ИНФОРМАТИКА

2012 **октябрь-декабрь** **№ 4**

УДК 519.8

Я.М. Шафранский[1], Д.С. Следнев[2]

МИНИМИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДИРЕКТИВНЫХ СРОКОВ

Рассматривается задача минимизации максимального временного смещения в условиях неопределенности директивных сроков при наличии ограничений предшествования и обслуживании требований одним прибором $1|prec; d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$. *Формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности расписания в детерминированном случае, а также необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности расписания в случае с неопределенными директивными сроками, предлагается алгоритм построения глобально оптимального расписания.*

Введение

Рассматривается задача построения оптимального расписания работы обслуживающей системы, состоящей из одного прибора, который должен обслужить n требований. Прибор может обслуживать не более одного требования одновременно. Прерывания в обслуживании требования не допускаются. Все требования поступают в обслуживающую систему одновременно. Длительность обслуживания требования j составляет $p_j \ge 0$ единиц времени, $j = 1,\dots, n$. Каждому требованию j поставлен в соответствие директивный срок $d_j \ge 0$ завершения его обслуживания. На множестве требований задано отношение предшествования, представленное ориентированным бесконтурным графом $G = (V, E)$. Если требование j_1 предшествует требованию j_2, т. е. $(j_1, j_2) \in E$, то обслуживание требования j_2 не может быть начато до завершения обслуживания j_1.

Расписание в такой системе может быть представлено в виде допустимой относительно заданных ограничений предшествования перестановки $\pi = (\pi(1),\dots, \pi(n))$, определяющей последовательность обслуживания требований. Здесь $\pi(k)$ – требование, расположенное в перестановке π на позиции k.

Обозначим через $C_j(\pi) = p_{\pi(1)} + \dots + p_{\pi(k)}$ момент завершения обслуживания требования j, расположенного в перестановке π на месте k. Тогда $L_j(\pi) = C_j(\pi) - d_j$ – временное смещение момента завершения обслуживания требования j относительно его директивного срока.

Необходимо найти допустимую перестановку π, для которой максимальное временное смещение

$$L_{\max}(\pi) = \max\{L_1(\pi),\dots, L_n(\pi)\}$$

является наименьшим. Такая перестановка называется *оптимальной*.

Сформулированная задача рассматривается в условиях неопределенности, когда директивные сроки требований не заданы, а для каждого требования j известны лишь нижняя $d_j^{\min}$ и верхняя $d_j^{\max}$ границы возможных значений величины d_j.

Одним из примеров появления неопределенных директивных сроков является ситуация, когда приходится планировать сроки производства новой продукции, не зная точного момента наступления максимального спроса на нее, а имея лишь прогнозные оценки интервала, в котором лежит эта величина.

Следуя принятой в теории расписаний системе обозначений, представим детерминированный вариант задачи как $1|prec|L_{\max}$, а вариант в условиях неопределенности обозначим через $1|prec; d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$.

Если в графе G существует путь из вершины v в вершину u, то v называется предшественником u, а u – потомком v. Обозначим через $A_G(v)$ и $B_G(v)$ соответственно множество всех потомков и предшественников вершины v в графе G.

1. Детерминированный вариант задачи

В детерминированном случае для решения задачи $1|prec|L_{\max}$ можно воспользоваться известным алгоритмом Лоулера [1].

***Алгоритм* 1**

1. Полагаем $k = n$.
2. Находим множество T висячих вершин графа $G = (V, E)$, т. е. таких вершин v, что $A_G(v) = \varnothing$.
3. Находим в T такую вершину u, что $d_u = \max\{d_v | v \in T\}$.
4. Полагаем $\pi(k) = u$, $k = k - 1$ и модифицируем граф G, полагая $V = V \setminus \{u\}$.
5. Если $k > 0$, переходим к выполнению шага 2. Если $k = 0$, то оптимальная перестановка построена и алгоритм завершает работу.

Если граф представлен в виде матрицы смежности, то временная сложность алгоритма составляет $O(n^2)$. Если для каждой вершины заданы список входящих дуг и полустепень исхода вершины, алгоритм можно реализовать таким образом, что его временная сложность составит $O(\max\{m, n \log n\})$, где $m = |E|$.

В работе [2] установлены необходимые и достаточные условия оптимальности расписания для задачи $1||L_{\max}$, т. е. для детерминированного варианта рассматриваемой задачи при отсутствии ограничений предшествования. Приведенная ниже теорема усиливает этот результат, описывая необходимые и достаточные условия оптимальности расписания для задачи $1|prec|L_{\max}$. Предварительно введем понятие локального улучшения.

Будем говорить, что требование $\pi(k)$ имеет локальное улучшение в перестановке π, если существует такой индекс $i < k$, что $p_{\pi(i)} > 0$, $\pi(i) \notin B_G(\pi(k))$ и $d_{\pi(i)} > d_{\pi(k)}$, причем $\pi(i) \notin B_G(\pi(j))$ для тех $j \le k$, что $d_{\pi(j)} \le d_{\pi(k)}$.

Из определения локального улучшения следует, что в перестановке π между требованиями $\pi(i)$ и $\pi(k)$ могут находиться потомки требования $\pi(i)$, но для любого такого потомка $\pi(j)$ должно выполняться соотношение $d_{\pi(j)} > d_{\pi(k)}$. Переместим требование $\pi(i)$ и всех его потомков, находящихся между $\pi(i)$ и $\pi(k)$ в π, на позиции, расположенные непосредственно после $\pi(k)$. Нетрудно заметить, что в полученной допустимой перестановке π' выполняется соотношение $L_{\pi(k)}(\pi) < L_{\pi(k)}(\pi')$; для всех требований $\pi(j)$, перемещенных вправо, выполняется $L_{\pi(j)}(\pi) < L_{\pi(k)}(\pi')$, а для всех остальных требований $\pi(l)$ справедливо $L_{\pi(l)}(\pi) \le L_{\pi(l)}(\pi')$.

Теорема 1. *Допустимая перестановка* π *является оптимальной для задачи* $1|prec|L_{\max}$ *тогда и только тогда, когда существует такой индекс* k, *что* $L_{\max}(\pi) = L_{\pi(k)}(\pi)$ *и требование* $\pi(k)$ *не имеет локальных улучшений в* π.

Доказательство. Необходимость. Будем называть требование $\pi(k)$ *критическим*, если $L_{\max}(\pi) = L_{\pi(k)}(\pi)$.

Пусть π – оптимальная перестановка. Докажем необходимость, используя индукцию по количеству критических требований.

Пусть $\pi(k)$ – единственное критическое требование. Если условие теоремы не выполнено, то $\pi(k)$ имеет локальное улучшение в π, т. е. существует такое $i < k$, что $d_{\pi(i)} > d_{\pi(k)}$, причем $p_{\pi(i)} > 0$ и $\pi(i) \notin B_G(\pi(j))$ для тех $j = 1,\ldots, k$, что $d_{\pi(j)} \le d_{\pi(k)}$. Пусть $A_G(\pi(i)) \cap \{\pi(i+1),\ldots, \pi(k-1)\} = \{\pi(i_1),\ldots, \pi(i_a)\}$. Перестановка π имеет вид $\pi = (\ldots, \pi(i),\ldots, \pi(i_1),\ldots, \pi(i_2),\ldots, \pi(i_a),\ldots, \pi(k),\ldots)$. Из определения требования $\pi(i)$ следует, что $d_{\pi(j)} > d_{\pi(k)}$ для любого $j \in \{i_1,\ldots, i_a\}$. Рассмотрим допустимую перестановку π', которая получена из π путем переноса требований $\pi(i), \pi(i_1),\ldots, \pi(i_a)$ на позиции, следующие непосредственно за позицией требования $\pi(k)$, т. е. $\pi' = (\ldots, \pi(k), \pi(i), \pi(i_1), \pi(i_2),\ldots, \pi(i_a),\ldots)$. Требование $\pi(i_a)$ расположено на позиции k в перестановке π', поэтому $C_{\pi(i_a)}(\pi') = C_{\pi(k)}(\pi)$. Из $d_{\pi(i_a)} > d_{\pi(k)}$ следует $L_{\pi(i_a)}(\pi') < L_{\pi(k)}(\pi)$. Кроме того, $L_{\pi(i_{a-1})}(\pi') < L_{\pi(k)}(\pi),..., L_{\pi(i_1)}(\pi') < L_{\pi(k)}(\pi),\quad L_{\pi(i)}(\pi') < L_{\pi(k)}(\pi).$ Из $p_{\pi(i)} > 0$ следует $L_{\pi(k)}(\pi') <$ $< L_{\pi(k)}(\pi)$, а временные смещения всех остальных требований не увеличились. Таким образом, $L_{\max}(\pi') < L_{\max}(\pi)$, что противоречит оптимальности π.

Пусть условия теоремы являются необходимыми для оптимальности всех перестановок, содержащих менее $l \geq 2$ критических требований.

Рассмотрим случай с l критическими требованиями. Если условие теоремы не выполнено ни для одного критического требования, то для самого первого (левого) критического требования $\pi(k)$ существует такое $i < k$, что $d_{\pi(i)} > d_{\pi(k)}$, $p_{\pi(i)} > 0$ и $\pi(i) \notin B_G(\pi(j))$ при $d_{\pi(j)} \leq d_{\pi(k)}$, $j = 1,\ldots, k$. Действуя аналогично случаю с единственным критическим требованием, можно переместить требование $\pi(i)$ и его потомков, расположенных на позициях с номерами, меньшими k, на позиции справа от требования $\pi(k)$. В результате получим допустимую перестановку π', в которой требование $\pi(k)$ уже не является критическим, а общее число критических требований равно $l - 1$. Все эти требования будут расположены на тех же позициях, на которых они находились в перестановке π. Поскольку в перестановке π для них условия теоремы не выполнялись, то и в перестановке π' условия теоремы для них выполняться не будут, что противоречит индуктивному предположению.

Достаточность. Пусть для допустимой перестановки π выполняются условия теоремы. Из $L_{\pi(k)}(\pi) = L_{\max}(\pi)$ имеем $L_{\pi(k)}(\pi) = C_{\pi(k)}(\pi) - d_{\pi(k)} \geq L_{\pi(i)}(\pi) = C_{\pi(i)}(\pi) - d_{\pi(i)}$, $i > k$, следовательно, $d_{\pi(k)} \leq d_{\pi(i)}$, $i > k$, причем $d_{\pi(k)} = d_{\pi(i)}$ возможно только при $p_{\pi(i)} = 0$ и $p_{\pi(l)} = 0$ для всех $k<l \leq i$. Положим $D(\pi(k)) = \{\pi(l)|\ l > k, p_{\pi(l)} > 0\}$.

Рассмотрим оптимальную перестановку π', полученную в соответствии с алгоритмом 1.

Пусть k' – позиция, на которой в π' расположено требование $\pi(k)$. Из описания алгоритма 1 и допустимости перестановки π следует, во-первых, что все требования из множества $D(\pi(k))$ расположены в π' на позициях справа от k', и, во-вторых, что справа от k' нет таких требований $\pi(l)$, что $p_{\pi(l)} > 0$ и $d_{\pi(l)} < d_{\pi(k)}$ (исходя из описания алгоритма 1, последнее было бы возможно только в случае $\pi(l) \in A_G(\pi(k))$, но это противоречило бы допустимости перестановки π).

Если в π' справа от k' нет других требований с ненулевой длительностью обслуживания, то $C_{\pi(k)}(\pi') \geq C_{\pi(k)}(\pi)$ и $L_{\pi(k)}(\pi') \geq L_{\pi(k)}(\pi)$. Следовательно, π – оптимальная перестановка.

Предположим, что в π' справа от k' есть хотя бы одно требование $\pi(l)$, $l < k$, $p_{\pi(l)} > 0$ и $d_{\pi(l)} \geq$ $\geq d_{\pi(k)}$. Очевидно, $C_{\pi(l)}(\pi') \geq C_{\pi(k)}(\pi)$. Если $d_{\pi(l)} = d_{\pi(k)}$, то $L_{\pi(l)}(\pi') \geq L_{\pi(k)}(\pi)$. Предположим, что $d_{\pi(l)} > d_{\pi(k)}$. Тогда из условия теоремы следует существование такого $j < k$, что $\pi(l) \in B_G(\pi(j))$ и $d_{\pi(j)} \leq d_{\pi(k)}$. Из допустимости π' следует, что требование $\pi(j)$ расположено в π' справа от $\pi(l)$. Отсюда получаем $L_{\pi(j)}(\pi') \geq L_{\pi(k)}(\pi)$.

Итак, в любом случае $L_{\max}(\pi') \geq L_{\max}(\pi)$, т. е. π – оптимальная перестановка. ■

Полученные необходимые и достаточные условия оптимальности расписания для детерминированного варианта задачи используются далее для построения необходимых и достаточных условий глобальной оптимальности расписания для задачи в условиях неопределенности.

2. Задача в условиях неопределенности

В задаче $1|prec;\ d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$ в условиях неопределенности директивные сроки завершения обслуживания требований не заданы, известны лишь интервалы их возможных значений: $d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]$, и директивный срок d_j может принимать любое значение из указанного интервала.

Перестановка называется *глобально оптимальной* для задачи $1|prec;\ d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$, если при любых допустимых значениях неопределенных параметров d_j (т. е. при любых $d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]$, $j = 1,..., n$) эта перестановка является оптимальной для соответствующей детерминированной задачи.

Пусть дана перестановка $\pi = (\pi(1),..., \pi(n))$. Для $j = 1,..., n$ положим $L_j^{\min}(\pi) = C_j(\pi) - d_j^{\max}$, $L_j^{\max}(\pi) = C_j(\pi) - d_j^{\min}$. При любом выборе неопределенных параметров величина $L_j(\pi)$ для требования j принимает значения из интервала $[L_j^{\min}(\pi), L_j^{\max}(\pi)]$.

Для допустимой перестановки π введем множества A_1 и A_2 индексов требований:

$$A_1 = \{1 \le k \le n \mid L_{\pi(k)}^{\max}(\pi) > \max_{1\le j\le n} L_{\pi(j)}^{\min}(\pi)\}, \varnothing;$$

$$A_2 = \begin{cases} \{1 \le k \le n \mid L_{\pi(k)}^{\min}(\pi) = L_{\pi(k)}^{\max}(\pi) = \max\limits_{1\le j\le n} L_{\pi(j)}^{\min}(\pi) > \max\limits_{j\in A_1} L_{\pi(j)}^{\min}(\pi)\} \text{ при } A_1 \ne \varnothing; \\ \{1 \le k \le n \mid L_{\pi(k)}^{\min}(\pi) = L_{\pi(k)}^{\max}(\pi) = \max\limits_{1\le j\le n} L_{\pi(j)}^{\min}(\pi)\} \text{ при } A_1 = \varnothing. \end{cases}$$

Ниже схематично представлено взаимное расположение интервалов $[L_j^{\min}(\pi), L_j^{\max}(\pi)]$, определяющих состав множеств A_1 и A_2:

(а) L_j: [ ]
L_i: [ ]
L_l: |

(б) L_j: [ ]
L_i: [ ]
L_l: |
L_r: |

В случае (а) $A_1=\{j, i\}$, $A_2=\{l\}$, где l – детерминированное требование (т. е. $d_l^{\max} = d_l^{\min}$). В случае (б) $A_1=\varnothing$ и $A_2=\{l, r\}$, где l и r – детерминированные требования. Множество A_2, если оно не пусто, состоит только из детерминированных требований.

По аналогии с детерминированным случаем введем понятие требования, не имеющего локальных улучшений в перестановке.

Будем говорить, что требование $\pi(k)$ не имеет локальных улучшений в перестановке π, если для всех тех $i < k$, что $p_{\pi(i)} > 0$ и $\pi(i) \notin B_G(\pi(k))$, либо выполняется неравенство $d_{\pi(i)}^{\max} \le d_{\pi(k)}^{\min}$, либо существует такой индекс $j < k$, что $\pi(i) \in B_G(\pi(j))$ и $d_{\pi(j)}^{\max} \le d_{\pi(k)}^{\min}$.

Следующая теорема описывает необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности перестановки.

Теорема 2. *Допустимая для задачи* $1|prec; d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$ *перестановка* π *является глобально оптимальной тогда и только тогда, когда ни для одного индекса* $k \in A_1$ *требование* $\pi(k)$ *не имеет локальных улучшений в перестановке* π, *и если* $A_2 \ne \varnothing$, *то существует такой индекс* $l \in A_2$, *что требование* $\pi(l)$ *не имеет локальных улучшений в перестановке* π.

Доказательство. Необходимость. Пусть $|A_1| = a > 0$ и $A_1 = \{i_1,\dots, i_a\}$. Поскольку π является глобально оптимальной перестановкой, то при любом выборе $d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]$, $j = 1,\dots, n$, перестановка π должна оставаться оптимальной и для нее должны выполняться условия теоремы 1. В частности, условия теоремы 1 должны выполняться для $d_{\pi(i)} = d_{\pi(i)}^{\max}$, $i \ne i_1$, и $d_{\pi(i_1)} = d_{\pi(i_1)}^{\min}$. При таком выборе имеем $L_{\pi(i)} = L_{\pi(i)}^{\min}$, $i \ne i_1$, и $L_{\pi(i_1)} = L_{\pi(i_1)}^{\max}$. Поскольку $i_1 \in A_1$, то $L_{\pi(i_1)}^{\max} > L_{\pi(i)}^{\min}$, $i = 1,\dots, n$. Следовательно, $L_{\max} = L_{\pi(i_1)} > L_{\pi(i)}$, $i \ne i_1$, и по теореме 1 имеем $d_{\pi(i)}^{\max} \le d_{\pi(i_1)}^{\min}$ для всех тех $i < i_1$, что $p_{\pi(i)} > 0$, и $\pi(i) \notin B_G(\pi(j))$ для тех $\pi(j)$, что $d_{\pi(j)}^{\max} \le d_{\pi(i_1)}^{\min}$ и $j \le$ $\le i_1$. Повторив аналогичные рассуждения для $i_2,\dots, i_a$, получим требуемое.

Если при $A_1 \ne \varnothing$ выполняется $|A_2| = b > 0$ и $A_2 = \{j_1,\dots,j_b\}$, то положим $d_{\pi(j)} = d_{\pi(j)}^{\min}$ для всех $j \in A_2$ и $d_{\pi(i)} = d_{\pi(i)}^{\max}$ для всех $i \notin A_2$. Поскольку $A_1 \ne \varnothing$, при таком выборе имеем $L_{\max} = L_{\pi(j_1)} = \dots = L_{\pi(j_b)} > L_{\pi(i)}$ для всех $i \notin A_2$. По условию теоремы 1 должен существовать индекс $l \in A_2$, удовлетворяющий условию $d_{\pi(i)}^{\max} \le d_{\pi(l)}^{\min}$ для всех тех $i < l$, что $p_{\pi(i)} > 0$ и $\pi(i) \notin$ $\notin B_G(\pi(j))$ для тех $\pi(j)$, что $d_{\pi(j)}^{\max} \le d_{\pi(l)}^{\min}$ и $j \le l$.

Пусть $A_1 = \varnothing$. Из определения множеств A_1 и A_2 следует, что $A_2 = \{1 \le k \le n |$ $L_{\pi(k)}^{\min}(\pi) = L_{\pi(k)}^{\max}(\pi) = \max\limits_{1 \le j \le n} L_{\pi(j)}^{\min}(\pi)\}$. Соотношение $L_{\max} = L_{\pi(j_1)} = ... = L_{\pi(j_b)} > L_{\pi(i)}$ для всех $i \notin A_2$ обеспечивается условием $A_1 = \varnothing$, поскольку множество A_1 может содержать индексы только недетерминированных требований и $A_1 = \varnothing$ означает, что $L_{\pi(i)} < L_{\pi(j)}$ для всех $i \notin A_2$ и $j \in A_2$. Поэтому существование индекса l можно доказать так же, как это сделано в предыдущем абзаце. Необходимость доказана.

Достаточность. Из определения множеств A_1 и A_2 следует, что при любом выборе значений неопределенных параметров значение $L_{\max}(\pi)$ достигается, по крайней мере, на одном из элементов множества $A_1 \cup A_2$. Если для перестановки π выполняются условия теоремы и значение $L_{\max}(\pi)$ достигается на одном из элементов множества A_1, то для такого элемента $k \in A_1$ выполнены условия теоремы 1, т. е. π – оптимальная перестановка. Если значение $L_{\max}(\pi)$ достигается на одном из элементов множества A_2, то из определения A_2 следует, что $L_{\max}(\pi)$ достигается на каждом из элементов множества A_2. Из условия теоремы в этом случае следует существование индекса $l \in A_2$, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Итак, при любом выборе значений неопределенных параметров перестановка π удовлетворяет условиям теоремы 1. ■

В случае, когда множество $A_1 \cup A_2$ из условия теоремы 2 содержит ровно одно требование, теорема принимает следующий вид.

Следствие 1. *Допустимая перестановка* π *является глобально оптимальной для задачи* $1|prec; d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$, *если существует такой индекс* k, *что* $L_{\pi(k)}^{\min}(\pi) \ge L_{\pi(i)}^{\max}(\pi)$, $i \ne k$, *и требование* $\pi(k)$ *не имеет локальных улучшений в перестановке* π.

Следующий алгоритм строит перестановку, которая может удовлетворять условиям теоремы 2 или следствия 1.

Алгоритм 2

1. Полагаем $k = n$.
2. Находим множество T висячих вершин графа $G = (V, E)$.
3. Находим в T такую вершину u, что $d_u^{\min} = \max\{d_v^{\min} | v \in T\}$. Если имеется несколько вершин, удовлетворяющих этим условиям, то в качестве u выбираем среди них вершину с максимальным значением величины $d_v^{\max}$.
4. Полагаем $\pi(k) = u$, $k = k - 1$ и модифицируем граф G, полагая $V = V \setminus \{u\}$.
5. Если $k > 0$, переходим к выполнению шага 2. Если $k = 0$, построение перестановки π завершено.
6. Проверяем для перестановки π выполнение условий следствия 1. Если условия выполнены, то глобально оптимальная перестановка построена. В противном случае проверяем для π выполнение условий теоремы 2. Если условия выполнены, то глобально оптимальная перестановка построена, в противном случае глобально оптимальную перестановку построить не удалось.

Обоснованность попытки построить глобально оптимальную перестановку с помощью алгоритма 2 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Для задачи* $1|prec; d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$ *глобально оптимальная перестановка, удовлетворяющая условиям следствия 1, существует тогда и только тогда, когда перестановка, построенная в соответствии с алгоритмом 2, удовлетворяет условиям следствия 1.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Покажем, что из существования глобально оптимальной перестановки π, удовлетворяющей условиям следствия 1, следует, что перестановка π^0, построенная в соответствии с алгоритмом 2, также удовлетворяет условиям следствия 1. Индекс k из условия следствия 1 будем называть критическим. Если в π имеется несколько критических индексов, то в качестве k будем рассматривать наименьший из них.

Найдем в π такой индекс $r \le n$, что $\pi(r) \ne \pi^0(r)$ и $\pi(r+1) = \pi^0(r+1), \ldots, \pi(n) = \pi^0(n)$. Пусть $\pi^0(r) = \pi(l)$, $l < r$. Перейдем от перестановки π к допустимой перестановке π', перемещая требование $\pi(l)$ с позиции l на позицию r и сдвигая требования $\pi(l+1), \ldots, \pi(r)$ на одну позицию влево.

Рассмотрим три случая: $l > k$, $l = k$ и $l < k$.

Случай $l > k$. Из описания алгоритма 2 следует, что $d^{\min}_{\pi(l)} \ge d^{\min}_{\pi(j)}$ для всех $j \le r$. Тогда $L^{\max}_{\pi(l)}(\pi') = C_{\pi(r)}(\pi) - d^{\min}_{\pi(l)} \le L^{\max}_{\pi(r)}(\pi)$. Для всех $j \ne k$ имеем $L^{\max}_{\pi(j)}(\pi') \le L^{\max}_{\pi(j)}(\pi)$, а $L^{\min}_{\pi(k)}(\pi') = L^{\min}_{\pi(k)}(\pi)$. Следовательно, перестановка π' также удовлетворяет условиям следствия 1.

Случай $l = k$. Из условия $L^{\min}_{\pi(k)}(\pi) \ge L^{\max}_{\pi(i)}(\pi)$, $i \ne k$, следствия 1 имеем $d^{\max}_{\pi(k)} \le d^{\min}_{\pi(j)}$, $j = k+1,\ldots, n$. Из определения $\pi^0(r)$ следует $d^{\min}_{\pi^0(r)} = d^{\min}_{\pi(k)} \ge d^{\min}_{\pi(j)}$, $j = 1,\ldots, r$. Поэтому $d^{\min}_{\pi(k)} = d^{\max}_{\pi(k)} = d^{\min}_{\pi(j)}$, $j = k+1,\ldots, r$. Кроме того, из определения $\pi^0(r)$ и перестановки π' следует $L^{\min}_{\pi(k)}(\pi) \le L^{\min}_{\pi(k)}(\pi') \le L^{\max}_{\pi(k)}(\pi') \le L^{\max}_{\pi(r)}(\pi)$. Отсюда с учетом $L^{\min}_{\pi(k)}(\pi) \ge L^{\max}_{\pi(j)}(\pi)$, $j \ne k$, получаем $L^{\min}_{\pi(k)}(\pi) = L^{\min}_{\pi(k)}(\pi') = L^{\max}_{\pi(k)}(\pi') = L^{\max}_{\pi(r)}(\pi)$. Последнее возможно, только если $p_{\pi(k+1)} = \ldots = p_{\pi(r)} = 0$. Отсюда следует, что перестановка π' удовлетворяет условиям следствия 1.

Случай $l < k$. Пусть $p_{\pi(l)} > 0$. Из условий следствия 1 имеем $d^{\min}_{\pi(l)} \le d^{\max}_{\pi(l)} \le d^{\min}_{\pi(k)}$, а из определения требования $\pi^0(r) = \pi(l)$ следует $d^{\min}_{\pi(l)} \ge d^{\min}_{\pi(k)}$, т. е. $d^{\min}_{\pi(l)} = d^{\max}_{\pi(l)} = d^{\min}_{\pi(k)}$. Поскольку $d^{\min}_{\pi(l)} = d^{\min}_{\pi(k)}$, то из определения требования $\pi^0(r) = \pi(l)$ следует $d^{\max}_{\pi(l)} \ge d^{\max}_{\pi(k)}$, что влечет $d^{\min}_{\pi(l)} = d^{\max}_{\pi(k)}$. Итак, $L^{\max}_{\pi(l)}(\pi') \le L^{\max}_{\pi(r)}(\pi) \le L^{\min}_{\pi(k)}(\pi) = L^{\max}_{\pi(k)}(\pi)$, а $L^{\max}_{\pi(l)}(\pi') \ge C_{\pi(k)}(\pi) - d^{\min}_{\pi(l)} = L^{\max}_{\pi(k)}(\pi)$, т. е. $L^{\max}_{\pi(l)}(\pi') = L^{\min}_{\pi(l)}(\pi') = L^{\max}_{\pi(k)}(\pi) = L^{\min}_{\pi(k)}(\pi)$. Отсюда следует, что $p_{\pi(k+1)} = \ldots = p_{\pi(r)} = 0$ и перестановка π' удовлетворяет условиям следствия 1 (единственным критическим индексом в π' является r). При $p_{\pi(l)} = 0$ очевидно, что перестановка π' удовлетворяет условиям следствия 1.

Выше везде предполагается, что $k < r$. При $k \ge r$ очевидно, что перестановка π' удовлетворяет условиям следствия 1.

Таким образом, в любом из рассмотренных случаев перестановка π' удовлетворяет условиям следствия 1 и в π' число последних элементов, совпадающих с последними элементами перестановки π^0, по крайней мере, на единицу больше, чем в π. ■

Таким образом, алгоритм 2 обеспечивает построение глобально оптимальной перестановки, удовлетворяющей условиям следствия 1, если она существует. Если такая перестановка не существует, алгоритм 2 может тем не менее построить глобально оптимальную перестановку. В последнем случае она не будет удовлетворять условиям следствия 1, но будет удовлетворять условиям теоремы 2. Алгоритм 2 обладает еще одним важным свойством, отражающим связь полученных результатов с известным критерием Вальда [3].

Следствие 2. *Алгоритм 2 реализует принцип гарантированного результата* (*строит вариант, оптимальный относительно критерия Вальда*).

Справедливость последнего утверждения следует из того, что в алгоритме 2 (являющемся, как нетрудно заметить, модификацией алгоритма Лоулера) в качестве директивных сроков требований используются величины $d^{\min}_j$, т. е. минимум целевой функции отыскивается при наихудшем варианте развития событий в условиях неопределенности, когда в качестве значений директивных сроков берутся их наименьшие возможные значения.

Заключение

Для задачи $1|prec; d_j \in [d^{\min}_j, d^{\max}_j]|L_{\max}$ минимизации максимального временного смещения в условиях неопределенности директивных сроков найдены необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности расписания. Предложен алгоритм (алгоритм 2) построения глобально оптимального расписания и показано, что в частном случае, когда $|A_1 \cup A_2|=1$, глобально оптимальное расписание существует тогда и только тогда, когда оно может быть построено с помощью алгоритма 2. Если условие $|A_1 \cup A_2|=1$ не выполнено, то алгоритм может тем не менее найти глобально оптимальное расписание, но гарантии, что оно будет найдено, в этом случае отсутствуют. Показано также, что построенное в соответствии с алгоритмом 2 расписание удовлетворяет критерию Вальда, т. е. обеспечивает минимизацию целевой функции при наихудшем стечении обстоятельств (когда все директивные сроки принимают наименьшие возможные значения). Дальнейшее развитие исследований связано с разработкой алгоритма, который гарантировал бы построение глобально оптимального расписания независимо от выполнения условия $|A_1 \cup A_2|=1$.

Список литературы

1. Lawler, E.L. Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints / E.L. Lawler // Management Science. – 1973. – Vol. 19, № 5. – P. 544–546.

2. Lin, Y. Necessary and sufficient conditions of optimality for some classical scheduling problems / Y. Lin, X. Wang // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 176. – P. 809–818.

3. Wald, A. Statistical Decision Functions / A. Wald. – N. Y. : Wiley, 1950.

Поступила 01.08.12

[1]*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,*
Минск, Сурганова, 6
e-mail: shafr@newman.bas-net.by

[2]*Lund University, Sweden*
e-mail: dmitry.slednev@gmail.com

Y.M. Shafransky, D.S. Sledneu

MINIMIZING MAXIMUM LATENESS FOR A SINGLE MACHINE UNDER THE DUE DATES UNCERTAINTY

The single machine problem $1|\text{prec}; d_j \in [d_j^{\min}, d_j^{\max}]|L_{\max}$ of minimizing the maximum lateness under the precedence constraints and the uncertainty of the due dates is considered. Necessary and sufficient conditions of schedule optimality are formulated for the deterministic case of the problem. For the case of uncertain due dates, necessary and sufficient conditions of the global schedule optimality are developed. We also propose an algorithm for constructing a globally optimal schedule.