P. 250–263.

8. Kelly, F.P. Networks of queues / F.P. Kelly // Adv. Appl. Probability. – 1976. – № 2. – P. 416–432.

9. Jackson, J.R. Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

10. Летунович, Ю.Е. Стационарное распределение вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и несколькими типами заявок : автореф. дис. … к-та физ.-мат. наук: 01.01.05 / Ю.Е. Летунович. – Минск : БГУ, 2011. – 22 с.

11. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М. : Физматлит, 2004. – 772 с.

Поступила 15.02.12

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы,
Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: a.eremina@grsu.by

A.R. Eryomina

INVARIANCE OF STATIONARY STATE DISTRIBUTION OF HETEROGENEOUS QUEUING NETWORKS WITH MULTIMODE STRATEGIES AND DPS DISPATCHING RULE

Open and closed queueing networks with multimode strategies, polytypic demands and Discriminatory Processor-Sharing dispatching rule are considered. It is established that the stationary distribution is invariant with regard to functional form of distribution of work quantities, which are required for servicing and switching, provided that the expectation values are fixed.