УДК 658.512.2

Г.М. Левин, Б.М. Розин

ОПТИМИЗАЦИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВ ОПЕРАЦИЙ

Предлагаются математическая модель и декомпозиционный метод оптимизации длительностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций. Метод основывается на сочетании идей параметрической декомпозиции и динамического программирования.

Введение

Значительное внимание в последние десятилетия в литературе уделялось различным аспектам планирования выполнения комплексов операций в организационных и производственных системах [1–5]. В данной работе рассматривается задача оптимизации длительностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций.

Заданы множество J элементарных операций (в дальнейшем э-операций) и комплекс **I** составных операций (в дальнейшем с-операций). С-операция i комплекса включает все э-операции соответствующего подмножества $J_i \subseteq J$, причем в состав с-операции i может входить m_{ij} идентичных э-операций $j \in J$. Комплекс содержит n различных с-операций (образованных различными подмножествами множества J) и может включать n_i идентичных с-операций $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, причем подмножества семейства $\{J_1, \ldots, J_i, \ldots, J_n\}$, образующие с-операции комплекса, могут пересекаться (рис. 1).

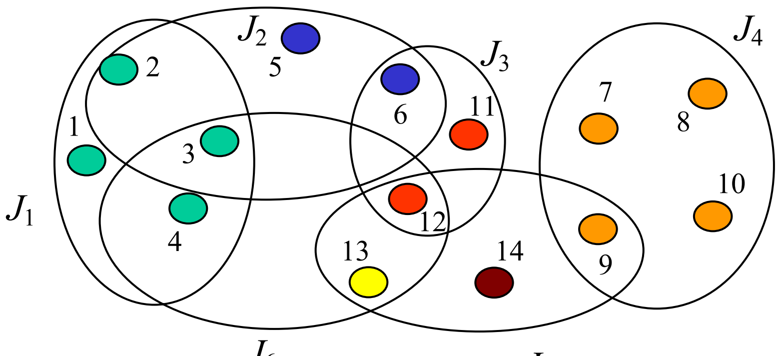

Рис. 1. Пример пересечения с-операций комплекса

Процесс выполнения комплекса **I** заключается в последовательном выполнении (однократном либо циклически повторяющемся) всех его с-операций. Все э-операции, входящие в состав очередной с-операции, выполняются одновременно, причем длительность с-операции равна наибольшей из длительностей входящих в нее э-операций. Для каждой э-операции $j \in J$ заданы диапазон $[t_{1j}, t_{2j}]$ возможных длительностей ее выполнения и определенная на этом отрезке убывающая функция $f_j(t)$ зависимости затрат на ее выполнение от принятой длительности t ее выполнения. Рассматривается случай, когда принятая длительность э-операции должна быть одинакова для всех с-операций, в которые эта э-операция входит. Стоимость выполнения каждой из с-операций в целом помимо суммарной стоимости выполнения составляющих ее э-операций включает также дополнительные затраты, пропорциональные длительности ее выполнения.

В данной работе ограничимся случаем, когда коэффициент пропорциональности $E > 0$ одинаков для всех с-операций комплекса и последовательность выполнения с-операций не влияет на длительность выполнения составляющих их э-операций.

Требуется найти значения длительностей $t_j \in [t_{1j}, t_{2j}]$ выполнения всех э-операций $j \in J$, минимизирующие суммарные затраты на выполнение всех с-операций комплекса.

Подобные задачи возникают, в частности, при проектировании групповых процессов многоинструментальной обработки деталей на многопозиционных производственных линиях конвейерного типа (рис. 2). В качестве примера рассмотрим процесс обработки на многопозиционном многоинструментальном оборудовании последовательности деталей, составленной из следующих друг за другом идентичных подпоследовательностей (групп), каждая из которых включает h деталей m различных наименований, $h \geq m$. В группе может быть несколько деталей одного наименования. Предполагается, что рабочие позиции линейно упорядочены и каждая деталь последовательно в этом порядке обрабатывается на каждой рабочей позиции соответствующим этой позиции и детали набором инструментов, причем в каждый момент времени на каждой позиции может обрабатываться лишь одна деталь. Один такт обработки состоит в одновременной обработке на каждой из рабочих позиций соответствующей (такту и позиции) детали, при этом все инструменты каждой позиции, выполняющие обработку соответствующей детали, также работают одновременно. После завершения любого такта обработки каждая обрабатываемая деталь со своей позиции синхронно перемещается на следующую позицию, деталь с последней позиции снимается, а на первую позицию устанавливается очередная деталь последовательности. Таким образом, цикл обработки группы деталей состоит из h тактов.

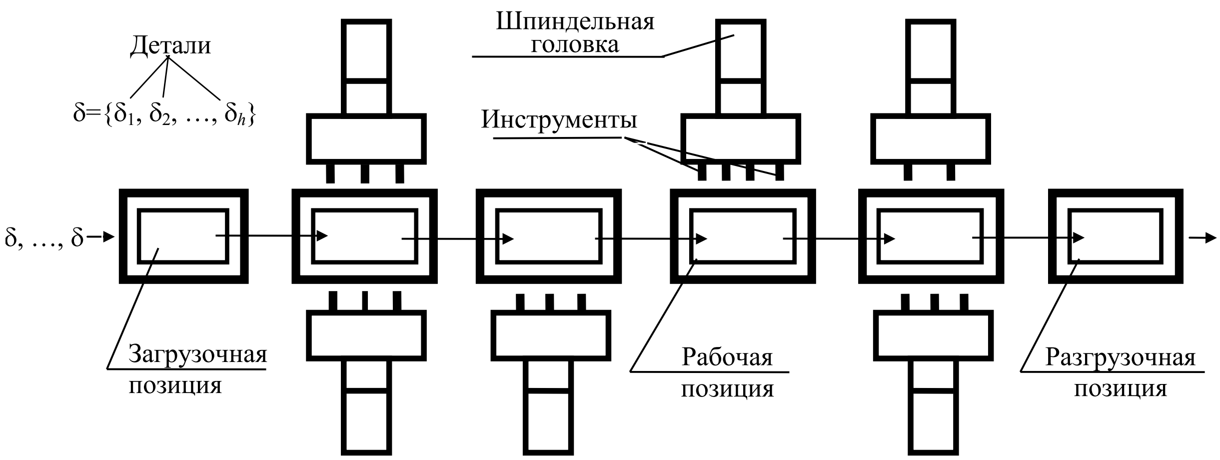

Рис. 2. Общий вид конвейерной линии для групповой обработки деталей

Инструменты каждой позиции сгруппированы в один или несколько блоков, каждый из которых расположен в отдельной шпиндельной головке со своим приводом подачи. Таким образом, все инструменты одного блока обрабатывают конкретную деталь на одной и той же минутной подаче. Затраты на обработку группы деталей складываются из затрат, пропорциональных суммарной продолжительности тактов, и доли затрат на смену инструментов, приходящейся на одну группу зависящих от режимов (длительностей) выполнения этими инструментами операций.

Множество элементарных операций, выполняемых инструментами для одного такта обработки, может пересекаться с множеством операций для другого такта вследствие наличия в группе повторяющихся деталей либо если детали различных наименований содержат одинаковые конструктивные элементы, обрабатываемые одним инструментом.

Требуется определить такие режимы (длительности) обработки, которые удовлетворяют заданным ограничениям и минимизируют затраты на обработку группы деталей.

1. Математическая постановка задачи и ее параметризация

Задача А. Для заданного комплекса **I** с-операций требуется найти такой вектор $t = (t_j | j \in J) \in \mathbf{t} = \prod_{j\in J}[t_{1j}, t_{2j}]$, которому соответствует наименьшее значение функции общих затрат

$$F(t) = \sum_{i\in I} n_i (E \max_{j\in J_i} t_j + \sum_{j\in J_i} m_{ij} f_j(t_j)) = E\sum_{i\in I} n_i \max_{j\in J_i} t_j + \sum_{j\in J} p_j f_j(t_j), \quad (1)$$

где $p_j = \sum_{i\in I_j} n_i m_{ij}$ и $I_j = \{I \in I | j \in J_i\}$.

Замечание. В рамках данной задачи без ограничения общности можно считать, что комплекс **I** с-операций не может быть разбит на несколько подмножеств таким образом, чтобы элементы из разных подмножеств не пересекались. В противном случае исходная задача разбивается на соответствующее число аналогичных независимых задач относительно каждого из таких подмножеств.

Введем вектор $T = (T_1, \ldots, T_i, \ldots, T_n)$, компонента T_i которого определяет длительность выполнения с-операции $i \in I$. Таким образом, $T_i \in \mathbf{T}_i = [\max_{j\in J_i} t_{1j}, \max_{j\in J_i} t_{2j}]$. Тогда наряду с задачей А можно рассматривать следующую параметризованную задачу В:

$$\Phi(T, t) = E\sum_{i\in I} n_i T_i + \sum_{j\in J} p_j f_j(t_j) \to \min_{T,t}; \quad (2)$$

$$t_j \in [t_{1j}, t_{2j}], \quad j \in J; \quad (3)$$

$$t_j \le T_i, \quad j \in J, \quad i \in I_j. \quad (4)$$

Задачи А и В эквивалентны в том смысле, что если t' – решение задачи А, то $(T(t'), t')$ – решение задачи В, где $T(t') = (T_1(t'), \ldots, T_n(t'))$ и $T_i(t') = \max_{j\in J_i} t'_j$. В свою очередь, если (T^*, t^*) – решение задачи В, то t^* – решение задачи А.

2. Решение задачи В

Как показано ниже, решение задачи В может быть сведено к отысканию кратчайшего пути из начальной вершины некоторого бесконтурного орграфа в одну из его конечных вершин. Каждой вершине орграфа сопоставлены некоторый набор с-операций комплекса, образующее их подмножество э-операций и принимаемая максимальная длительность этих операций, а дуге – затраты на выполнение подмножества операций (с-операций и э-операций), дополняющих множество операций начальной вершины дуги до множества операций концевой вершины дуги. При этом длительность э-операций дополняющего подмножества является максимально возможной, но не превышает длительности, сопоставленной концевой вершине дуги, а длительность на концевой вершине дуги не меньше длительности на ее начальной вершине. Начальной вершине орграфа сопоставлены пустые множества операций и нулевая длительность, а каждой из концевых вершин орграфа – множества операций комплекса в целом.

Для реализации такого подхода введем в рассмотрение ряд вспомогательных функций и задач, полагая $\Omega \subset J$:

– $t_j(\tau) = \min\{t_{2j}, \tau\}$, $\tau \ge t_{1j}$;

– $t_j(T) = \min\{t_{2j}, \min_{i\in I_j} T_i\}$;

– $\Psi(T) = E\sum_{i\in I} n_i T_i + \sum_{j\in J} p_j f_j(t_j(T))$, $T \in \prod_{i\in I} \mathbf{T}_i$;

– задачу С минимизации функции $\Psi(T)$ на множестве $\prod_{i\in I}\mathbf{T}_i$;

– $\mathbf{I}(\Omega) = \{J_i\backslash\Omega \mid J_i\backslash\Omega \neq \varnothing,\ i \in I\}$;

– семейство $\mathbf{I}^{+}(\Omega)$ минимальных по включению элементов из $\mathbf{I}(\Omega)$, т.е. $\Omega' \not\subset \Omega''$ для любой пары (Ω', Ω'') множеств из $\mathbf{I}^{+}(\Omega)$;

– $s_2(\Omega) = \sum_{i\in\bigcup_{j\in\Omega} I_j} n_i$;

– $I(\Omega_1,\Omega_2)=\{i\in I \mid \Omega_2 = J_i\backslash\Omega_1\}$ и $s_1(\Omega_1,\Omega_2)=\sum_{i\in I(\Omega_1,\Omega_2)} n_i$, где $\Omega_k \subseteq J$, $k = 1, 2$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$;

– $\Delta_1(\Omega) = \max_{j\in\Omega} t_{1j}$, $\Delta_2(\Omega) = \max_{j\in\Omega} t_{2j}$ и $\Delta(\Omega) = [\Delta_1(\Omega), \Delta_2(\Omega)]$;

– $\varphi(\Omega, r, \tau) = Er\tau + \sum_{j\in\Omega} p_j f_j(t_j(\tau))$, где $\tau \geq \Delta_1(\Omega)$, r – положительное целое;

– значение $\tau(\Omega, r, \tau')$ параметра $\tau \in [\max\{\tau', \Delta_1(\Omega)\}, \max\{\tau', \Delta_2(\Omega)\}]$, которому соответствует наименьшее значение функции $\varphi(\Omega, r, \tau)$, где $\tau' > 0$;

– задачу $C(\Omega)$, аналогичную задаче С, порождаемую семейством $\mathbf{I}(\Omega)$ подмножеств множества $J \setminus \Omega$ э-операций при тех же значениях n_i и m_{ij} для $J_i \setminus \Omega \neq \varnothing$ и $j \in J_i \setminus \Omega$.

Отметим некоторые свойства функции $\varphi(\Omega, r, \tau)$:

а) если функции $f_j(t_j)$ выпуклы на $[t_{1j}, t_{2j}]$ для всех $j \in J$, то функция $\varphi(\Omega, r, \tau)$ является выпуклой на множестве $\tau \geq \Delta_1(\Omega)$ для любых $\Omega \subseteq J$ и r;

б) если $0 < r_1 < r_2$, то $\varphi(\Omega, r_1, \tau)<\varphi(\Omega, r_2, \tau)$, что очевидно, и $\tau(\Omega, r_1, \tau') \geq \tau(\Omega, r_2, \tau')$ для всех $\tau \geq \geq \Delta_1(\Omega)$, $\tau' \geq 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $T^*_1 = \min\{T^*_i \mid i \in I\}$ и не существует такого $i \in I$, что $J_1 \subset J_i$. Введенные определения позволяют выявить следующие свойства решения задачи В:

1. Очевидно, что $T^*_i = \max_{j\in J_i} t^*_j$ и $t^*_j = \min\{t_{2j}, \min_{i\in I_j} T^*_i\}$, поэтому $T^*_i = \max_{j\in J_i} t^*_j$ и $T^*_{i'} \leq T^*_{i''}$ для любых $i', i'' \in I$, таких, что $J_{i'} \subset J_{i''}$.

2. Вектор T^* является решением задачи С.

3. $t^*_j = \min\{t_{2j}, T^*_1\}$ для всех $j \in J_1$.

4. Значение $T^*_1 \in [\Delta_1(J_1),\ \tau(J_1, s_2(J_1), \Delta_1(J_1))]$.

5. Вектор $(T^*_2, \ldots, T^*_n)$ является решением задачи $C(J_1)$.

Введем в рассмотрение множество $\mathbf{\Pi}$ последовательностей $\pi = ((\Omega_1(\pi), \tau_1(\pi)), \ldots, (\Omega_v(\pi), \tau_v(\pi)), \ldots, (\Omega_{h_\pi}(\pi), \tau_{h_\pi}(\pi)))$, соответствующих путям бесконтурного орграфа из начальной вершины в одну из концевых, где $\Omega_v(\pi)$ – некоторое подмножество э-операций и $\tau_v(\pi)$ – их максимальная длительность, удовлетворяющие следующим условиям:

– $\Omega_v(\pi) \in \mathbf{I}^{+}(Z_{v-1}(\pi))$, где $Z_v(\pi) = Z_{v-1}(\pi) \cup \Omega_v(\pi)$ и $Z_0(\pi) = \varnothing$;

– $\tau_v(\pi) \in [\max\{\Delta_1(\Omega_v(\pi)), \tau_{v-1}(\pi)\}, \tau(\Omega_v(\pi), s_1(Z_{v-1}(\pi), \Omega_v(\pi)), \tau_{v-1}(\pi))]$, где $\tau_0(\pi) = 0$;

– $Z_{h_\pi}(\pi) = J$.

Очевидно, что $h_\pi \leq n$ и $\bigcup_{v=1}^{h_\pi} I(Z_{v-1}(\pi),\Omega_v(\pi)) = I$ для всех $\pi \in \mathbf{\Pi}$.

Пусть $Z \subseteq J$ и $\Theta(Z)$ – множество таких с-операций $i \in I$, что $J_i \subseteq Z$. Тогда $\mathbf{\Pi}$ – это множество таких последовательностей пар $(\Omega_v(\pi), \tau_v(\pi))$, что $\Omega_v(\pi)$ – минимальное (по включению) подмножество э-операций из $J \setminus Z_{v-1}(\pi)$, для которого выполняется $\Theta(Z_{v-1}(\pi)) \subset \Theta(Z_{v-1}(\pi) \cup \Omega_v(\pi))$, и $\tau_v(\pi) \geq \tau_{v-1}(\pi)$.

Для представленного на рис. 1 комплекса операций одна из возможных последовательностей $\Omega_1(\pi), \ldots, \Omega_v(\pi), \ldots, J$ подмножеств э-операций для построения $\pi \in \mathbf{\Pi}$ может быть следующей: $\Omega_1(\pi) =\{1, 2, 3, 4\}$, $\Omega_2(\pi) =\{5,6\}$, $\Omega_3(\pi) =\{7, 8, 9, 10\}$, $\Omega_4(\pi) =\{11, 12\}$, $\Omega_5(\pi) =\{13\}$, $\Omega_6(\pi) =\{14\}$.

При этом $Z_1(\pi) = J_1$, $Z_2(\pi) = J_1 \cup J_2$, $Z_3(\pi) = J_1 \cup J_2 \cup J_4$, $Z_4(\pi) = J_1 \cup J_2 \cup J_4 \cup J_3$, $Z_5(\pi)=J_1 \cup J_2 \cup J_4 \cup J_3 \cup J_6$, $Z_6(\pi) = J_1 \cup J_2 \cup J_4 \cup J_3 \cup J_6 \cup J_5 = J$. Отметим, в частности, что для $Z_2(\pi)$ множество $\mathbf{I}(Z_2(\pi)) = \{\{11, 12\}, \{12, 13\}, \{7, 8, 9, 10\}, \{9, 12, 13, 14\}\}$ и $\mathbf{I}^+(Z_2(\pi))=\{\{11, 12\}, \{12, 13\}, \{7, 8, 9, 10\}\}$, а для $Z_4(\pi)$ множество $\mathbf{I}(Z_4(\pi))=\{\{13\}, \{13, 14\}\}$ и $\mathbf{I}^+(Z_4(\pi))=\{13\}$.

Положим $G(\pi) = \sum_{v=1}^{h_\pi} \varphi(\Omega_v(\pi), s_1(Z_{v-1}(\pi), \Omega_v(\pi)), \tau_v(\pi))$ для $\pi \in \mathbf{\Pi}$. Тогда

6. Существует такое $\mathbf{\Pi}^* \subseteq \mathbf{\Pi}$, что $G(\pi) = \Psi(T^*)$ для всех $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$.

7. Для всех $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$ значение $\tau_v(\pi) = T^*_i$ для всех $i \in I(Z_{v-1}(\pi), \Omega_v(\pi))$ и существует такое $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$, что $\Omega_1(\pi) = J_1$.

Таким образом, решение задачи B может быть сведено к решению задачи C, а последнее – к построению последовательности $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$.

3. Построение последовательности $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$

Для описания возможного подхода к построению некоторой $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$ введем следующие обозначения:

$\mathbf{Z}_0 = \{Z_v(\pi) | \pi \in \mathbf{\Pi}, v = 0, \dots, h_\pi\}$ и $\mathfrak{R} = \{\mathcal{R}_v(\pi) = (Z_v(\pi), \tau_v(\pi)) | \pi \in \mathbf{\Pi}, v = 0, \dots, h_\pi\}$;

$\mathbf{I}^-(\Omega)$ – семейство таких подмножеств Ω' множества Ω, что $\Omega \setminus \Omega' \in \mathbf{Z}_0$ и $\Omega' \in \mathbf{I}^+(\Omega \setminus \Omega')$;

$H(Z, \tau) = \min\{\sum_{p=1}^{v} \varphi(\Omega_p(\pi), s_1(Z_{p-1}(\pi), \Omega_p(\pi)), \tau_p(\pi)) | \pi \in \mathbf{\Pi}, v \in \{1, \dots, h_\pi\}, \mathfrak{R}_v(\pi) = (Z, \tau)\}$, $(Z, \tau) \in \mathfrak{R}$.

Можно показать справедливость рекуррентных соотношений

$$\min\{G(\pi) | \pi \in \mathbf{\Pi}\} = \min\{H(J, \tau) | (J, \tau) \in \mathfrak{R}\}; \tag{5}$$

$$H(Z, \tau) = \min\{H(Z \setminus \Omega, \tau') + \varphi(\Omega, s_1(Z \setminus \Omega, \Omega), \tau) | \Omega \in \mathbf{I}^-(Z), \tau' \le \tau, (Z \setminus \Omega, \tau') \in \mathfrak{R}\}, (Z, \tau) \in \mathfrak{R}, \tag{6}$$

где $H(\varnothing, 0) = 0$.

Соотношения (5), (6) позволяют использовать для построения $\pi \in \mathbf{\Pi}^*$ традиционные вычислительные схемы динамического программирования, сводящие эту задачу к нахождению кратчайшего пути в орграфе $(\mathfrak{R}, \mathbf{D})$ из вершины $(\varnothing,0) \in \mathfrak{R}$ в одну из вершин вида $(J, \tau) \in \mathfrak{R}$. В этом графе пара $((Z_1, \tau_1), (Z_2, \tau_2)) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ принадлежит множеству дуг $\mathbf{D}$ тогда и только тогда, когда $Z_1 \subset Z_2$, $Z_2 \setminus Z_1 \in \mathbf{I}^+(Z_1)$ и $\tau_1 \le \tau_2$; длина дуги $((Z_1, \tau_1),(Z_2, \tau_2)) \in \mathbf{D}$ равна $\varphi(Z_2 \setminus Z_1, s_1(Z_1, Z_2 \setminus Z_1), \tau_2)$.

Заключение

В статье разработаны математическая модель и метод решения задачи оптимизации длительностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций. Метод основан на сочетании идей параметрической декомпозиции и динамического программирования. Полученные результаты могут быть использованы, в частности, при проектировании и управлении функционированием многопозиционных производственных систем различного типа.

Работа была выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12ФП-001).

Список литературы

1. Boysen, N. A classification of assembly line balancing problems / N. Boysen, M. Fliedner, A. Scholl // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 183. – P. 674–693.

2. Bukchin, J. Design of flexible assembly line to minimize equipment cost / J. Bukchin, M.Tzur // IIE Transactions. – 2000. – Vol. 32. – P. 585–598.

3. Gupta, A.K. Optimization of due-date objectives in scheduling semiconductor batch manufacturing / A.K. Gupta, A.I. Sivakumar // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2006. – Vol. 46. – P. 1671–1679.

4. Задачи распределения ресурсов в управлении проектами / П.С. Баркалов [и др.] – М. : ИПУ РАН, 2002. – 65 с.

5. Burkov,V.N. Models and methods of multiprojects' management / V.N. Burkov, D.A. Novikov // Systems Science. – 1999. – Vol. 256, № 2. – P. 5–14.

Поступила 19.06.2012

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: {levin; rozin}@newman.bas-net.by

G.M. Levin, B.M. Rozin

OPTIMIZATION OF DURATIONS OF SEQUENTIAL-PARALLEL EXECUTION OF INTERSECTING OPERATION SETS

Mathematical model and method for the problem of optimization of durations of sequential-parallel execution of intersecting operation sets are proposed. The proposed method is based on the combination of approaches of parametric decomposition and dynamic programming.