*УДК 519.714*

**Д.Я. Новиков, Л.Д. Черемисинова**

# ИМПЛИКАТИВНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

*Рассматривается задача определения, находятся ли системы частичных булевых функций в отношении эквивалентности или реализации. Предлагается метод решения задачи путем сведения ее к проверке выполнимости конъюнктивной нормальной формы, в основе формирования которой лежит использование отношения импликации.*

## Введение

Проектирование цифровых СБИС представляет собой многоэтапный процесс оптимизации и преобразований проектных решений, начиная с исходного описания на одном из входных языков проектирования и заканчивая схемой в целевом технологическом базисе. Проектные решения могут быть получены как автоматически (с использованием программных средств синтеза и оптимизации), так и полуавтоматически (путем корректировки проектного решения человеком). В любом случае во избежание распространения ошибки, допущенной на одном из ранних этапов проектирования, до стадии изготовления схемы необходимо верифицировать [1, 2] полученные решения – проверять, находятся ли они в отношении эквивалентности или реализации.

В настоящей работе рассматривается задача проверки отношений эквивалентности и реализуемости между системами частичных булевых функций, которая является одной из базовых задач верификации логических описаний с функциональной неопределенностью [3]. Предлагаемый метод решения задачи анализа булевых функций на эквивалентность и реализуемость основан на сведении ее к проверке выполнимости конъюнктивной нормальной формы (КНФ). Анализируемая КНФ строится в виде конъюнкции двух КНФ: разрешения для одной системы частичных булевых функций и запрета – для другой. Первая КНФ задает допустимые комбинации значений всех переменных для одной из анализируемых систем, вторая – запрещенные комбинации для другой. Формирование этих КНФ основано на использовании отношения импликации между наборами значений входных переменных и соответствующими им значениями функций системы.

## 1. Основные определения

*Частичная булева функция* (ЧБФ) $f(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор значений аргументов функции, задается множествами $U_f^0$, $U_f^1$ и $U_f^{ds}$ интервалов (или элементов) булева пространства $E^n$, на которых она принимает соответственно нулевое, единичное и неопределенное значения, при этом $U_f^1 \cup U_f^0 \cup U_f^{ds} = E^n$. Интервал ранга $k$ фиксирует значения $k$ переменных и покрывает $2^{n-k}$ элементов булева пространства, его можно представить также в виде конъюнкции $k$ литералов (под литералом понимается булева переменная или ее отрицание). В общем случае элементарная конъюнкция $k_j$ и соответствующий ей интервал покрывает (или поглощает) элементарную конъюнкцию $k_i$ (и соответствующий ей интервал), если множество литералов из $k_j$ является подмножеством литералов из $k_i$.

Будем задавать *систему ЧБФ* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$ множеством многовыходных интервалов $(\boldsymbol{u}^f, \boldsymbol{t}^f)$, представляемых парами троичных векторов длины $n$ и $m$. Входная часть $\boldsymbol{u}^f$ является интервалом на множестве $x_i \in \boldsymbol{x}$, выходная часть $\boldsymbol{t}^f$ – троичным вектором значений функций на интервале $\boldsymbol{u}^f$. Векторы $\boldsymbol{u}^f$ и $\boldsymbol{t}^f$ могут представляться также как конъюнкции литералов некоторых $x_i \in \boldsymbol{x}$ и $f_i \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. В частном случае входная часть $\boldsymbol{u}^f$ может представлять собой булев вектор $\boldsymbol{v}^f$, тогда многовыходной интервал $(\boldsymbol{u}^f, \boldsymbol{t}^f)$ называется многовыходным набором $(\boldsymbol{v}^f, \boldsymbol{t}^f)$.

Для каждой функции $f_j \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ справедливо: если $j$-я компонента вектора $\boldsymbol{t}^f$ есть 1 или 0, то все элементы интервала $\boldsymbol{u}^f$ принадлежат множеству $U_{fj}^1$ единичных значений функции $f_j$ или соответственно множеству $U_{fj}^{0}$ нулевых значений функции $f_j$; если же значение $j$-й компоненты вектора $\boldsymbol{t}^f$ не определено, то либо значение функции $f_j$ не определено на всем интервале $\boldsymbol{u}^f$, либо $f_j$ принимает разные значения на разных наборах из интервала $\boldsymbol{u}^f$.

Далее рассматриваются только непротиворечивые системы ЧБФ. Система булевых функций, заданная множеством многовыходных интервалов $(\boldsymbol{u}_i^f, \boldsymbol{t}_i^f)$, непротиворечива, если для всех пар $(\boldsymbol{u}_i^f, \boldsymbol{t}_i^f)$ и $(\boldsymbol{u}_j^f, \boldsymbol{t}_j^f)$, таких, что $\boldsymbol{u}_i^f \wedge \boldsymbol{u}_j^f \neq 0$, имеет место $\boldsymbol{t}_i^f \wedge \boldsymbol{t}_j^f \neq 0$.

Система ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, заданная множеством $S^f$ многовыходных интервалов, в матричном виде может быть представлена парой троичных матриц $\boldsymbol{U}^f$ и $\boldsymbol{T}^f$, задающих своими строками входные и выходные части многовыходных интервалов из $S^f$. Например, если $S^f = \{(x_1 x_2 \bar{x}_3, y_1 \bar{y}_3), (\bar{x}_1 x_3 x_5 \bar{x}_6, \bar{y}_2 y_3), (\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \bar{x}_5, \bar{y}_1 \bar{y}_2), (x_2 \bar{x}_3 x_4 x_6, y_1 \bar{y}_3), (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5, \bar{y}_1 y_3), (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_6, y_2), (x_2 x_3 x_4 x_6, y_1 y_2)\}$, система $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ представляется как

$$\boldsymbol{U}^f = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 1 & 0 & - & - & - \\ 0 & - & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 & 0 & - \\ - & 1 & 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 0 & - & - & 0 & - \\ 1 & 0 & - & 0 & - & 1 \\ - & 1 & 0 & 0 & - & 1 \end{array}; \quad \boldsymbol{T}^f = \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & - & 0 \\ - & 0 & 1 \\ 0 & 0 & - \\ 1 & - & 0 \\ 0 & - & 1 \\ - & 1 & - \\ 1 & 1 & - \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}. \tag{1}$$

## 2. Отношения между частичными булевыми функциями

Булева функция $g(\boldsymbol{x})$ (полностью определенная или частичная) *реализует* частичную булеву функцию $f(\boldsymbol{x})$ (обозначается как $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$) тогда и только тогда, когда

$$U_f^1 \subseteq U_g^{\,1},\ U_f^0 \subseteq U_g^{\,0}. \tag{2}$$

Система булевых функций $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))$ *реализует* систему ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})$, если для всех $i$, где $1 \leq i \leq m$, имеет место $f_i(\boldsymbol{x}) \leq g_i(\boldsymbol{x})$.

Выполнение условия (2) гарантирует, что на области определения системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (менее определенной) система $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ имеет ту же функциональность, что и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, т. е. для любого двоичного набора значений переменных $\boldsymbol{x}$ вектор значений функций $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ должен поглощаться вектором значений функций $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

ЧБФ $g(\boldsymbol{x})$ *эквивалентна* ЧБФ $f(\boldsymbol{x})$ (обозначается как $f(\boldsymbol{x}) \equiv g(\boldsymbol{x})$) тогда и только тогда, когда $U_f^1 = U_g^{\,1}$ и $U_f^0 = U_g^{\,0}$.

Система ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))$ *эквивалентна* системе ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})$, если для всех $i$, где $1 \leq i \leq m$, имеет место $f_i(\boldsymbol{x}) \equiv g_i(\boldsymbol{x})$.

Условие эквивалентности булевых функций можно перефразировать также следующим образом: ЧБФ $g(\boldsymbol{x})$ эквивалентна ЧБФ $f(\boldsymbol{x})$ тогда и только тогда, когда $f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ и $g(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$, что эквивалентно $U_f^1 \subseteq U_g^{\,1}$, $U_f^0 \subseteq U_g^{\,0}$, $U_g^{\,1} \subseteq U_f^1$, $U_g^{\,0} \subseteq U_f^0$.

Следовательно, для того чтобы проверить отношение эквивалентности, достаточно проверить отношение реализуемости в обе стороны.

Для того чтобы проверить, реализуется ли система ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ системой $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, необходимо проверить выполнение условия (2) всех функций $f_i \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. Процедуру проверки реализуемости можно упростить, рассматривая одновременно все функции системы ЧБФ. Для этого все многовыходные интервалы $(\boldsymbol{u}^f, \boldsymbol{t}^f)$ системы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ расщепляются на многовыходные наборы $(\boldsymbol{v}^f, \boldsymbol{t}^f)$, причем расщеплению подвергаются входные части многовыходных интервалов, а выходные их части не меняются. В результате расщепления получаем систему $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, заданную многовыходными наборами $(\boldsymbol{v}_i^f, \boldsymbol{t}_i^f)$. Система ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ реализуется системой ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, если для каждого многовыходного набора $(\boldsymbol{v}_i^f, \boldsymbol{t}_i^f)$ выполняются следующие условия: для каждой определенной компоненты $t_i^{fk}$ вектора $\boldsymbol{t}_i^f$ найдется такой многовыходной интервал $(\boldsymbol{u}_j^g, \boldsymbol{t}_j^g)$, у которого соответствующая компонента $t_j^{gk}$ выходной части $\boldsymbol{t}_i^g$ равна $t_i^{fk}$, а входная часть $\boldsymbol{u}_j^g$ поглощает входную часть $\boldsymbol{v}_i^f$.

Например, система ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (1) реализуется следующей системой $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{U}^{g} = \end{array}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 1 & 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - & 1 & 0 \\ - & 0 & - & 1 & 0 & - \\ - & 1 & 0 & - & - & 1 \\ 1 & 0 & - & - & 0 & - \\ 1 & 0 & - & 0 & - & - \\ - & - & 1 & - & 1 & 0 \end{array}; \quad \boldsymbol{T}^{g} = \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & - & 0 \\ - & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & - & - \\ - & 1 & 1 \\ - & - & 1 \end{array}\quad\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}. \qquad (3)$$

Ясно, что такой метод проверки реализуемости может быть применим на практике только в том случае, если входные части многовыходных интервалов системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ заданы небольшими интервалами, когда число $p$ неопределенных компонент соответствующих векторов невелико. Например, уже при $p = 10$ каждый интервал расщепляется на $2^{10} = 1024$ набора. Для случаев, когда $p$ относительно велико, предлагается использовать описанный ниже метод на основе сведения к задаче проверки выполнимости КНФ.

## 3. КНФ разрешения системы частичных булевых функций

*КНФ* представляет полностью определенную булеву функцию, заданную в виде конъюнкции одного или более дизъюнктов, каждый из которых представляет собой дизъюнкцию одного или более литералов (соответствующих разным переменным или их инверсиям). Задача проверки выполнимости КНФ заключается в нахождении такого присваивания значений переменным из $\boldsymbol{x}$ (может быть, и не всем), которое обращает КНФ в единицу. Если такое присваивание удается найти, то говорят, что КНФ выполнима и полученное присваивание называют выполняющим эту КНФ, иначе КНФ невыполнима. Невыполнимая КНФ представляет функцию, тождественно равную нулю.

Матричный вид КНФ, имеющей $k$ дизъюнктов и $n$ переменных, представляется троичной матрицей $\boldsymbol{C}$, строки которой задают дизъюнкты, а столбцы соответствуют переменным. Элемент $c_i^j$ на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца матрицы $\boldsymbol{C}$ принимает значение 1, 0 или «–» в зависимости от формы ($x_j$ или $\bar{x}_j$) переменной $x_j$ или ее отсутствия в $i$-м дизъюнкте КНФ.

Исходя из определения ЧБФ, всякий ее многовыходной интервал $s_i^{g} = (\boldsymbol{u}_i^{g}, \boldsymbol{t}_i^{g})$ задает импликативное условие $\boldsymbol{u}_i^{g} \to \boldsymbol{t}_i^{g}$: при присваивании переменным $x_i$ значений, обращающих $\boldsymbol{u}_i^{g}$ в 1, функции системы $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ принимают значения, обращающие $\boldsymbol{t}_i^{g}$ в 1.

При верификации комбинационных схем, основанной на решении задачи проверки выполнимости КНФ, строится так называемая КНФ разрешения для каждой из сравниваемых комбинационных схем [2], которая задает все возможные допустимые комбинации сигналов на всех полюсах схемы. Аналогично можно построить КНФ разрешения системы ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, которая будет задавать все возможные допустимые комбинации ее переменных (аргументов и функций). Нетрудно доказать, что для непротиворечивой системы ЧБФ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *КНФ разрешения системы ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, заданной множеством многовыходных интервалов $s_i^{g} = (\boldsymbol{u}_i^{g}, \boldsymbol{t}_i^{g})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, порождается формулой*

$$C^{g} = (\boldsymbol{u}_1^{g} \to \boldsymbol{t}_1^{g})(\boldsymbol{u}_2^{g} \to \boldsymbol{t}_2^{g}) \ldots (\boldsymbol{u}_r^{g} \to \boldsymbol{t}_r^{g}).$$

КНФ $C_i$ разрешения, порождаемая многовыходным интервалом $s_i = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{t}_i)$ с $\boldsymbol{u}_i = x_1^i x_2^i \ldots x_{ni}^i$ и $\boldsymbol{t}_i = y_1^i y_2^i \ldots y_{mi}^i$, может быть получена преобразованием $\boldsymbol{u}_i \to \boldsymbol{t}_i$ в булев базис следующим образом:

$$C_i = (\boldsymbol{u}_i \to \boldsymbol{t}_i) = \bar{\boldsymbol{u}}_i \vee \boldsymbol{t}_i = \bar{x}_1^i \vee \bar{x}_2^i \vee \ldots \vee \bar{x}_{ni}^i \vee y_1^i y_2^i \ldots y_{mi}^i =$$
$$= (\bar{x}_1^i \vee \bar{x}_2^i \vee \ldots \vee \bar{x}_{ni}^i \vee y_1^i)(\bar{x}_1^i \vee \bar{x}_2^i \vee \ldots \vee \bar{x}_{ni}^i \vee y_2^i) \ldots (\bar{x}_1^i \vee \bar{x}_2^i \vee \ldots \vee \bar{x}_{ni}^i \vee y_{mi}^i).$$

КНФ разрешения $C_i$ состоит из $m_i$ дизъюнктов. Например, КНФ разрешения многовыходного интервала $s_1 = (x_1 x_2 \bar{x}_3, y_1 \bar{y}_3)$ системы ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ (3) состоит из двух дизъюнктов:

$C_1^{\boldsymbol{g}} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee y_1)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{y}_3)$, а КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{g}}$ всей системы ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ (3) в матричной форме имеет следующий вид:

$$C^{\boldsymbol{g}} = \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & y_1 & y_2 & y_3 & & \\ 0 & 0 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & - & - & - & - & - & 0 & & 2 \\ 1 & - & - & - & 0 & 1 & - & 0 & - & & 3 \\ - & 1 & - & 0 & 1 & - & 0 & - & - & & 4 \\ - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 0 & - & & 5 \\ - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & - & 1 & & 6 \\ - & 0 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & - & & 7 \\ - & 0 & 1 & - & - & 0 & - & 1 & - & & 8 \\ - & 0 & 1 & - & - & 0 & - & - & 0 & & 9 \\ 0 & 1 & - & - & 1 & - & 0 & - & - & & 10 \\ 0 & 1 & - & 1 & - & - & - & 1 & - & & 11 \\ 0 & 1 & - & 1 & - & - & - & - & 1 & & 12 \\ - & - & 0 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & & 13 \end{array} . \tag{4}$$

У т в е р ж д е н и е 2. *Система булевых функций $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ реализует систему ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, если любой набор значений переменных (аргументов и функций), выполняющий КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{f}}$, является выполняющим и для КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{g}}$.*

Очевидно, что проверка отношения реализуемости на основе этого утверждения нисколько не проще проверки на основе определения (2). Ниже предлагается формализованный метод проверки отношения реализуемости, основанный на следующем утверждении.

У т в е р ж д е н и е 3. *Система булевых функций $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ реализует систему ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, если любой набор значений переменных (аргументов и функций), не выполняющий КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{f}}$, не является выполняющим и для КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{g}}$.*

### 4. КНФ запрета системы частичных булевых функций

КНФ $P^{\boldsymbol{f}}$ запрета исходной системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, представленной множеством $S^{\boldsymbol{f}}$ многовыходных интервалов, задает все возможные недопустимые комбинации ее переменных (аргументов и функций). Эта КНФ выполнима, если нарушается условие $\boldsymbol{u}_i^{\boldsymbol{f}} \to \boldsymbol{t}_i^{\boldsymbol{f}}$, заданное хотя бы одним многовыходным интервалом из $S^{\boldsymbol{f}}$. Соответственно КНФ запрета $P_i$ многовыходного интервала $s_i = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{t}_i)$, где $\boldsymbol{u}_i = x_1^i x_2^i \ldots x_{ni}^i$ и $\boldsymbol{t}_i = y_1^i y_2^i \ldots y_{mi}^i$, может быть получена преобразованием $\bar{s}_i$, задающим условие его нарушения, в булев базис следующим образом:

$$P_i = \bar{s}_i = \neg(\boldsymbol{u}_i \to \boldsymbol{t}_i) = \boldsymbol{u}_i\ \bar{\boldsymbol{t}}_i = x_1^i x_2^i \ldots x_{ni}^i (\bar{y}_1^i \vee \bar{y}_2^i \vee \ldots \vee \bar{y}_{mi}^i).$$

КНФ запрета $P_i$ состоит из $n_i + 1$ дизъюнктов. Например, КНФ запрета многовыходного интервала $s_2^{\boldsymbol{f}} = (x_1 x_2, f_1 \bar{f}_2)$ системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (1) состоит из трех дизъюнктов: $P_2^{\boldsymbol{f}} = (x_1)(x_2)(\bar{f}_1 \vee f_2)$.

У т в е р ж д е н и е 4. *Функция запрета $F^{\boldsymbol{f}}$ системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, заданной множеством многовыходных интервалов $s_i^{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{u}_i^{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{t}_i^{\boldsymbol{f}})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, имеет вид*

$$F^{\boldsymbol{f}} = P_1^{\boldsymbol{f}} \vee P_2^{\boldsymbol{f}} \vee \ldots \vee P_r^{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{u}_1^{\boldsymbol{f}}\ \bar{\boldsymbol{t}}_1^{\boldsymbol{f}}) \vee (\boldsymbol{u}_2^{\boldsymbol{f}}\ \bar{\boldsymbol{t}}_2^{\boldsymbol{f}}) \vee \ldots \vee (\boldsymbol{u}_r^{\boldsymbol{f}}\ \bar{\boldsymbol{t}}_r^{\boldsymbol{f}}). \tag{5}$$

Все возможные недопустимые комбинации переменных функций системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ представляются выполняющими формулу (5) наборами. Чтобы применить SAT-решатель [4–6] (программу проверки выполнимости КНФ) для их нахождения, необходимо формулу (5) преобразовать к виду КНФ, теоретически это всегда возможно, однако это NP-трудная задача. В работе [7] приведен метод линейной сложности для построения КНФ запрета системы ЧБФ путем кодирования составляющих ее КНФ запрета $P_i^{\boldsymbol{f}}$ кодами единичной длины. Метод заключается во введении $r$ (по числу многовыходных интервалов) булевых переменных $w_i$, предназначенных для кодирования условий $P_i^{\boldsymbol{f}}$ нарушения реализуемости многовыходных интервалов. Каждое условие $P_i^{\boldsymbol{f}}$ кодируется кодом длины 1 – $\bar{w}_i$ и добавляется дизъюнкт, реализующий функцию выбора [8], которая для единичного кодирования имеет вид $(w_1 \vee w_2 \vee \ldots \vee w_r)$. Таким образом, функция запрета $F^{\boldsymbol{f}} = P_1^{\boldsymbol{f}} \vee P_2^{\boldsymbol{f}} \vee \ldots \vee P_r^{\boldsymbol{f}}$ преобразуется к выражению

$$\begin{aligned} F^{\boldsymbol{f}} &= (P_1^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_1)\ (P_2^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_1)\ \ldots\ (P_r^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_r)\ (w_1 \vee w_2 \vee \ldots \vee w_r) = \\ &= (\boldsymbol{u}_1^{\boldsymbol{f}}\ \bar{\boldsymbol{t}}_1^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_1)\ (\boldsymbol{u}_2^{\boldsymbol{f}}\ \bar{\boldsymbol{t}}_2^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_2)\ \ldots\ (\boldsymbol{u}_r^{\boldsymbol{f}}\ \bar{\boldsymbol{t}}_r^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_r)\ (w_1 \vee w_2 \vee \ldots \vee w_r). \end{aligned} \tag{6}$$

Формула (6) выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула (5).

Приняв во внимание, что $\boldsymbol{u}_i^{\boldsymbol{f}} = x_1^i x_2^i \ldots x_{ni}^i$ и $\boldsymbol{t}_i^{\boldsymbol{f}} = y_1^i y_2^i \ldots y_{mi}$ в $(\boldsymbol{u}_i^{\boldsymbol{f}}, \boldsymbol{t}_i^{\boldsymbol{f}})$, каждый из первых $r$ дизъюнктивных членов (6) преобразуется к КНФ

$$\boldsymbol{u}_i^{\boldsymbol{f}}\ \ \bar{\boldsymbol{t}}_i^{\boldsymbol{f}} \vee \bar{w}_i = (x_1^i \vee \bar{w}_i)(x_2^i \vee \bar{w}_i) \ldots (x_{ni}^i \vee \bar{w}_i)(\ \bar{y}_1^i \vee \bar{y}_2^i \vee \ldots \vee \bar{y}_{mi}^i \vee \bar{w}_i).$$

Соответственно функция запрета $F^{\boldsymbol{f}}$ представляется в виде КНФ запрета $P^{\boldsymbol{f}}$. Например, КНФ запрета системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (1) в матричной форме имеет следующий вид:

$$P^{\boldsymbol{f}} = \begin{array}{cccccccccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & y_1 & y_2 & y_3 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & & \\
1 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & & 1 \\
- & 1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & & 2 \\
- & - & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & & 3 \\
- & - & - & - & - & - & 0 & - & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & & 4 \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 5 \\
- & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 6 \\
- & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 7 \\
- & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 8 \\
- & - & - & - & - & - & - & 1 & 0 & - & 0 & - & - & - & - & - & & 9 \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 10 \\
- & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 11 \\
- & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 12 \\
- & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 13 \\
- & - & - & - & - & - & 1 & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 14 \\
- & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 15 \\
- & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 16 \\
- & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 17 \\
- & - & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 18 \\
- & - & - & - & - & - & 0 & - & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - & & 19 \\
1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 20 \\
- & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 21 \\
- & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 22 \\
- & - & - & - & - & - & 1 & - & 0 & - & - & - & - & 0 & - & - & & 23 \\
1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 24 \\
- & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 25 \\
- & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 26 \\
- & - & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 27 \\
- & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 28 \\
- & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 29 \\
- & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 30 \\
- & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 31 \\
- & - & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 32 \\
- & - & - & - & - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 33 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 34
\end{array}\ . \tag{7}$$

## 5. Сведение задачи проверки отношений между системами ЧБФ к проверке выполнимости КНФ

Суть предлагаемого метода проверки, реализуется ли система ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ системой $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, состоит в следующем. Строится КНФ запрета $P^{\boldsymbol{f}}$ системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{g}}$ системы $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, затем эти КНФ объединяются в одну $C^{\boldsymbol{g}} \wedge P^{\boldsymbol{f}}$.

Утверждение 5. *Система булевых функций $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ реализует систему ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, если и только если КНФ $C^{\boldsymbol{g}} \wedge P^{\boldsymbol{f}}$ невыполнима.*

КНФ $C^{\boldsymbol{g}} \wedge P^{\boldsymbol{f}}$, получаемая объединением КНФ разрешения (4) и запрета (7), невыполнима; следовательно, система ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ реализует систему $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Для того чтобы проверить, реализует ли система ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ систему $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, необходимо аналогичным образом построить КНФ разрешения $C^{\boldsymbol{f}}$ для системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и КНФ запрета $P^{\boldsymbol{g}}$ для системы $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$:

$$
C^{f}= \begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & y_1 & y_2 & y_3 & & \\
0 & 0 & 1 & - & - & - & 1 & - & - & & 1 \\
0 & 0 & 1 & - & - & - & - & - & 0 & & 2 \\
1 & - & 0 & - & 0 & 1 & - & 0 & - & & 3 \\
1 & - & 0 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & & 4 \\
1 & 1 & - & 0 & 1 & - & 0 & - & - & & 5 \\
1 & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 0 & - & & 6 \\
- & 0 & 1 & 0 & - & 0 & 1 & - & - & & 7 \\
- & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & - & 0 & & 8 \\
0 & 1 & - & - & 1 & - & 0 & - & - & & 9 \\
0 & 1 & - & - & 1 & - & - & - & 1 & & 10 \\
0 & 1 & - & 1 & - & 0 & - & 1 & - & & 11 \\
- & 0 & 1 & 1 & - & 0 & 1 & - & - & & 12 \\
- & 0 & 1 & 1 & - & 0 & - & 1 & - & & 13
\end{array};
$$

$$
P^{g} = \begin{array}{cccccccccccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & y_1 & y_2 & y_3 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & & \\
1 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & & 1 \\
- & 1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & & 2 \\
- & - & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & & 3 \\
- & - & - & - & - & - & 0 & - & 1 & 0 & - & - & - & - & - & - & & 4 \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 5 \\
- & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 6 \\
- & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 7 \\
- & - & - & - & - & - & - & 1 & - & - & 0 & - & - & - & - & - & & 8 \\
- & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 9 \\
- & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 10 \\
- & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & & 11 \\
- & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 0 & - & - & 0 & - & - & - & - & & 12 \\
- & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 13 \\
- & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 14 \\
- & - & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & & 15 \\
- & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 1 & - & - & - & 0 & - & - & - & & 16 \\
1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 17 \\
- & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 18 \\
- & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 19 \\
- & - & - & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & & 20 \\
1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 21 \\
- & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 22 \\
- & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & & 23 \\
- & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & - & - & - & - & - & 0 & - & & 24 \\
- & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 25 \\
- & - & - & - & 1 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 26 \\
- & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & & 27 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & 0 & - & - & - & - & - & - & 0 & & 28 \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 29
\end{array}.
$$

Легко убедиться, что для КНФ $C^{f} \wedge P^{g}$ существует выполняющий ее набор (например, один из наборов, поглощаемых $\bar{x}_1\ \bar{x}_3\, x_5\ \bar{x}_6\, y_2\ \bar{w}_1\, w_2\ \bar{w}_3\ \bar{w}_4\ \bar{w}_5\ \bar{w}_6\ \bar{w}_7$). Следовательно, КНФ выполнима и система $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ не реализуется системой $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Отсюда можно сделать вывод, что системы ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ неэквивалентны.

В принципе, отношение эквивалентности между системами ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (если интересует только это отношение между системами функций) можно также проверить, запуская SAT-solver только один раз. Для этого КНФ $C^{g} \wedge P^{f}$ и $C^{f} \wedge P^{g}$ объединяются в формулу $(C^{g} \wedge P^{f}) \vee (C^{f} \wedge P^{g})$.

Утверждение 6. *Системы ЧБФ* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ *и* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *эквивалентны, если и только если формула* $(C^{g} \wedge P^{f}) \vee (C^{f} \wedge P^{g})$ *невыполнима.*

Формулу $(C^{g} \wedge P^{f}) \vee (C^{f} \wedge P^{g})$ можно привести к виду КНФ, используя, например, вышеописанное единичное кодирование формул $C^{g} \wedge P^{f}$ и $C^{f} \wedge P^{g}$ с помощью переменных $u_1$ и $u_2$:

$$(C^{g} \wedge P^{f} \vee \bar{u}_1) \wedge (C^{f} \wedge P^{g} \vee \bar{u}_2) \wedge (u_1 \vee u_2). \tag{8}$$

КНФ (8) невыполнима тогда и только тогда, когда системы ЧБФ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ эквивалентны.

Ясно, что отдельные функции систем ЧБФ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ могут находиться в отношении реализуемости и эквивалентности даже тогда, когда эти отношения не имеют места для систем.

Например, легко убедиться, что эквивалентны функции $f_1$ и $g_1$:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & f_1 & \quad & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & g_1 \\
1 & 1 & 0 & - & - & - & & 1 & & 1 & 1 & 0 & - & - & - & & 1 \\
0 & 0 & - & 1 & 0 & - & & 0 & & - & 0 & - & 1 & 0 & - & & 0 \\
1 & 0 & - & - & 0 & - & & 0 & & - & 1 & 0 & - & - & 1 & & 1 \\
- & 1 & 0 & 0 & - & 1 & & 1 & & 1 & 0 & - & - & 0 & - & & 0
\end{array},
$$

построив по аналогии с (8) КНФ $(C^{f1} \wedge P^{g1} \vee \bar{u}_1) \wedge (C^{g1} \wedge P^{f1} \vee \bar{u}_2) \wedge (u_1 \vee u_2)$ и проверив ее на выполнимость с помощью SAT-решателя.

Для оценки быстродействия предлагаемого метода проверки реализуемости между системами ЧБФ был решен ряд примеров, представляющих пары систем ЧБФ, сгенерированных псевдослучайным образом [9]. Генерировались системы ЧБФ, заведомо находившиеся в отношении реализуемости, так как в этих случаях вопрос о реализуемости сводился к проверке невыполнимости (см. утверждение 6) КНФ, на что требовался максимум времени работы SAT-решателя.

Программа, реализующая метод, была написана на языке C++, в качестве SAT-решателя использовалась известная программа MiniSat [4]. Исследования проводились на ПЭВМ Pentium IV 2400 МГц. Число аргументов систем ЧБФ варьировалось от 20 до 40, функций – от 20 до 50, интервалов области определения системы – от 1000 до 18 000. Время работы программы изменялось от 0,5 с (для простых примеров) до 2000 с (для наиболее сложных примеров).

**Заключение**

Предложенный в работе метод проверки отношений эквивалентности и реализуемости между системами частичных булевых функций сводит рассматриваемую задачу к задаче проверки выполнимости КНФ и основан на использовании отношения импликации для формирования КНФ разрешения одной из сравниваемых систем и КНФ запрета другой. Следует заметить, что метод может быть применим и в том случае, когда функции сравниваемых систем полностью определены, при условии, что области их определения заданы в явном виде многовыходными интервалами.

Нетрудно показать, что размер формируемой предложенным методом КНФ, для которой решается задача выполнимости, полиномиально зависит от размерностей сравниваемых систем функций. Основное же время при проверке отношений эквивалентности и реализуемости между системами ЧБФ приходится на установление выполнимости полученной КНФ.

**Список литературы**

1. Kuehlmann, A. Combinational and Sequential Equivalence Checking / A. Kuehlmann, A.J. Cornelis van Eijk // Logic synthesis and Verification ; ed. S. Hassoun, T. Sasao, R.K. Brayton. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 343–372.

2. Advanced Formal Verification / R. Drechsler [et al.]. – Boston, Dordrecht, London : Kluwer Academic Publishers, 2005. – 249 p.

3. Новиков, Д.Я. Программный комплекс для верификации комбинационных устройств в процессе логического проектирования / Д.Я. Новиков, Л.Д. Черемисинова // Четвертый Белорусский космический конгресс : Материалы конгресса, Минск, 25–27 октября 2011 г. : в 2 т. / ОИПИ НАН Беларуси ; редкол.: А.В. Тузиков [и др.]. – Минск, 2011. – Т. 2. – С. 289–293.

4. Sorensson, N. MiniSat v1.13 A SAT Solver with Conflict-Clause Minimization / N. Sorensson, N. Een // The International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT 2005) [Electronic resource]. – 2005. – Mode of access : http://www.lri.fr/~simon/contest/results/descriptions/solvers/minisat_static.pdf. – Date of access : 16.02.2009.

5. Kunz, W. SAT and ATPG: Algorithms for Boolean Decision Problems / W. Kunz, J. Marques-Silva, S. Malik // Logic synthesis and Verification ; ed. S. Hassoun, T. Sasao and R.K. Brayton. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 309–341.

6. Goldberg, E. BerkMin: A fast and robust SAT-Solver / E. Goldberg, Y. Novikov // European Design and Test Conference (DATE'02) : Proc. of the conf., Paris, 4–8 March 2002 / Le Palais des Congres. – Paris, 2002. – P. 142–149.

7. Cheremisinova, L. SAT-Based Approach to Verification of Logical Descriptions with Functional Indeterminacy / L. Cheremisinova, D. Novikov // 8th Intern. Workshop on Boolean Problems : Proc. of the Workshop, Freiberg, 18–19 September 2008 / Techn. univ. Bergakademie ; ed. by B. Steinbach. – Freiberg, 2008. – P. 59–66.

8. Черемисинова, Л.Д. Формальная верификация описаний с функциональной неопределенностью на основе проверки выполнимости конъюнктивной нормальной формы / Л.Д. Черемисинова, Д.Я. Новиков // Автоматика и вычислительная техника. – 2010. – № 1. – С. 5–16.

9. Закревский, А.Д. Генераторы псевдослучайных логико-комбинаторных объектов в С++ / А.Д. Закревский, Н.Р. Торопов // Логическое проектирование. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. – Вып. 4. – С. 49–63.

**Поступила 01.03.12**

*Объединенный институт проблем*
*информатики НАН Беларуси,*
*Минск, Сурганова, 6*
*e-mail: dima_nov@mail.ru*
*cld@newman.bas-net.by*

**D.Ya. Novikov, L.D. Cheremisinova**

## IMPLICATIVE METHOD OF PARTIALLY DEFINED BOOLEAN FUNCTIONS ANALYSIS

We consider a problem of verifying whether systems of partially defined Boolean functions are in relation of equivalence or realization. A solution method is proposed. It reduces the considered problem to the verification of satisfiability of a conjunctive normal form (CNF), which is constructed using implication relation.