ИНФОРМАТИКА

2012 апрель-июнь № 2

УДК 519.8

В.А. Емеличев, В.В. Коротков

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ПРОЕКТОВ БИКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ ВАЛЬДА И СЭВИДЖА

Находятся нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля двухкритериальной инвестиционной булевой задачи с максиминным критерием эффективности (доходности) и минимаксным критерием риска упущенной выгоды.

Введение

В работе [1] были получены оценки радиуса устойчивости лексикографически оптимального портфеля многокритериальной инвестиционной булевой задачи Марковица с упорядоченными по важности минимаксными критериями рисков Сэвиджа при условии, что в пространствах портфелей, рисков и состояний рынка задана одна и та же октаэдральная норма l_1. В настоящей работе устанавливаются нижняя и верхняя достижимые (неулучшаемые) оценки радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля бикритериальной инвестиционной задачи с максиминным критерием Вальда для доходности и минимаксным критерием Сэвиджа для риска упущенной выгоды. При этом анализ устойчивости портфеля к возмущениям исходных данных (оценок эффективности и меры риска) проводится в предположении, что в пространстве портфелей задана октаэдральная норма l_1, а в пространстве состояний рынка – чебышевская норма l_∞. Применение таких норм существенно видоизменяет технику доказательства оценок радиуса устойчивости по сравнению с аналогичной техникой, использованной в [1]. Кроме того, паретовский принцип оптимальности по сравнению с лексикографическим требует учета двух критериев, а не одного первого, как в [1]. И, наконец, разнородность критериев (MAXMIN и MINMAX) создает дополнительную громоздкость в изложении доказательств теорем в настоящей статье.

Отметим, что анализу устойчивости в области теории расписаний и разработке методов решения оптимизационных задач с неопределенными параметрами посвящен ряд работ белорусских авторов [2, 3].

1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим бикритериальный вариант булевой задачи управления инвестициями, основанный на портфельной теории Марковица [4]. Для этого введем ряд обозначений. Пусть $N_n = \{1,2,\ldots,n\}$ – альтернативные инвестиционные проекты (активы); N_m – возможные (прогнозные) состояния (ситуации) рынка. Отсюда следует, что N_m – множество вариантов сценариев развития. Пусть $x_j = 1$, если проект $j \in N_n$ реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае. Инвестиционным портфелем назовем булев вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Через $X \subset \{0,1\}^n$ будем обозначать множество всех возможных инвестиционных портфелей, т. е. тех портфелей, реализация которых не превосходит начального капитала инвестора.

Для каждого состояния рынка $i \in N_m$ инвестиционный портфель $x \in X$ будем оценивать двумя показателями (аддитивными функциями): $\sum\limits_{j \in N_n} e_{ij} x_j$ и $\sum\limits_{j \in N_n} r_{ij} x_j$. Здесь e_{ij} – ожидаемая оценка эффективности (чистый доход) проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$; r_{ij} – мера риска, которому подвергается инвестор, выбирая проект $j \in N_n$ при i-м состоянии рынка. Отметим, что существует несколько подходов при оценке эффективности и риска инвестиционных проектов (см., например, [5–8]). Таким образом, исходными данными задачи являются две матрицы – матрица эффективности $E=[e_{ij}]\in \mathbf{R}^{m\times n}$ и матрица рисков $R=[r_{ij}]\in \mathbf{R}^{m\times n}$.

Желание инвестора выбрать наиболее прибыльный портфель всегда вступает в противоречие с желанием обеспечить вложения с наименьшим риском. Эти обстоятельства вместе с неопределенностью рынка, недостаточной осведомленностью об условиях, в которых будет проходить выбор проектов, приводят к необходимости использования двух критериев – максиминного критерия эффективности Вальда [9, 10]

$$e(x,E)=\min_{i\in N_m} E_i x=\min_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n} e_{ij}x_j \to \max_{x\in X}$$

и минимаксного критерия риска Сэвиджа [11]

$$r(x,R)=\max_{i\in N_m} R_i x=\max_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n} r_{ij}x_j \to \min_{x\in X},$$

где $E_i=(e_{i1},e_{i2},\dots,e_{in})$, $R_i=(r_{i1},r_{i2},\dots,r_{in})$ – i-е строки матриц E и R соответственно.

Таким образом, согласно критерию Вальда инвестор в условиях непредсказуемости состояния рынка выбирает тот портфель, при котором величина суммарной эффективности принимает наибольшее значение в самой неблагоприятной ситуации, а именно тогда, когда эффективность минимальна. Следуя критерию Сэвиджа (критерию «узкого места»), инвестор также проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя риск портфеля в предположении, что рынок находится в самом невыгодном для него состоянии. Очевидно, что оба подхода могут быть продиктованы лишь крайним пессимизмом в оценке рыночной ситуации и их использование целесообразно только тогда, когда речь идет о необходимости достижения гарантированного результата.

Отметим, что в теории оптимизации задачи с минимаксными и максиминными критериями занимают видное место [12–14]. Эти критерии характерны, в частности, для моделей игрового характера [15, 16]. Минимаксная концепция оптимизации реализуется и как способ наилучшего чебышевского приближения функции.

Под бикритериальной инвестиционной булевой задачей $Z^m(E,R)$ будем понимать задачу поиска множества парето-оптимальных инвестиционных портфелей (множества Парето)

$$P^m(E,R)=\{x\in X:\ \nexists x'\in X\ \ (x \underset{E,R}{\vdash} x')\},$$

где символ $\underset{E,R}{\vdash}$ обозначает бинарное отношение, задаваемое на множестве портфелей X формулой

$$x \underset{E,R}{\vdash} x' \ \Leftrightarrow\ e(x,E)\le e(x',E)\ \ \&\ \ r(x,R)\ge r(x',R)\ \ \&\ \ f(x,E,R)\ne f(x',E,R).$$

Здесь $f(x,E,R)=(e(x,E),r(x,R))$.

Очевидно, что частным случаем инвестиционной задачи $Z^m(E,R)$ (при $m=1$) является двухкритериальная задача линейного булева программирования. Такой случай можно трактовать как ситуацию, при которой состояние рынка не вызывает сомнений.

В пространстве портфелей $\mathbf{R}^n$ зададим октаэдральную норму l_1, а в пространстве рыночных состояний $\mathbf{R}^m$ – чебышевскую норму l_∞, т. е. для любой матрицы $D\in \mathbf{R}^{m\times n}$ положим

$$\|D_i\|_1=\sum_{j\in N_n}|d_{ij}|,\ i\in N_m;$$

$$\|D\|_\infty=\max_{i\in N_m}\|D_i\|_1=\max_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n}|d_{ij}|,$$

где D_i – i-я строка матрицы D. Таким образом, $\|D_i\|_1 \le \|D\|_\infty$ для любого индекса $i \in N_m$. Кроме того, используя очевидные при $x \in \mathbf{E}^n$ неравенства $D_i x \ge -\|D_i\|_1$, $i \in N_m$, для любых портфелей x и x' выводим

$$D_i x - D_{i'} x' \ge -2\|D\|_\infty, \quad i, i' \in N_m. \qquad (1)$$

Будем исследовать устойчивость парето-оптимального инвестиционного портфеля $x^0 \in P^m(E,R)$ к возмущениям параметров векторного критерия $f(x,E,R)$ путем прибавления к паре исходных матриц (E,R) пары возмущающих матриц множества

$$\Omega(\varepsilon) = \{(E',R') \in \mathbf{R}^{m\times n} \times \mathbf{R}^{m\times n} : \quad \|E'\|_\infty < \varepsilon \ \& \ \|R'\|_\infty < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

В этом контексте $Z^m(E+E',R+R')$ – возмущенная задача с множеством Парето $P^m(E+E',R+R')$.

По аналогии с [17–19] радиусом устойчивости инвестиционного портфеля $x^0 \in P^m(E,R)$ назовем число

$$\rho = \rho^m(x^0,E,R) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \ne \varnothing; \\ 0, & \text{если } \Xi = \varnothing, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \ \forall (E',R') \in \Omega(\varepsilon) \quad (x^0 \in P^m(E+E',R+R'))\}$. Таким образом, радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений исходных данных задачи (элементов матриц E и R), при которых сохраняется парето-оптимальность портфеля x^0.

Методом от противного нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть портфель $x^0 \in P^m(E,R)$, $\varepsilon > 0$. Если при каждой паре возмущающих матриц $(E',R') \in \Omega(\varepsilon)$ и любом портфеле $x \ne x^0$ справедливо хотя бы одно из неравенств*

$$e(x^0,E+E') > e(x,E+E')\,; \qquad (2)$$

$$r(x^0,R+R') < r(x,R+R')\,, \qquad (3)$$

то x^0 является парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи $Z^m(E+E',R+R')$, т. е. $x^0 \in P^m(E+E',R+R')$ при $(E',R') \in \Omega(\varepsilon)$.

2. Оценки радиуса устойчивости

Для портфеля $x^0 \in P^m(E,R)$ задачи $Z^m(E,R)$ введем обозначение

$$\varphi = \min\{\psi(x^0,x) : \ x \in X \setminus \{x^0\}\},$$

где

$$\psi(x^0,x) = \max\{\max_{i\in N_m} \min_{i'\in N_m} (E_{i'}x^0 - E_i x), \min_{i\in N_m} \max_{i'\in N_m} (R_{i'}x - R_i x^0)\}.$$

Поскольку $x^0 \in P^m(E,R)$ и для каждого портфеля $x \ne x^0$ выполняется соотношение

$$\psi(x^0,x) = \max\{e(x^0,E) - e(x,E), \ r(x,E) - r(x^0,E)\} \ge 0, \qquad (4)$$

то очевидно неравенство $\varphi \ge 0$.

Теорема 1. *Для радиуса устойчивости* $\rho^m(x^0, E, R)$ *любого парето-оптимального портфеля* x^0 *бикритериальной инвестиционной задачи* $Z^m(E,R)$, $m \ge 1$, *справедливы оценки*

$$\varphi/2 \le \rho^m(x^0, E, R) \le \varphi.$$

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho \ge \varphi/2$, которое очевидно при $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ для любого портфеля $x \in X \setminus \{x^0\}$ выполняется неравенство $\psi(x^0, x) \ge \varphi$. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Портфель $x \in X \setminus \{x^0\}$ таков, что ввиду (4) имеет место неравенство

$$e(x^0, E) - e(x, E) \ge \varphi.$$

Тогда, учитывая (1), для любой матрицы $E' \in \mathbf{R}^{m\times n}$ с нормой $\|E'\|_\infty < \varphi/2$ выводим

$$e(x^0, E+E') - e(x, E+E') = \min_{i\in N_m}(E_i + E'_i)x^0 - \min_{i\in N_m}(E_i + E'_i)x =$$
$$= \max_{i\in N_m}\min_{i'\in N_m}(E_{i'}x^0 - E_i x + E'_{i'}x^0 - E'_i x) \ge e(x^0, E) - e(x, E) - 2\|E'\|_\infty \ge$$
$$\ge \varphi - 2\|E'\|_\infty > 0,$$

т. е. справедливо неравенство (2).

Случай 2. Портфель $x \in X \setminus \{x^0\}$ таков, что ввиду (4) выполняется неравенство

$$r(x, E) - r(x^0, E) \ge \varphi.$$

Отсюда, вновь учитывая (1), для любой матрицы $R' \in \mathbf{R}^{m\times n}$ с нормой $\|R'\|_\infty < \varphi/2$ получаем

$$r(x, R+R') - r(x^0, R+R') = \max_{i\in N_m}(R_i + R'_i)x - \max_{i\in N_m}(R_i + R'_i)x^0 =$$
$$= \min_{i\in N_m}\max_{i'\in N_m}(R_{i'}x - R_i x^0 + R'_{i'}x - R'_i x^0) \ge r(x, R) - r(x^0, R) - 2\|R'\|_\infty \ge$$
$$\ge \varphi - 2\|R'\|_\infty > 0,$$

т. е. справедливо неравенство (3).

Итак, для любого портфеля $x \ne x^0$ и любой пары возмущающих матриц $(E', R') \in \Omega(\varphi/2)$ выполняется одно из неравенств (2) или (3). Поэтому согласно лемме заключаем, что портфель $x^0 \in P^m(E+E', R+R')$ при любой паре возмущающих матриц $(E', R') \in \Omega(\varphi/2)$, т. е. $\rho \ge \varphi/2$.

Далее докажем неравенство $\rho \le \varphi$. Согласно определению числа φ существует такой портфель $x^* \in X \setminus \{x^0\}$, что справедливо равенство $\psi(x^0, x^*) = \varphi$. Отсюда с учетом (4) имеем

$$e(x^0, E) - e(x^*, E) \le \varphi; \tag{5}$$

$$r(x^*, R) - r(x^0, R) \le \varphi. \tag{6}$$

Так как $x^* \ne x^0$, то найдется такой индекс $l \in N_n$, что $x^*_l \ne x^0_l$. Полагая $\varepsilon > \varphi$, рассмотрим пару возмущающих матриц (E^0, R^0), $E^0 = [e^0_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $R^0 = [r^0_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, элементы которых зададим по формулам

$$e_{ij}^0 = \begin{cases} -\delta(x_j^0 - x_j^*), & \text{если } i \in N_m,\ j = l, \\ 0, & \text{если } i \in N_m,\ j \in N_n \setminus \{l\}; \end{cases}$$

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} -\delta(x_j^* - x_j^0), & \text{если } i \in N_m,\ j = l, \\ 0, & \text{если } i \in N_m,\ j \in N_n \setminus \{l\}, \end{cases}$$

где $\varphi < \delta < \varepsilon$. Тогда

$$\|E^0\|_\infty = \|E_i^0\|_1 = \|R^0\|_\infty = \|R_i^0\|_1 = \delta,\ i \in N_m.$$

Кроме того, все строки E_i^0 , $i \in N_m$, матрицы E^0 одинаковые и состоят лишь из компонент δ и $-\delta$. Обозначив такую строку через C' , получим

$$C'(x^0 - x^*) = -\delta,\quad \|C'\|_1 = \delta.$$

Используя данные выражения и неравенство (5), находим

$$e(x^0, E + E^0) - e(x^*, E + E^0) = \min_{i \in N_m}(E_i + C')x^0 - \min_{i \in N_m}(E_i + C')x^* =$$
$$= \min_{i \in N_m} E_i x^0 - \min_{i \in N_m} E_i x^* + C'(x^0 - x^*) = e(x^0, E) - e(x^*, E) + C'(x^0 - x^*) \le$$
$$\le \varphi - \delta < 0.$$

Аналогично и все строки R_i^0, $i \in N_m$, матрицы R^0 одинаковые. Поэтому, обозначив такую строку через C'' , получим

$$C''(x^* - x^0) = -\delta,\quad \|C''\|_1 = \delta.$$

Отсюда и из (6) вытекает

$$r(x^*, R + R^0) - r(x^0, R + R^0) = \max_{i \in N_m}(R_i + C'')x^* - \max_{i \in N_m}(R_i + C'')x^0 =$$
$$= \max_{i \in N_m} R_i x^* - \max_{i \in N_m} R_i x^0 + C''(x^* - x^0) = r(x^*, R) - r(x^0, R) + C''(x^* - x^0) \le$$
$$\le \varphi - \delta < 0.$$

Резюмируя, убеждаемся в справедливости бинарного отношения

$$x^0 \underset{E+E^0,\ R+R^0}{\vdash} x^*.$$

Следовательно, для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая пара возмущающих матриц $(E^0, R^0) \in \Omega(\varepsilon)$, что парето-оптимальный портфель x^0 задачи $Z^m(E, R)$ перестает быть таковым в возмущенной задаче $Z^m(E + E^0, R + R^0)$, т. е. $x^0 \notin P^m(E + E^0, R + R^0)$. Поэтому $\rho \le \varphi$. ■

Следствие 1. *Радиус устойчивости* $\rho^m(x^0, E, R) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi = 0$.

3. Достижимость оценок

При $m = 1$ инвестиционная задача $Z^m(E, R)$ превращается в бикритериальную задачу линейного булева программирования $Z^1(E, R)$:

$$-Ex \to \min_{x \in X};$$

$$Rx \to \min_{x \in X},$$

где $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \in \mathbf{R}^n$, $R = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbf{R}^n$, а верхняя оценка согласно теореме 1 принимает вид

$$\rho^1(x^0, E, R) \le \varphi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max\{E(x^0 - x), R(x - x^0)\}.$$

Как известно [17], правая часть этого соотношения является выражением для радиуса устойчивости парето-оптимального решения x^0 задачи $Z^1(E,R)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. $\rho^1(x^0, E, R) = \varphi$.

Это свидетельствует о достижимости верхней оценки радиуса устойчивости, установленной теоремой 1.

Следующая теорема свидетельствует о том, что при $m \ge 2$ радиус устойчивости портфеля $x^0 \in P^m(E,R)$ может равняться нижней положительной оценке $\varphi/2$.

Теорема 3. *Существует такой класс бикритериальных булевых задач* $Z^m(E,R)$, $m \ge 2$, *что для радиуса устойчивости инвестиционного портфеля* $x^0 \in P^m(E,R)$ *любой задачи из этого класса справедлива формула*

$$\rho^m(x^0, E, R) = \varphi/2. \tag{7}$$

Доказательство. Покажем, что $\rho \le \varphi/2$. Из определения числа $\varphi > 0$ следует существование такого портфеля $x^* \in X \setminus \{x^0\}$, что $\psi(x^0, x^*) = \varphi$. Поэтому (ввиду (4)) справедливы неравенства (5) и (6).

Будем полагать, что существуют два индекса $p \ne q$ множества N_n, для которых

$$x_p^0 = x_q^* = 1, \; x_q^0 = x_p^* = 0. \tag{8}$$

Далее построим такую пару возмущающих матриц $(E^0, R^0) \in \Omega(\varphi/2)$, чтобы выполнялись неравенства

$$e(x^0, E + E^0) < e(x^*, E + E^0); \tag{9}$$

$$r(x^0, R + R^0) > r(x^*, R + R^0). \tag{10}$$

1. Построение матрицы E^0 *и доказательство неравенства (9).*

Будем считать, что имеет место неравенство

$$(E_{i_1(x^0)} - E_{i_1(x^*)})x^* > \varphi/2, \tag{11}$$

где

$$i_1(x^0) = \arg\min\{E_i x^0 : \, i \in N_m\};$$

$$i_1(x^*) = \arg\min\{E_i x^* : \, i \in N_m\},$$

которое влечет неравенство $i_1(x^0) \ne i_1(x^*)$, поскольку $\varphi > 0$. Таким образом, необходимое нам неравенство (11) диктует выполнение условия $m \ge 2$ (см. теорему 3).

Для всякого числа $\varepsilon > \varphi/2$ элементы возмущающей матрицы $E^0 = [e^0_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$ зададим по формулам

$$e^0_{ij} = \begin{cases} -\delta_1, & \text{если } i = i_1(x^0),\ j = p; \\ \delta_1, & \text{если } i \in N_m \setminus \{i_1(x^0)\},\ j = q; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\varphi/2 < \delta_1 < \min\left\{\varepsilon, (E_{i_1(x^0)} - E_{i_1(x^*)})x^*\right\}. \tag{12}$$

Отметим, что последние неравенства корректны благодаря (11).

Учитывая строение матрицы E^0 и равенства (8), выводим

$$E^0_{i_1(x^0)} x^0 = -\delta_1; \tag{13}$$

$$E^0_i x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i_1(x^0)\}; \tag{14}$$

$$E^0_i x^* = \delta_1, \quad i \in N_m \setminus \{i_1(x^0)\}; \tag{15}$$

$$E^0_{i_1(x^0)} x^* = 0, \tag{16}$$

$$\left\|E^0_i\right\|_1 = \left\|E^0\right\|_\infty = \delta_1 > \varphi/2,\ i \in N_m,\ E^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Теперь докажем неравенство (9). Согласно (13) и (14) имеем

$$\begin{aligned} e(x^0, E + E^0) &= \min_{i\in N_m}(E_i + E^0_i)x^0 = \min\{(E_{i_1(x^0)} + E^0_{i_1(x^0)})x^0, \min_{i\neq i_1(x^0)}(E_i + E^0_i)x^0\} = \\ &= \min\{e(x^0, E) - \delta_1, \min_{i\neq i_1(x^0)} E_i x^0\} = e(x^0, E) - \delta_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Покажем, что выполняется равенство

$$e(x^*, E + E^0) = e(x^*, E) + \delta_1. \tag{18}$$

Привлекая (15), получаем

$$\begin{aligned} e(x^*, E + E^0) &= \min\{(E_{i_1(x^*)} + E^0_{i_1(x^*)})x^*, \min_{i\neq i_1(x^*)}(E_i + E^0_i)x^*\} = \\ &= \min\{e(x^*, E) + \delta_1, \min_{i\neq i_1(x^*)}(E_i + E^0_i)x^*\}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая очевидные ввиду (15) неравенства

$$e(x^*, E) + \delta_1 \le (E_i + E^0_i)x^*, \quad i \in N_m \setminus \{i_1(x^0)\},$$

для доказательства (18) остается убедиться, что

$$e(x^*, E) + \delta_1 \le (E_{i_1(x^0)} + E^0_{i_1(x^0)})x^*.$$

Для этого, воспользовавшись (12) и (16), выводим

$$e(x^*, E) + \delta_1 - (E_{i_1(x^0)} + E^0_{i_1(x^0)})x^* = (E_{i_1(x^*)} - E_{i_1(x^0)})x^* + \delta_1 < 0.$$

Наконец, последовательно применяя (17), (18), (5) и (12), получаем необходимое неравенство (9):

$$e(x^0, E+E^0) - e(x^*, E+E^0) = e(x^0, E) - e(x^*, E) - 2\delta_1 \le \varphi - 2\delta_1 < 0.$$

2. Построение матрицы R^0 *и доказательство неравенства (10).*

Будем считать, что имеет место неравенство

$$(R_{i_2(x^*)} - R_{i_2(x^0)})x^* > \varphi/2, \tag{19}$$

где

$$i_2(x^0) = \arg\max\{R_i x^0 : i \in N_m\};$$

$$i_2(x^*) = \arg\max\{R_i x^* : i \in N_m\},$$

которое влечет неравенство $i_2(x^0) \ne i_2(x^*)$, поскольку $\varphi > 0$.

Для всякого числа $\varepsilon > \varphi/2$ элементы возмущающей матрицы R^0 зададим по правилу

$$r_{ij}^0 = \begin{cases} \delta_2, & \text{если } i = i_2(x^0),\ j = p; \\ -\delta_2, & \text{если } i = N_m \setminus \{i_2(x^0)\},\ j = q; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\varphi/2 < \delta_2 < \min\left\{\varepsilon, (R_{i_2(x^*)} - R_{i_2(x^0)})x^*\right\}. \tag{20}$$

Отметим, что последние неравенства корректны благодаря (19).

Принимая во внимание строение матрицы R^0 и равенства (8), выводим

$$R^0_{i_2(x^0)} x^0 = \delta_2; \tag{21}$$

$$R_i^0 x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i_2(x^0)\}; \tag{22}$$

$$R_i^0 x^* = -\delta_2, \quad i \in N_m \setminus \{i_2(x^0)\}; \tag{23}$$

$$R^0_{i_2(x^0)} x^* = 0, \tag{24}$$

$$\left\|R_i^0\right\|_1 = \left\|R^0\right\|_\infty = \delta_2 > \varphi/2,\ i \in N_m,\ R^0 \in \Omega(\varepsilon).$$

Далее докажем неравенство (10). Согласно (21) и (22) имеем

$$\begin{aligned} r(x^0, R+R^0) &= \max_{i\in N_m}(R_i + R_i^0)x^0 = \max\{(R_{i_2(x^0)} + R^0_{i_2(x^0)})x^0, \max_{i \ne i_2(x^0)}(R_i + R_i^0)x^0\} = \\ &= \max\{r(x^0, R) + \delta_2, \max_{i \ne i_2(x^0)} R_i x^0\} = r(x^0, R) + \delta_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Покажем, что выполняется равенство

$$r(x^*, R+R^0) = r(x^*, R) - \delta_2. \tag{26}$$

Привлекая (23), выводим

$$r(x^*, R+R^0) = \max\{(R_{i_2(x^*)} + R^0_{i_2(x^*)})x^*, \max_{i \neq i_2(x^*)}(R_i + R_i^0)x^*\} =$$
$$= \max\{r(x^*, R) - \delta_2, \max_{i \neq i_2(x^*)}(R_i + R_i^0)x^*\}.$$

Поэтому, учитывая очевидные ввиду (23) неравенства

$$r(x^*, R) - \delta_2 \geq (R_i + R_i^0)x^*, \quad i \in N_m \setminus \{i_2(x^0)\},$$

для доказательства (26) остается убедиться, что

$$r(x^*, R) - \delta_2 \geq (R_{i_2(x^0)} + R^0_{i_2(x^0)})x^*.$$

Для этого, воспользовавшись (20) и (24), имеем

$$r(x^*, R) - \delta_2 - (R_{i_2(x^0)} + R^0_{i_2(x^0)})x^* = (R_{i_2(x^*)} - R_{i_2(x^0)})x^* - \delta_2 > 0.$$

Наконец, последовательно применяя (25), (26), (6) и (20), получаем необходимое неравенство (10):

$$r(x^*, R+R^0) - r(x^0, R+R^0) = r(x^*, R) - r(x^0, R) - 2\delta_2 \leq \varphi - 2\delta_2 < 0.$$

В результате из доказанных неравенств (9) и (10) вытекает справедливость бинарного отношения

$$x^0 \underset{E+E^0,\, R+R^0}{\vdash} x^*.$$

Следовательно, для любого числа $\varepsilon > \varphi/2$ существует такая пара возмущающих матриц $(E^0, R^0) \in \Omega(\varepsilon)$, что инвестиционный портфель $x^0 \in P^m(E, R)$ задачи $Z^m(E, R)$ перестает быть парето-оптимальным в возмущенной задаче $Z^m(E+E^0, R+R^0)$, т. е. $x^0 \notin P^m(E+E^0, R+R^0)$. Поэтому $\rho^m(x^0, E, R) \leq \varphi/2$.

Резюмируя, убеждаемся в справедливости равенства (7). ■

Приведем числовой пример, иллюстрирующий теорему 3.

Пример. Пусть $m = 2$, $n = 3$, $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $x^* = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$,

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда находим

$$e(x^0, E) = 9, \ e(x^*, E) = 5,$$
$$r(x^0, R) = 5, \ r(x^*, R) = 7.$$

Поэтому $x^0 \in P^2(E, R)$, $\varphi = 4$. Пусть пара возмущающих матриц (E^0, R^0) имеет вид

$$E^0 = \begin{pmatrix} -\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}, \qquad R^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_2 \\ \delta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $2<\delta_1<3$, $2<\delta_2<4.$ Теперь легко убедиться, что

$$\|E^0\|_\infty=\delta_1>2,\quad \|R^0\|_\infty=\delta_2>2;$$

$$e(x^0,E+E^0)=9-\delta_1<5+\delta_1=e(x^*,E+E^0);$$

$$r(x^0,R+R^0)=5+\delta_2>7-\delta_2=r(x^*,R+R^0).$$

Это означает, что $x^0 \underset{E+E^0,R+R^0}{\vdash} x^*$, т. е. $x^0\notin P^2(E+E^0,R+R^0)$, поэтому $\rho^2(x^0,E,R)\le 2$. Следовательно, в силу теоремы 1 $\rho^2(x^0,E,R)=\varphi/2=2$.

Заметим, что задача $Z^2(E,R)$, рассмотренная в приведенном выше примере, принадлежит классу задач с условием $\rho=\varphi/2$, так как (см. теорему 3) выполняются необходимые неравенства (11) и (19), которые принимают вид

$$(E_1-E_2)x^*=3>2=\varphi/2;$$

$$(R_2-R_1)x^*=4>2=\varphi/2,$$

поскольку, как легко видеть, $i_1(x^0)=i_2(x^*)=1$, $i_1(x^0)=i_2(x^*)=2$.

4. Условия устойчивости

Парето-оптимальный инвестиционный портфель $x^0\in P^m(E,R)$ назовем устойчивым, если $\rho^m(x^0,E,R)>0$. Кроме того, введем традиционное множество Смейла [20], т. е. множество портфелей задачи $Z^m(E,R)$, оптимальных по Смейлу:

$$Sm^m(E,R)=\{x\in X:\ \nexists x'\in X\setminus\{x\}\quad (x \underset{E,R}{\models} x')\},$$

где

$$x \underset{E,R}{\models} x' \quad\Leftrightarrow\quad e(x,E)\le e(x',E)\ \ \&\ \ r(x,R)\ge (x',R).$$

Очевидно, что $Sm^m(E,R)\subseteq P^m(E,R)$ при любой паре матриц $E\in\mathbf{R}^{m\times n}$ и $R\in\mathbf{R}^{m\times n}$. Кроме того, понятно, что множество $Sm^m(E,R)$ может быть пустым.

Теорема 4. *Для парето-оптимального инвестиционного портфеля x^0 бикритериальной булевой задачи $Z^m(E,R)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(i) $x^0\in Sm^m(E,R)$;

(ii) *портфель x^0 устойчив;*

(iii) $\varphi>0$.

Доказательство. $(i)\Rightarrow(ii)$. Если $x^0\in Sm^m(E,R)$, то легко видеть, что для любого портфеля $x\in X\setminus\{x^0\}$ выполняется неравенство $\psi(x^0,x)>0$. Поэтому в силу теоремы 1 радиус устойчивости удовлетворяет условиям

$$\rho^m(x^0,E,R)\ge\varphi/2=\min\{\psi(x^0,x)/2:\ x\in X\setminus\{x^0\}\}>0,$$

т. е. портфель x^0 устойчив.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Эта импликация согласно следствию 1 очевидна.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Из определения числа φ непосредственно следует, что для любого портфеля $x \neq x^0$ справедливо неравенство

$$\max\{e(x^0, E) - e(x, E), r(x, R) - r(x^0, R)\} \geq \varphi.$$

Поэтому из неравенства $\varphi > 0$ вытекает включение $x^0 \in Sm^m(R)$. ■

Заключение

В настоящей работе на базе классической портфельной теории Марковица сформулирована векторная задача выбора парето-оптимального инвестиционного портфеля, состоящая в одновременной максимизации дохода (эффективности портфеля) и минимизации риска упущенной выгоды. Такая постановка приводит к бикритериальной булевой задаче с противоречивыми экономическими критериями. Непредсказуемость состояния рынка и его нестабильность учитываются путем использования максиминного критерия Вальда и минимаксного критерия Сэвиджа, а учет неточности и некорректности исходных данных, характерных для реальных задач инвестиционного анализа, основан на проведении параметрического анализа устойчивости парето-оптимального инвестиционного портфеля к возмущениям исходных данных задачи. Получены нижняя и верхняя оценки (границы) радиуса устойчивости. Построение конкретных классов бикритериальных булевых задач позволило доказать неулучшаемость найденных оценок в рамках используемых параметров. Полученные здесь результаты могут быть использованы для определения границ надежности решений, принимаемых инвестором при формировании инвестиционного портфеля, оптимального по двум критериям, а именно: по максиминному критерию Вальда для доходности инвестиционного портфеля и по минимаксному критерию Сэвиджа для риска упущенной инвестором выгоды.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11К-095).

Список литературы

1. Емеличев, В.А. Постоптимальный анализ многокритериальной инвестиционной задачи Марковица / В.А. Емеличев, В.В. Коротков // Информатика. – 2011. – № 4 (32). – С. 5–14.

2. Сотсков, Ю.Н. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами / Ю.Н. Сотсков, Н.Ю. Сотскова. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.

3. Сотсков, Ю.Н. Исследование устойчивости оптимальных решений / Ю.Н. Сотсков // Информатика. – 2004. – № 4. – С. 65–75.

4. Markowitz, H.M. Portfolio selection: efficient diversification of investments / H.M. Markowitz. – Oxford : Blackwell Publ., 1991. – 384 p.

5. Виленский, П.Л. Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика / П.Л. Виленский, В.Н. Лившиц, С.А. Смоляк. – М. : Дело, 2008. – 1104 с.

6. Бронштейн, Е.М. Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов / Е.М. Бронштейн, Д.А. Черняк // Экономика и математические методы. – 2005. – Т. 41, № 2. – С. 21–28.

7. Бронштейн, Е.М. Управление портфелем ценных бумаг на основе комплексных квантильных мер риска / Е.М. Бронштейн, М.М. Качкаева, Е.В. Тулупова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 1. – С. 178–183.

8. Царев, В.В. Оценка экономической эффективности инвестиций / В.В. Царев. – СПб. : Питер, 2004. – 464 с.

9. Wald, A. Statistical decision functions / A. Wald. – N.Y. : John Wiley, 1950. – 179 p.

10. Вальд, А. Статистические решающие функции / А. Вальд // Позиционные игры / под ред. Н.Н. Воробьева, Н.Н. Врублевской. – М. : Наука, 1967. – С. 300–522.

11. Savage, L.J. The Foundations of Statistics / L.J. Savage. – N.Y. : Dover Publ., 1972. – 384 p.

12. Демьянов, В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.

13. Федоров, В.В. Численные методы максимина / В.В. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 280 с.
14. Minimax and applications / ed. by D.-Z. Du, P.M. Pardalos. – Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 1995. – 308 p.
15. Фон Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение / Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. – М. : Наука, 1970. – 707 с.
16. Петросян, Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. – М. : Высшая школа, 1998. – 304 с.
17. Емеличев, В.А. Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования / В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин // Дискретная математика. – 2007. – Т. 19, вып. 3. – С. 79–83.
18. Emelichev, V.A. Stability analysis of the Pareto optimal solutions for some vector boolean optimization problem / V.A. Emelichev, K.G. Kuzmin, Yu.V. Nikulin // Optimization. – 2005. – Vol. 54. – P. 545–561.
19. Емеличев, В.А. Многокритериальная инвестиционная задача в условиях неопределенности и риска / В.А. Емеличев, В.В. Коротков, К.Г. Кузьмин // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2011. – № 6. – С. 157–164.
20. Smale, S. Global analysis and economics V: Pareto theory with constraints / S. Smale // J. Mathematical Economics. – 1974. – Vol. 1, № 3. – P. 213–221.

Поступила 31.01.12

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: emelichev@bsu.by,
wladko@tut.by

V.A. Emelichev, V.V. Korotkov

STABILITY ANALYSIS OF PARETO-OPTIMAL PROJECT PORTFOLIO OF BICRITERIA INVESTMENT PROBLEM WITH WALD'S AND SAVAGE'S CRITERIA

Tight lower and upper bounds for the stability radius of a Pareto optimal portfolio of the two-criteria investment Boolean problem with maximin efficiency criteria and minimax loss profit risk criteria are given.