

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:537.8

В.Т. Ерофеев¹, Г.Ч. Шушкевич², С.С. Грабчиков³, В.Ф. Бондаренко⁴МОДЕЛЬ ЭКРАНИРОВАНИЯ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
МНОГОСЛОЙНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ЭКРАНОМ

Предлагается алгоритм сведения решения краевой задачи проникновения постоянного магнитного поля через многослойный магнитный цилиндрический экран к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Выводится аналитическая формула для вычисления коэффициента эффективности экрана. Интегральное уравнение решается численно. Исследуются экранирующие свойства конечного и бесконечного многослойных экранов с большим числом слоев.

Введение

В настоящее время развитие техники направлено на внедрение технических устройств из композитных многослойных материалов, которые обладают специальными физическими свойствами. В частности, вся космическая техника основана на использовании инновационных разработок по созданию приборов, которые, как правило, чувствительны к воздействию внешних электромагнитных полей. Хорошо известно, что на устойчивость функционирования аппаратуры влияют внешние магнитные поля, воздействие которых приводит к сбоям в ее работе. В связи с этим актуальным является создание экранов различных типов, способствующих улучшению защищенности технических устройств [1–3], а также биологических объектов [4] от воздействия магнитных полей. В работах [5, 6] указано, что анизотропия и многослойность материала экранов улучшают эффективность экранирования. В книге [7] разработаны методы расчета тонких экранов геометрически правильной формы с использованием специальных функций, теорем сложения и усредненных граничных условий на экранах, с помощью которых аналитически решены типовые задачи экранирования.

В настоящей статье методика работы [7] развита применительно к открытым в торцах конечным цилиндрическим многослойным экранам с использованием усредненных нелокальных двухсторонних граничных условий, описывающих проникновение постоянных магнитных полей через слои ортогонально экрану. Так как технология изготовления таких экранов разработана, численная реализация модели позволит оптимизировать многослойные экраны.

1. Постановка задачи

В однородном пространстве R^3 с магнитной проницаемостью $\mu_0 = 1$ расположен цилиндрический тонкостенный экран $D\{R_1 < \rho < R_2, |z| < l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ с высотой $2l$ и толщиной $h = R_2 - R_1$, $\{\rho, \varphi, z\}$ – цилиндрические координаты. Цилиндр состоит из n цилиндрических слоев $\Omega_s\{\rho_s < \rho < \rho_{s+1}, |z| < l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ с относительными магнитными проницаемостями $\mu^{(s)}$, $s = \overline{1, n}$; $\rho_1 = R_1$, $\rho_{n+1} = R_2$; $\Delta_s = \rho_{s+1} - \rho_s$ – толщина s -го слоя, $h = \sum_{s=1}^n \Delta_s$ – толщина экрана D .

Обозначим внутреннюю и внешнюю лицевые поверхности экрана D соответственно $\Gamma_- \{\rho = R_1, |z| < l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $\Gamma_+ \{\rho = R_2, |z| < l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Введем цилиндрическую поверхность $\Gamma \left\{ \rho = R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2), |z| < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$, которая разделяет внутреннюю цилиндриче-

скую область $D_1 \{0 \leq \rho < R, |z| < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ и внешнюю $D_2 \{\rho > R, |z| < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Поверхность $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_u$, $\Gamma_0 \{\rho = R, |z| > l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $\Gamma_u \{\rho = R, |z| < l, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ – срединная поверхность экрана D . На экран D воздействует первичное постоянное, ортогональное оси цилиндра магнитное поле $\vec{H}_0 = -H_0 \vec{e}_x$ с магнитным потенциалом

$$u_0 = H_0 \rho \cos \varphi, \quad H_0 = \text{const.} \quad (1)$$

Обозначим магнитные потенциалы, образующиеся в результате взаимодействия первичного магнитного поля с экраном D : u'_1 – вторичное поле в области D_1 ; u'_2 – отраженное поле в области D_2 ; $u_j = u_0 + u'_j$ – суммарное поле в областях D_j . Магнитные поля определяются формулами

$$\vec{H}_0 = -\text{grad } u_0, \quad \vec{H}_j = -\text{grad } u_j. \quad (2)$$

Сформулируем краевую задачу, описывающую взаимодействие поля \vec{H}_0 с экраном D .

Краевая задача. Для заданного первичного потенциала u_0 требуется определить потенциалы $u'_j \in C^2(D_j) \cap C^1(\bar{D}_j)$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа

$$\Delta u'_j = 0 \quad \text{в } D_j; \quad (3)$$

– граничным условиям

$$u_2|_{\Gamma_0} = u_1|_{\Gamma_0}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \Big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \Big|_{\Gamma_0}; \quad (4)$$

$$u_2(M_2) \Big|_{\Gamma_+} = \left(B_{11} u_1(M_1) + B_{12} \frac{\partial u_1(M_1)}{\partial \rho} \right) \Big|_{\Gamma_-}, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial u_2(M_2)}{\partial \rho} \right) \Big|_{\Gamma_+} = \left(B_{21} u_1(M_1) + B_{22} \frac{\partial u_1(M_1)}{\partial \rho} \right) \Big|_{\Gamma_-},$$

где $M_j = (\rho = R_j, \varphi, z)$, $|z| < l$;

– условиям на бесконечности

$$r u'_1(M) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad r u'_2(M) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где r – сферическая координата точки M .

Заметим, что двухсторонние граничные условия (5) моделируют проникновение магнитного поля \vec{H}_0 через D .

2. Модель двухсторонних граничных условий

Для вывода граничных условий (5), связывающих поля по обе стороны цилиндрического экрана, рассмотрим бесконечный цилиндрический слой $\Omega \{r_1 < \rho < r_2, |z| < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ с относительной магнитной проницаемостью μ . Области $S_1 (0 \leq \rho < r_1)$, $S_2 (\rho > r_2)$ заполнены средами с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Обозначим магнитные потенциалы через u_j в областях S_j и u в области Ω . На поверхностях раздела сред выполнены классические граничные условия сопряжения [8]

$$(u_1 - u)|_{\rho=r_1} = 0, \quad \left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_1} = 0; \quad (7)$$

$$(u_2 - u)|_{\rho=r_2} = 0, \quad \left(\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_2} = 0. \quad (8)$$

Учитывая тот факт, что на экран действует поле (1), не зависящее от координаты z , представим потенциал в слое Ω как

$$u = \left(a\rho + \frac{b}{\rho} \right) \cos \varphi, \quad r_1 < \rho < r_2, \quad (9)$$

где a, b – постоянные.

Подставляя (9) в граничные условия (7), получим

$$a + \frac{b}{r_1^2} = \frac{1}{r_1} \bar{u}_1 \Big|_{\rho=r_1}, \quad a - \frac{b}{r_1^2} = \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_1}, \quad (10)$$

где $\bar{u}_1 = u_1 / \cos \varphi$.

Разрешая систему (10), определим постоянные

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} \bar{u}_1 + \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_1}, \quad b = \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} \bar{u}_1 - \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_1}. \quad (11)$$

Граничные условия (8) будут удовлетворены при подстановке (9) в (8). Тогда с учетом формул (11) получим соотношения

$$u_2 \Big|_{\rho=r_2} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{r}} + \bar{r} \right) u_1 + \frac{\mu_1 r_1}{2\mu} \left(\frac{1}{\bar{r}} - \bar{r} \right) \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_1};$$

$$\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=r_2} = \left(\frac{\mu}{2r_1} (1 - \bar{r}^2) u_1 + \frac{\mu_1}{2} (1 + \bar{r}^2) \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=r_1}.$$

Запишем их в матричном виде.

Заключение 1. Получено векторное граничное условие, связывающее поля по обе стороны цилиндрического слоя Ω :

$$\vec{W}_2 \Big|_{\rho=r_2} = \hat{A} \vec{W}_1 \Big|_{\rho=r_1}, \quad (12)$$

$$\text{где } \vec{W}_j = \begin{pmatrix} u_j \\ \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} = \frac{1}{2\bar{r}} (1 + \bar{r}^2), \quad A_{12} = \frac{\Delta}{2\mu} (1 + \bar{r}), \quad A_{21} = \frac{\mu\Delta}{2r_1 r_2} (1 + \bar{r}),$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} (1 + \bar{r}^2), \quad \Delta = r_2 - r_1, \quad \bar{r} = r_1 / r_2. \quad \blacksquare$$

Запишем граничное условие (12) для цилиндрического слоя Ω_s многослойного экрана D . Воспользуемся классическим граничным условием на цилиндрической поверхности

$$\gamma_s(\rho = \rho_s): \vec{V}_{s-1} \Big|_{\rho=\rho_s} = \vec{V}_s \Big|_{\rho=\rho_s}, \quad \text{где } \vec{V}_s = \begin{pmatrix} v_s \\ \mu^{(s)} \frac{\partial v_s}{\partial \rho} \end{pmatrix}, \quad v_s - \text{магнитный потенциал в цилиндрическом}$$

слое Ω_s ; $\mu^{(s)}$ – относительная магнитная проницаемость слоя Ω_s . В результате условие (12) для слоя Ω_s имеет вид

$$\vec{V}_{s+1}\Big|_{\rho=\rho_{s+1}} = \hat{A}^{(s)} \vec{V}_s\Big|_{\rho=\rho_s}, \quad (13)$$

$$\text{где } \hat{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(s)} & A_{12}^{(s)} \\ A_{21}^{(s)} & A_{22}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad A_{11}^{(s)} = \frac{1}{2\bar{r}_s}(1 + \bar{r}_s^2), \quad A_{12}^{(s)} = \frac{\Delta_s}{2\mu^{(s)}}(1 + \bar{r}_s), \quad A_{21}^{(s)} = \frac{\mu^{(s)}\Delta_s}{2\rho_s\rho_{s+1}}(1 + \bar{r}_s), \quad (14)$$

$$A_{22}^{(s)} = \frac{1}{2}(1 + \bar{r}_s^2), \quad \bar{r}_s = \rho_s/\rho_{s+1}, \quad \Delta_s = \rho_{s+1} - \rho_s.$$

Воспользуемся граничным условием сопряжения на цилиндрической поверхности $\gamma_{n+1}(\rho = R_2 = \rho_{n+1})$: $\vec{W}_2\Big|_{\rho=R_2} = \vec{V}_n\Big|_{\rho=\rho_{n+1}}$, тогда для слоя Ω_n из (13) следует $\vec{W}_2\Big|_{\rho=R_2} = \hat{A}^{(n)} \vec{V}_n\Big|_{\rho=\rho_n}$.

Далее, последовательно применяя соотношения (13), получим

$$\vec{W}_2\Big|_{\rho=R_2} = \hat{A}^{(n)} \hat{A}^{(n-1)} \dots \hat{A}^{(1)} \vec{W}_1\Big|_{\rho=R_1}.$$

Заключение 2. Получено векторное граничное условие, связывающее поля по обе стороны цилиндрического n -слойного экрана D :

$$\vec{W}_2\Big|_{\rho=R_2} = \hat{B} \vec{W}_1\Big|_{\rho=R_1}, \quad (15)$$

где $\hat{B} = \hat{A}^{(n)} \hat{A}^{(n-1)} \dots \hat{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, матрицы $\hat{A}^{(s)}$ определяются формулами (14). ■

Для краевой задачи (3)–(6) в областях D_j магнитные проницаемости $\mu_j = \mu_0 = 1$. В этом случае полученное граничное условие (15) используется в качестве модели граничных условий (5).

3. Преобразование граничных условий

Потенциалы магнитных полей $u'_j = v'_j \cos \varphi$, $u_0 = v_0 \cos \varphi$ в областях D_j представим в интегральном виде через цилиндрические гармонические функции [9]

$$\begin{aligned} v'_1 &= \int_0^\infty x(\lambda) \frac{I_1(\lambda\rho)}{I_1(\lambda R)} \cos \lambda z d\lambda, \quad 0 \leq \rho < R; \\ v'_2 &= \int_0^\infty y(\lambda) \frac{K_1(\lambda\rho)}{K_1(\lambda R)} \cos \lambda z d\lambda, \quad \rho > R, \end{aligned} \quad (16)$$

где $x(\lambda), y(\lambda)$ – неизвестные функции; $I_m(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя; $K_m(\cdot)$ – функции Макдональда.

Преобразуем нелокальные двухсторонние граничные условия (4), (5) к граничным условиям для потенциалов v'_j , переводя их на срединную поверхность Γ_y . В результате

$$(v'_2 - v'_1)\Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v'_2}{\partial \rho} - \frac{\partial v'_1}{\partial \rho} \right)\Big|_{\Gamma_0} = 0; \quad (17)$$

$$(v'_2 - v'_1)\Big|_{\Gamma_y} = f_1(z) + c_1, \quad \left(\frac{\partial v'_2}{\partial \rho} - \frac{\partial v'_1}{\partial \rho} \right)\Big|_{\Gamma_y} = f_2(z) + c_2, \quad (18)$$

где

$$f_1(z) = \left((B_{11} - 1)v_1' + B_{12} \frac{\partial v_1'}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_1}, \quad |z| < l,$$

$$f_2(z) = \left(B_{21}v_1' + (B_{22} - 1) \frac{\partial v_1'}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_1}, \quad |z| < l;$$
(19)

$$c_1 = \left(B_{11}v_0 + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_1} - v_0 \Big|_{\rho=R_2} = H_0 (B_{11}R_1 + B_{12} - R_2),$$

$$c_2 = \left(B_{21}v_0 + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_1} - \frac{\partial v_0}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R_2} = H_0 (B_{21}R_1 + B_{22} - 1).$$

В дальнейшем воспользуемся интегральным преобразованием

$$f(z) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(\lambda) \cos \lambda z d\lambda, \quad \tilde{f}(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(z) \cos \lambda z dz. \quad (20)$$

Учитывая (16), запишем (19) в интегральном виде

$$f_j(z) = \int_0^{\infty} x(\lambda) g_j(\lambda) \cos \lambda z d\lambda, \quad |z| < l, \quad (21)$$

где

$$g_1(\lambda) = (B_{11}I_1(\lambda R_1) + B_{12}\lambda I_1'(\lambda R_1)) / I_1(\lambda R);$$

$$g_2(\lambda) = (B_{21}I_1(\lambda R_1) + B_{22}\lambda I_1'(\lambda R_1)) / I_1(\lambda R).$$

Продолжим функции (19) на полуось $0 \leq z < \infty$:

$$F_j(z) = \begin{cases} f_j(z), & 0 \leq z < l \\ 0, & l < z < \infty \end{cases} = \int_0^{\infty} \tilde{F}_j(\lambda) \cos \lambda z d\lambda. \quad (22)$$

Применяя к равенству (22) обратное интегральное преобразование (20) и учитывая (21), вычислим

$$\tilde{F}_j(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^l f_j(z) \cos \lambda z dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x(\eta) g_j(\eta) \int_0^l \cos \eta z \cos \lambda z dz d\eta = \int_0^{\infty} x(\eta) g_j(\eta) L(\lambda, \eta) d\eta, \quad (23)$$

где

$$L(\lambda, \eta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\eta - \lambda)l}{\eta - \lambda} + \frac{\sin(\eta + \lambda)l}{\eta + \lambda} \right).$$

Рассмотрим также кусочно-постоянные функции

$$c_j(z) = \begin{cases} c_j, & 0 \leq z < l \\ 0, & l < z < \infty \end{cases} = c_j \int_0^{\infty} q(\lambda) \cos \lambda z d\lambda, \quad (24)$$

где $q(\lambda) = \frac{2 \sin \lambda l}{\pi \lambda}$.

Используя функции (22), (24), объединим граничные условия (17), (18). Тогда приходим к граничным условиям

$$\begin{aligned} (v'_2 - v'_1)|_{\rho=R} &= F_1(z) + c_1(z), \quad 0 \leq z < \infty; \\ \left(\frac{\partial v'_2}{\partial \rho} - \frac{\partial v'_1}{\partial \rho} \right)|_{\rho=R} &= F_2(z) + c_2(z), \quad 0 \leq z < \infty. \end{aligned} \quad (25)$$

В дальнейшем граничные условия (25) используются как основная модель для решения исходной задачи проникновения магнитного поля через цилиндрический экран.

4. Интегральные уравнения

Используя граничные условия (25), сведем решение краевой задачи (3)–(6) к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Функции (16), (22), (24), входящие в равенства (25), записаны в виде интегралов Фурье (20). Применяя обратное интегральное преобразование к равенствам (25), получим уравнения

$$y(\lambda) = x(\lambda) + \tilde{F}_1(\lambda) + c_1 q(\lambda); \quad (26)$$

$$\lambda \left(y(\lambda) \frac{K'_1(\lambda R)}{K_1(\lambda R)} - x(\lambda) \frac{I'_1(\lambda R)}{I_1(\lambda R)} \right) = \tilde{F}_2(\lambda) + c_2 q(\lambda). \quad (27)$$

С помощью (26) исключим $y(\lambda)$ из уравнения (27). Учитывая формулу $I'_1(x)K_1(x) - K'_1(x)I_1(x) = \frac{1}{x}$ [10], получим равенство

$$x(\lambda) = RI_1(\lambda R) \left[\lambda \tilde{F}_1(\lambda) K'_1(\lambda R) - \tilde{F}_2(\lambda) K_1(\lambda R) + q(\lambda) (c_1 \lambda K'_1(\lambda R) - c_2 K_1(\lambda R)) \right]. \quad (28)$$

Подставив интегралы (23) в (28), получим уравнение

$$\begin{aligned} x(\lambda) = RI_1(\lambda R) & \left(\lambda K'_1(\lambda R) \int_0^\infty x(\eta) g_1(\eta) L(\lambda, \eta) d\eta - K_1(\lambda R) \int_0^\infty x(\eta) g_2(\eta) L(\lambda, \eta) d\eta \right) + \\ & + Rq(\lambda) I_1(\lambda R) (c_1 \lambda K'_1(\lambda R) - c_2 K_1(\lambda R)). \end{aligned} \quad (29)$$

Умножим (29) на регуляризирующий множитель $e^{-\lambda \frac{h}{4}}$ и введем новую неизвестную функцию $z(\lambda) = x(\lambda) e^{-\lambda \frac{h}{4}}$. Получим интегральное уравнение

$$z(\lambda) + \int_0^\infty K(\lambda, \eta) z(\eta) d\eta = f(\lambda), \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad (30)$$

где $K(\lambda, \eta) = RI_1(\lambda R) (g_2(\eta) K_1(\lambda R) - \lambda g_1(\eta) K'_1(\lambda R)) e^{(\eta-\lambda) \frac{h}{4}} L(\lambda, \eta);$

$$f(\lambda) = Rq(\lambda) I_1(\lambda R) (\lambda c_1 K'_1(\lambda R) - c_2 K_1(\lambda R)) \exp\left(-\lambda \frac{h}{4}\right).$$

Для доказательства принадлежности функций интегрального уравнения (30) к пространствам L_2 воспользуемся асимптотическими формулами при $x \rightarrow \infty$ [10]:

$$I_1(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad I_1'(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad K_1(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad K_1'(x) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

$$\text{Тогда } g_1(\eta) \approx (A_{11} + A_{12}\eta) \sqrt{\frac{R}{R_1}} e^{-\eta \frac{h}{2}}, \quad g_2(\eta) \approx (A_{21} + A_{22}\eta) \sqrt{\frac{R}{R_1}} e^{-\eta \frac{h}{2}}.$$

При $\lambda \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty$ асимптотическое представление функций уравнения (30) имеет вид

$$K(\lambda, \eta) \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{R_1}} (A_{21} + \lambda A_{11} + \eta A_{22} + \lambda \eta A_{12}) e^{-(\lambda+\eta) \frac{h}{4}} L(\lambda, \eta);$$

$$f(\lambda) \approx -\frac{q(\lambda)}{2\lambda} (c_2 + c_1 \lambda) e^{-\lambda \frac{h}{4}}.$$

Так как $K(\lambda, \eta) \in L_2((0 < \lambda < \infty) \times (0 < \eta < \infty))$, $f(\lambda) \in L_2(0 < \lambda < \infty)$, интегральное уравнение (30) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

В уравнение (30) введем безразмерные параметры интегрирования $\bar{\lambda} = \lambda R$, $\bar{\eta} = \eta R$ с известной функцией $v(\lambda R) = \frac{z(\lambda)}{R^2 H_0}$. Получим уравнение

$$v(\bar{\lambda}) + \int_0^\infty K_0(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) v(\bar{\eta}) d\bar{\eta} = f_0(\bar{\lambda}), \quad 0 \leq \bar{\lambda} < \infty, \quad (31)$$

$$\text{где } K_0(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) = l(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) I_1(\bar{\lambda}) \left(R G_2(\bar{\eta}) K_1(\bar{\lambda}) - \bar{\lambda} G_1(\bar{\eta}) K_1'(\bar{\lambda}) \right) \exp\left((\bar{\eta} - \bar{\lambda}) \frac{\bar{h}}{4} \right);$$

$$G_1(\bar{\eta}) = \left(B_{11} I_1(\bar{\eta} \bar{R}_1) + B_{12} \frac{\bar{\eta}}{R} I_1'(\bar{\eta} \bar{R}_1) \right) / I_1(\bar{\eta}), \quad \bar{h} = \frac{h}{R};$$

$$G_2(\bar{\eta}) = \left(B_{21} I_1(\bar{\eta} \bar{R}_1) + B_{22} \frac{\bar{\eta}}{R} I_1'(\bar{\eta} \bar{R}_1) \right) / I_1(\bar{\eta}), \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{R};$$

$$l(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(\bar{\eta} - \bar{\lambda}) \bar{l}}{\bar{\eta} - \bar{\lambda}} + \frac{\sin(\bar{\eta} + \bar{\lambda}) \bar{l}}{\bar{\eta} + \bar{\lambda}} \right), \quad \bar{l} = \frac{l}{R};$$

$$f_0(\bar{\lambda}) = \frac{2}{\pi \bar{\lambda}} \sin(\bar{\lambda} \bar{l}) I_1(\bar{\lambda}) \left(\bar{c}_1 \frac{\bar{\lambda}}{R} K_1'(\bar{\lambda}) - \bar{c}_2 K_1(\bar{\lambda}) \right) \exp\left(-\bar{\lambda} \frac{\bar{h}}{4} \right);$$

$$\bar{c}_1 = B_{11} R_1 + B_{12} - R_2, \quad \bar{c}_2 = B_{21} R_1 + B_{22} - 1;$$

$$K_1'(x) = -\frac{1}{2} (K_0(x) + K_2(x)), \quad I_1'(x) = \frac{1}{2} (I_0(x) + I_2(x)).$$

Для вычисления функций Бесселя при больших аргументах воспользуемся аппроксимацией модифицированных функций Бесселя [10, с. 199]:

$$I_0(x) \approx i_0(x) e^x, \quad 3,75 < x < \infty,$$

$$i_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(0,39894228 + 0,01328592\bar{x} + 0,00225319\bar{x}^2 - 0,00157565\bar{x}^3 + 0,00916281\bar{x}^4 - \right. \\ \left. - 0,02057706\bar{x}^5 + 0,02635537\bar{x}^6 - 0,01647633\bar{x}^7 + 0,00392377\bar{x}^8 \right),$$

$$\bar{x} = \frac{3,75}{x}, \quad 3,75 < x < \infty.$$

$$I_1(x) \approx i_1(x)e^x, \quad 3,75 < x < \infty,$$

$$i_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(0,39894228 - 0,03988024\bar{x} - 0,00362018\bar{x}^2 + 0,00163801\bar{x}^3 - 0,01031555\bar{x}^4 + \right. \\ \left. + 0,02282967\bar{x}^5 - 0,02895312\bar{x}^6 + 0,01787654\bar{x}^7 - 0,00420059\bar{x}^8 \right).$$

$$I_1'(x) \approx i_2(x)e^x, \quad i_2(x) = i_0(x) - \frac{1}{x}i_1(x).$$

$$K_0(x) \approx k_0(x)e^{-x}, \quad 2 < x < \infty,$$

$$k_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1,25331414 - 0,07832358\bar{\bar{x}} + 0,02189568\bar{\bar{x}}^2 - 0,01062446\bar{\bar{x}}^3 + \right. \\ \left. + 0,00587872\bar{\bar{x}}^4 - 0,00251540\bar{\bar{x}}^5 + 0,00053208\bar{\bar{x}}^6 \right),$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{2}{x}.$$

$$K_1(x) \approx k_1(x)e^{-x}, \quad 2 < x < \infty,$$

$$k_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1,25331414 - 0,23498619\bar{\bar{x}} - 0,03655620\bar{\bar{x}}^2 + 0,01504268\bar{\bar{x}}^3 - \right. \\ \left. - 0,00780353\bar{\bar{x}}^4 + 0,00325614\bar{\bar{x}}^5 - 0,00068245\bar{\bar{x}}^6 \right).$$

$$K_1'(x) \approx k_2(x)e^{-x},$$

$$k_2(x) = - \left(k_0(x) + \frac{1}{x}k_1(x) \right).$$

Приведем формулы для правой части и ядра интегрального уравнения (31):

$$f_0(\bar{\lambda}) = \frac{2}{\pi\bar{\lambda}} \sin(\bar{\lambda}l) i_1(\bar{\lambda}) \left(\bar{c}_1 \frac{\bar{\lambda}}{R} k_2(\bar{\lambda}) - \bar{c}_2 k_1(\bar{\lambda}) \right) \exp\left(-\bar{\lambda} \frac{h}{4}\right);$$

$$K_0(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) = l(\bar{\lambda}, \bar{\eta}) i_1(\bar{\lambda}) \left(Rg_2(\bar{\eta}) k_1(\bar{\lambda}) - \bar{\lambda}g_1(\bar{\eta}) k_2(\bar{\lambda}) \right) \exp\left(-(\bar{\eta} + \bar{\lambda}) \frac{h}{4}\right),$$

где $g_1(\bar{\eta}) = \left(B_{11}i_1(\bar{\eta}R_1) + B_{12} \frac{\bar{\eta}}{R} i_2(\bar{\eta}R_1) \right) / i_1(\bar{\eta});$

$$g_2(\bar{\eta}) = \left(B_{21}i_1(\bar{\eta}R_1) + B_{22} \frac{\bar{\eta}}{R} i_2(\bar{\eta}R_1) \right) / i_1(\bar{\eta}).$$

5. Вычисление коэффициентов экранирования

Вычислим магнитное поле в центре экрана

$$\vec{H}_1 \Big|_{\substack{z=0 \\ \rho=0}} = -\text{grad} u_1 \Big|_{\substack{z=0 \\ \rho=0}} = -H_0 \vec{e}_x - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda x(\lambda)}{I_1(\lambda R)} d\lambda \vec{e}_x = -H_0 \left(1 + L(v(\bar{\lambda}))\right) \vec{e}_x,$$

где оператор

$$L(v(\bar{\lambda})) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\bar{\lambda} v(\bar{\lambda})}{I_1(\bar{\lambda})} \exp\left(\bar{\lambda} \frac{h}{4}\right) d\bar{\lambda} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\bar{\lambda} v(\bar{\lambda})}{i_1(\bar{\lambda})} \exp\left(-\bar{\lambda} \left(1 - \frac{h}{4}\right)\right) d\bar{\lambda}.$$

Определим коэффициент экранирования в центре цилиндрического экрана с помощью выражения

$$K_\vartheta = \frac{\left| \vec{H}_1 \right|}{\left| \vec{H}_0 \right| \Big|_{\substack{z=0 \\ \rho=0}}} = \left| 1 + L(v(\bar{\lambda})) \right|. \quad (32)$$

Коэффициент эффективности экрана определяется формулой

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{K_\vartheta}. \quad (33)$$

Заметим, что для бесконечно протяженного цилиндрического многослойного экрана коэффициент эффективности

$$\mathfrak{D}_\infty = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} B_{11} + \frac{B_{12}}{R_2} + R_1 B_{21} + B_{22} \right),$$

где B_{js} – элементы матрицы из формулы (15).

В случае однослойного однородного бесконечного экрана толщины h с магнитной проницаемостью μ коэффициент эффективности экрана

$$\mathfrak{D}_\infty^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \frac{h}{R_2} (1 + \bar{R}) + \bar{R}^2 + 1 \right], \quad \bar{R} = \frac{R_1}{R_2}.$$

6. Алгоритм вычисления эффективности бесконечного многослойного цилиндрического экрана

Рассматривается круговой цилиндрический многослойный бесконечный экран толщины h , который находится под воздействием постоянного внешнего магнитного поля, направленного ортогонально оси цилиндра. Исследуется величина, характеризующая ослабление поля во внутренней области экрана.

Алгоритм

1. Исходные данные:

H_0 – величина внешнего постоянного магнитного поля;

n – число слоев в цилиндрическом экране;

R_1 – внутренний радиус цилиндрического экрана;

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s, \dots, \Delta_n$ – толщина слоев экрана, занумерованных из внутренней области во внешнюю;

$\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(s)}, \dots, \mu^{(n)}$ – относительные магнитные проницаемости слоев экрана.

2. Промежуточные величины:

$h = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ – толщина экрана;

$R_2 = R_1 + h$ – внешний радиус экрана;

$$\bar{R} = \frac{R_1}{R_2}, \quad r_1 = R_1, \quad r_2 = R_1 + \Delta_1, \quad \dots, \quad r_{s+1} = r_s + \Delta_s, \quad \dots, \quad r_{n+1} = r_n + \Delta_n;$$

$$p_s = \frac{r_s}{r_{s+1}}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Последовательность матриц 2×2 :

$$\hat{A}^{(s)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(s)} & A_{12}^{(s)} \\ A_{21}^{(s)} & A_{22}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

$$A_{11}^{(s)} = \frac{1}{2p_s}(1 + p_s^2), \quad A_{12}^{(s)} = \frac{\Delta_s}{2\mu^{(s)}}(1 + p_s), \quad A_{21}^{(s)} = \frac{\mu^{(s)}\Delta_s}{2r_s r_{s+1}}(1 + p_s), \quad A_{22}^{(s)} = \frac{1}{2}(1 + p_s^2).$$

Произведение матриц:

$$\hat{B} = \hat{A}^{(n)} \hat{A}^{(n-1)} \dots \hat{A}^{(s)} \dots \hat{A}^{(2)} \hat{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

3. Итоговые величины:

$\mathcal{E}_\infty = \frac{D}{2}$ – коэффициент эффективности экранирования;

$K_s = \frac{2}{D}$ – коэффициент ослабления поля внутри экрана (коэффициент экранирования),

где $D = \bar{R} \left(B_{11} + \frac{B_{12}}{R_1} + R_2 B_{21} \right) + B_{22}$.

7. Вычислительный эксперимент

С помощью системы компьютерной математики Mathcad [11] проведены вычисления коэффициента эффективности экранирования магнитного поля многослойным бесконечным и конечным цилиндрическими экранами.

Используя квадратурную формулу Лагерра при $N=15$ [10], интегральное уравнение Фредгольма второго рода (31) преобразовано к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$z_n + \sum_{k=0}^N A_k K_{nk} z_k = g_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (34)$$

где $A_k = w_k \exp(\bar{\lambda}_k)$; $K_{nk} = K_0(\bar{\lambda}_n, \bar{\lambda}_k)$; $g_n = f_0(\bar{\lambda}_n)$, $\bar{\lambda}_n$ – нули многочлена Лагерра $L_N(x)$; w_k – весовые коэффициенты.

Система (34) соответствует интегральному уравнению Фредгольма второго рода (31). Решение системы (34) принимается за численное решение интегрального уравнения (31) в точках $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \dots, N$: $v(\bar{\lambda}_k) = z_k$.

Рассмотрен случай экрана, когда магнитные и немагнитные слои чередуются:
 $n = 2m$, где m – число пар слоев;

$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_5 = \dots = \Delta_{n-1} = \frac{h_{\text{сум}}}{m}$ – толщина магнитных слоев, где $h_{\text{сум}}$ – суммарная толщина

магнитных слоев;

$\Delta_2 = \Delta_4 = \dots = \Delta_n = \alpha \Delta_1$ – толщина немагнитных слоев, где α – параметр отношения толщины немагнитного слоя к толщине магнитного слоя для пары слоев;

$\mu^{(1)} = \mu^{(3)} = \dots = \mu^{(n-1)} = \mu^I$ – проницаемости магнитных слоев;

$\mu^{(2)} = \mu^{(4)} = \dots = \mu^{(n)} = \mu^{II} = 1$ – проницаемости немагнитных слоев.

Графики коэффициента эффективности экранирования магнитного поля многослойными бесконечным и конечным ($l = 20$ мм) цилиндрическими экранами изображены на рис. 1–4.

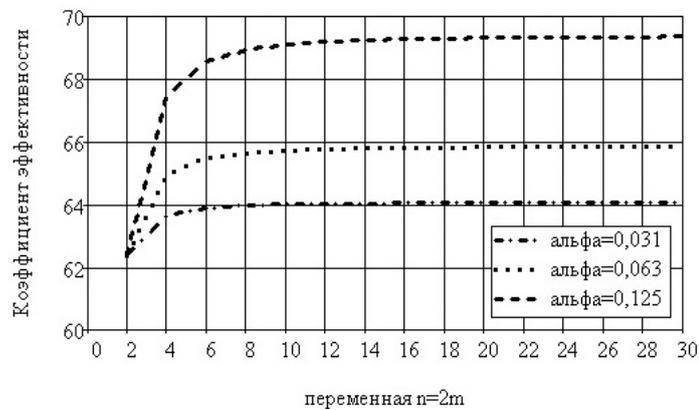


Рис. 1. Графики зависимости коэффициента эффективности экранирования магнитного поля многослойным бесконечным цилиндрическим экраном от числа слоев

для $\mu^I = 3 \cdot 10^3$, $R_1 = 11$ мм, $h_{\text{сум}} = 0,48$ мм и $\alpha = 0,031; 0,063; 0,125$ при $m = 1, 2, \dots, 15$

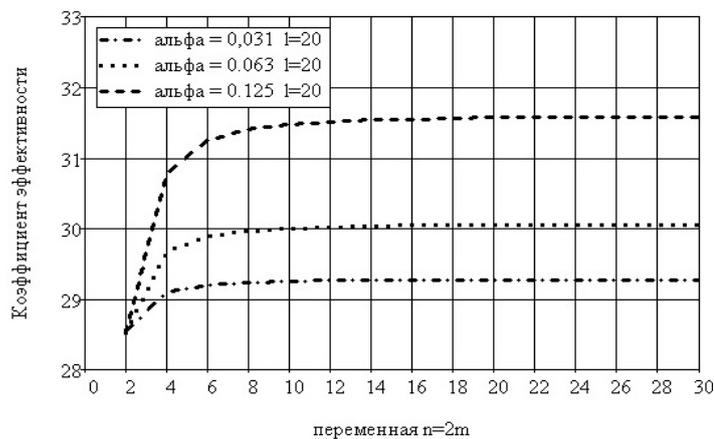


Рис. 2. Графики зависимости коэффициента эффективности экранирования магнитного поля многослойным конечным цилиндрическим экраном от числа слоев

для $\mu^I = 3 \cdot 10^3$, $R_1 = 11$ мм, $h_{\text{сум}} = 0,48$ мм и $\alpha = 0,031; 0,063; 0,125$ при $m = 1, 2, \dots, 15$

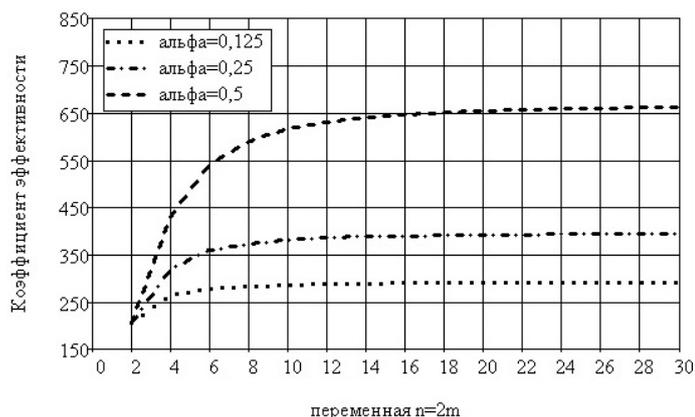


Рис. 3. Графики зависимости коэффициента эффективности экранирования магнитного поля многослойным бесконечным цилиндрическим экраном от числа слоев для $\mu^l = 10^4$, $R_1 = 11$ мм, $h_{\text{сум}} = 0,48$ мм и $\alpha = 0,125; 0,25; 0,5$ при $m = 1, 2, \dots, 15$

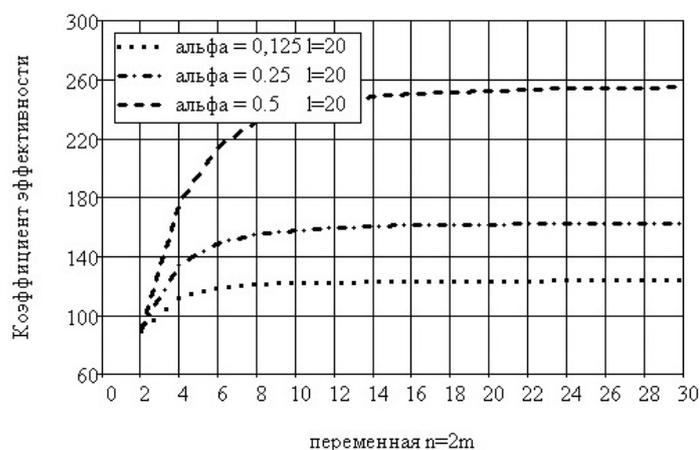


Рис. 4. Графики зависимости коэффициента эффективности экранирования магнитного поля многослойным конечным цилиндрическим экраном от числа слоев для $\mu^l = 10^4$, $R_1 = 11$ мм, $h_{\text{сум}} = 0,48$ мм и $\alpha = 0,125; 0,25; 0,5$ при $m = 1, 2, \dots, 15$

Сравнение эффективностей экранирования слоистых экранов показывает, что эффективность бесконечного цилиндрического экрана в 2–2,6 раз выше эффективности конечного экрана. Кроме того, увеличение толщины немагнитных слоев экрана, расположенных между магнитными слоями, увеличивает эффективность экранирования. Анализ графиков позволяет заключить, что эффективность композитного экрана, состоящего из чередующихся магнитных и немагнитных слоев, выше сплошного экрана.

Заключение

В работе представлена математическая модель двухсторонних нелокальных граничных условий на поверхности тонкостенного многослойного цилиндрического экрана, которые моделируют проникновение постоянных магнитных полей через стенки экрана. На основании граничных условий сформулирована краевая задача экранирования магнитного поля цилиндрическим экраном конечной длины. Разработана методика преобразования краевой задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Алгоритмы аналитических преобразований основаны на использовании специальных функций Бесселя. В результате математическое моделирование задачи сведено к численному решению интегрального уравнения и вычислению коэффициента эффективности слоистого экрана в зависимости от магнитных проницаемостей и толщины слоев.

Показано, что дробление сплошного магнитного цилиндрического экрана на магнитные и немагнитные слои увеличивает эффективность экранирования вплоть до 12 слоев (шесть магнитных и шесть немагнитных слоев). При этом считается, что суммарная толщина магнитных слоев сохраняется. Математическое моделирование с помощью предложенного в статье алгоритма может быть использовано при разработке технологий изготовления многослойных экранов с улучшенными свойствами экранирования. Разработанная методика также может быть распространена на случай низкочастотных магнитных полей [12].

Список литературы

1. Шапиро, Д.Н. Электромагнитное экранирование / Д.Н. Шапиро. – Долгопрудный : Изд. дом «Интеллект», 2010. – 120 с.
2. Резинкина, М.М. Использование численных расчетов для выбора средств экранирования от действия магнитного поля / М.М. Резинкина // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, вып. 11. – С. 17–24.
3. Глонягин, Ю.В. Элементы теории и расчета магнитостатических полей ферромагнитных тел / Ю.В. Глонягин. – Л. : Судостроение, 1967. – 180 с.
4. Холодов, Ю.А. Влияние магнитных полей на биологические объекты / Ю.А. Холодов. – М. : Наука, 1971. – 214 с.
5. Аполлонский, С.М. Анизотропия материалов – резерв повышения эффективности электромагнитных экранов / С.М. Аполлонский, В.Н. Острейко // Электротехника. – 1994. – № 11. – С. 51–53.
6. Фуфаева, Л.И. Эффективность экранирования постоянных магнитных полей многослойными экранами / Л.И. Фуфаева, А.Б. Тимофеев // Труды МАИ. – 1976. – Вып. 364. – С. 58–63.
7. Аполлонский, А.С. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках / С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеев. – Минск : Университетское, 1988. – 247 с.
8. Ерофеев, В.Т. Основы математического моделирования / В.Т. Ерофеев, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2002. – 195 с.
9. Ерофеев, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 256 с.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
11. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1 / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.
12. Ерофеев, В.Т. Моделирование процессов проникновения низкочастотных магнитных полей через многослойные экраны / В.Т. Ерофеев // Информатика. – 2011. – № 3 (31). – С. 22–32.

Поступила 16.05.12

¹Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by

²Гродненский государственный университет
им. Янки Купалы,
Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: g_shu@rambler.ru

³НПЦ НАН Беларуси по материаловедению,
Минск, ул. П. Бровки, 19
e-mail: gss@iftp.bas-net.by

⁴Высший государственный колледж связи,
Минск, ул. Ф. Скорины, 8/2

V.T. Erofeenko, G.Ch. Shushkevich, S.S. Grabchikov, V.F. Bondarenko

**MODEL OF CONSTANT MAGNETIC FIELDS SCREENING BY
MULTILAYER CYLINDRICAL SCREEN**

An algorithm of reducing the solution of a boundary value problem of penetration of a constant magnetic field through a magnetic multilayer cylindrical screen to the solution of a Fredholm integral equation of the second kind is offered. An analytical formula for calculation the efficiency ratio of the screen is derived. The integral equation is solved numerically. Shielding characteristics of finite and infinite multilayer screens with a large number of layers are investigated.