ИНФОРМАТИКА

2012 октябрь-декабрь № 4

УДК 681.32

Н.Г. Егорова, Ю.Н. Сотсков, А.А. Косенков

ПЕРЕСТАНОВКА С НАИБОЛЬШИМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОМ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ОПЕРАЦИЙ

Рассматривается задача минимизации суммы взвешенных моментов завершения обслуживания требований одним прибором при условии, что для каждой длительности обслуживания требования заданы нижняя и верхняя границы возможных значений. Разрабатывается алгоритм сложности $O(n\log n)$ *для построения перестановки с наибольшей размерностью и наибольшим объемом параллелепипеда устойчивости.*

Введение

Рассматривается задача построения оптимального расписания обслуживания требований множества $J=\{J_1,J_2,...,J_n\}$ одним прибором с критерием $\sum w_iC_i$ минимизации суммы взвешенных моментов C_i завершения обслуживания требований $J_i\in J$ при условии, что на момент построения расписания известны только нижняя граница $a_i>0$ и верхняя граница $b_i\ge a_i$ возможных длительностей p_i обслуживания требований $J_i\in J$. Сформулированная задача является неопределенной и обозначается $1|a_i\le p_i\le b_i|\sum w_iC_i$ в соответствии с трехпозиционной формой $\alpha|\beta|\gamma$ классификации задач теории расписаний [1].

Задача $1|a_i\le p_i\le b_i|\sum w_iC_i$ возникает, например, при планировании рабочего времени на некоторый период времени при условии, что множество планируемых к выполнению работ заранее определено и существенно не меняется в ходе реализации расписания. Для длительностей планируемых работ на момент построения расписания известны только диапазоны (отрезки) их возможных действительных значений. Критерий $\sum w_iC_i$ можно рассматривать как суммарный показатель эффективности выполнения работником заданного множества работ [2].

1. Постановка задачи

В обслуживающую систему, состоящую из одного прибора, в момент времени $t=0$ поступает множество требований $J=\{J_1,J_2,...,J_n\}$. Каждое требование $J_i\in J$ должно быть обслужено прибором без прерываний в течение времени $p_i\in[a_i,b_i]$. Здесь и далее p_i обозначает случайную величину, которая в процессе реализации расписания может оказаться равной любому действительному числу, принадлежащему заданному отрезку $[a_i,b_i]$. Закон распределения случайной величины p_i на интервале (a_i,b_i) к моменту построения расписания неизвестен. Каждому требованию $J_i\in J$ приписан вес $w_i>0$, определяющий относительную значимость этого требования. В задаче $1|a_i\le p_i\le b_i|\sum w_iC_i$ требуется построить расписание (перестановку) обслуживания требований множества J, при котором взвешенная сумма $\sum_{i=1}^{n} w_iC_i$ моментов завершения обслуживания требований принимает наименьшее значение.

Если верхняя граница $a_i>0$ и нижняя граница b_i длительностей обслуживания каждого требования совпадают, т. е. $b_i=a_i$, то неопределенная задача $1|a_i\le p_i\le b_i|\sum w_iC_i$ превращается в детерминированную задачу $1||\sum w_iC_i$, для решения которой существует полиномиальный алгоритм сложности $O(n\log n)$ [3]. Множество допустимых векторов длительностей обслуживания требований $p=\{p_1,p_2,...,p_n\}$ обозначим

$$T = \{p \in \mathrm{R}_+^n : a_i \le p_i \le b_i, i \in \{1,...,n\}\},$$

где R_+^n – множество всех неотрицательных действительных векторов размерности n.

Вектор $p \in T$ возможных длительностей обслуживания требований будем называть сценарием. Для неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ может не существовать единственной перестановки, которая является оптимальной для всех детерминированных задач $1||\sum w_i C_i$, получаемых из неопределенной задачи в результате фиксации того или иного сценария из множества T. Пусть S – множество всех $n!$ перестановок $\pi_i = (J_{i_1}, J_{i_2},..., J_{i_n})$ требований множества J: $S = \{\pi_1, \pi_2,..., \pi_{n!}\}$. Под решением неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ будем подразумевать минимальное (по включению) множество перестановок $S(T) \subseteq S$ согласно следующему определению [4].

О п р е д е л е н и е 1. Решением неопределенной задачи $1|a_i \le p_i \le b_i|\sum w_i C_i$ будем называть минимальное по включению множество перестановок $S(T) \subseteq S$, такое, что для любого допустимого сценария $p \in T$ существует перестановка $\pi_j \in S(T)$, которая является оптимальной для детерминированной задачи $1||\sum w_i C_i$ со сценарием p.

2. Перестановки с наибольшим параллелепипедом устойчивости

Для практической реализации из множества $S(T)$ предлагается выбирать перестановку $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2},..., J_{k_n}) \in S(T)$ с максимальной размерностью и максимальным объемом параллелепипеда устойчивости. Для определения параллелепипеда устойчивости оптимальной перестановки требований множества $J = \{J_1, J_2,..., J_n\}$ введем следующие обозначения.

Через $1|p|\sum w_i C_i$ обозначим детерминированную задачу со сценарием $p \in T$. Пусть $J^-[k_i] = \{J_{k_1},..., J_{k_{i-1}}\}$ и $J^+[k_i] = \{J_{k_{i+1}},..., J_{k_n}\}$. Множество S_{k_i} – это множество перестановок $(\pi(J^-[k_i]), J_{k_i}, \pi(J^+[k_i])) \in S$ требований множества *J*. Перестановка $\pi(J')$ – это перестановка требований подмножества J' множества J. По аналогии с определением из работы [5] дадим следующее определение параллелепипеда устойчивости оптимальной перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2},..., J_{k_n}) \in S$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2},..., J_{k_n}) \in S$ – перестановка, оптимальная хотя бы при одном сценарии из множества T. Максимальный отрезок $[l_{k_i}, u_{k_i}] \subseteq [a_{k_i}, b_{k_i}]$ будем называть *максимальной вариацией* длительности требования J_{k_i} в перестановке π_k, если для любой перестановки $\pi_e \in S_{k_i}$ и любого сценария $p = (p_1,..., p_n) \in T$, при котором она оптимальна, перестановка π_e остается оптимальной и для любого сценария

$$p' \in \{\times_{j=1}^{k_i-1}[p_j, p_j] \times [l_{k_i}, u_{k_i}] \times_{j=k_i+1}^{n}[p_j, p_j]\} \subseteq T,$$

причем для любого сценария $p'' = (p''_1,..., p''_n) \in T$, $p''_{k_i} \in [l_{k_i}, u_{k_i}]$, существует оптимальная для задачи $1|p''|\sum w_i C_i$ перестановка $\pi_v \in S_{k_i}$. Пусть N_k – множество индексов i всех требований $J_i \in J$ с непустыми максимальными вариациями их длительностей. Декартово произведение $SB(\pi_k, T) = \times_{k_i \in N_k}[l_{k_i}, u_{k_i}] \subseteq T$ будем называть многогранником (параллелепипедом) устойчивости перестановки π_k. Если не существует сценария $p \in T$, при котором перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum w_i C_i$, то полагаем $SB(\pi_k, T) = \varnothing$.

Для нахождения параллелепипеда $SB(\pi_k, T)$ для фиксированной перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2},..., J_{k_n})$ достаточно вычислить максимальную вариацию каждой длительности p_{k_i},

$i \in \{1, 2, ..., n\}$. Нижнюю границу $d^-_{k_i}$ и соответственно верхнюю границу $d^+_{k_i}$ максимальной вариации отношения веса к длительности можно вычислить следующим образом:

$$d^-_{k_i} = \max\left\{\frac{w_{k_i}}{b_{k_i}}, \max_{i<j\le n}\left\{\frac{w_{k_j}}{a_{k_j}}\right\}\right\}; \qquad (1)$$

$$d^+_{k_i} = \min\left\{\frac{w_{k_i}}{a_{k_i}}, \min_{1\le j<i}\left\{\frac{w_{k_j}}{b_{k_j}}\right\}\right\}. \qquad (2)$$

Поясним понятие параллелепипеда устойчивости на следующем примере неопределенной задачи с четырьмя требованиями $J = \{J_1, J_2, J_3, J_4\}$, $n = 4$. Пусть исходные данные задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ определены в столбцах 1–4 приведенной ниже таблицы. Значения $d^-_{k_i}$ и $d^+_{k_i}$, вычисленные для перестановки $\pi_k = (J_1, J_2, J_3, J_4)$, даны в столбцах 5 и 6, а диапазоны максимальных вариаций длительностей, при которых сохраняется оптимальность перестановки π_k, – в столбцах 7 и 8.

Исходные данные для примера задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$

i	a_i	b_i	w_i	d_i^-	d_i^+	w_i / d_i^+	w_i / d_i^-
1	4	5	400	90	100	4	$4\frac{4}{9}$
2	6	9	540	60	80	$6\frac{3}{4}$	9
3	4	10	200	40	50	4	5
4	3	4	120	30	20	-	-

Максимальные вариации отношений весов к длительностям требований, при которых сохраняется оптимальность перестановки π_k, на рис. 1 заштрихованы.

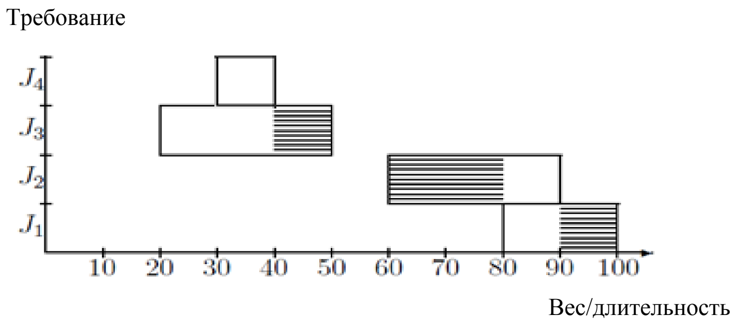

Рис. 1. Максимальные вариации отношений весов к длительностям обслуживания требований

Параллелепипед устойчивости перестановки $\pi_k = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ изображен на рис. 2.

Размерность $| N_k |$ параллелепипеда устойчивости $SB(\pi_k, T)$ равна количеству требований J_{k_i}, для которых выполняется нестрогое неравенство $d^-_{k_i} \le d^+_{k_i}$. Обозначим через n^k число требований, для которых выполняются соотношения $d^-_{k_i} = d^+_{k_i}$ и $a_{k_i} < b_{k_i}$. Относительный объем $VolSB(\pi_t, T)$ многогранника устойчивости будет вычисляться как произведение величин

$(u_{k_i} - l_{k_i})/(b_{k_i} - a_{k_i})$ для всех требований J_{k_i} с отрезками $[l_{k_i}, u_{k_i}]$ максимальных вариаций длительностей, для которых выполняется строгое неравенство $l_{k_i} < u_{k_i}$.

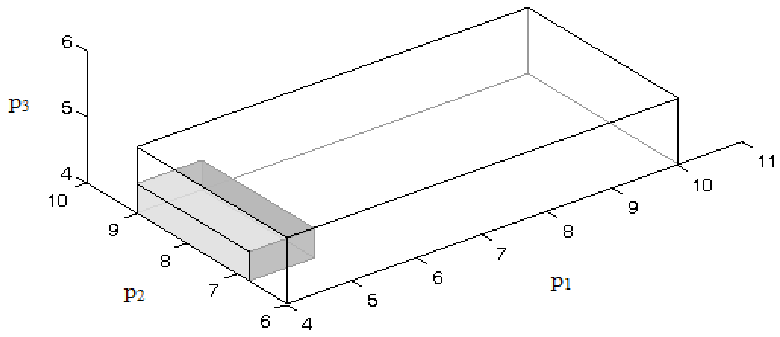

Рис. 2. Многогранник T, в котором выделен параллелепипед устойчивости перестановки $\pi_k = (J_1, J_2, J_3, J_4)$

Наибольший интерес для практического использования представляют перестановки $\pi_k \in S$, имеющие наибольшую размерность $|N_k|$ параллелепипеда устойчивости $SB(\pi_k, T)$. Если таких перестановок несколько, то следует выбирать перестановки с наибольшим относительным объемом многогранника устойчивости $SB(\pi_t, T)$ среди всех перестановок $\pi_k \in S$ с наибольшими размерностями многогранников устойчивости $|N_k| = |N_t|$ и минимальным количеством n^k максимальных вариаций с нулевой длиной, т. е. перестановку (перестановки) с наибольшим относительным объемом соответствующего многогранника размерности $|N_t| - n^k$. (Относительный объем $VolSB(\pi_t, T)$ вычисляется как произведение величин $(u_{k_i} - l_{k_i})/(b_{k_i} - a_{k_i})$ для всех требований J_{k_i} с отрезками $[l_{k_i}, u_{k_i}]$ максимальных вариаций длительностей, для которых выполняется строгое неравенство $l_{k_i} < u_{k_i}$.) Множество всех таких перестановок $\pi_t \in S$ обозначим $S^{\max}$.

Для построения перестановки $\pi_t \in S^{\max}$ разработан полиномиальный алгоритм. Рассмотрим свойства многогранника устойчивости, которые позволили разработать алгоритм минимальной асимптотической сложности $O(n \log n)$.

Свойство 1. *Для любых требований $J_i \in J$ и $J_v \in J$, $v \neq i$, в перестановке π_k выполняется равенство*

$$\left(\frac{w_i}{u_i}, \frac{w_i}{l_i}\right) \cap \left[\frac{w_v}{b_v}, \frac{w_v}{a_v}\right] = \varnothing .$$

Свойство 1 следует непосредственно из формул (1) и (2).

Используя свойство 1, покажем, как можно определить порядок требования $J_i \in J$ относительно требования $J_v \in J$ для любого $v \neq i$ в перестановке $\pi_t = \{J_{t_1}, \ldots, J_{t_n}\}$. Рассмотрим все три возможных случая пересечения открытого интервала $\left(\frac{w_i}{b_i}, \frac{w_i}{a_i}\right)$ с отрезком $\left[\frac{w_v}{b_v}, \frac{w_v}{a_v}\right]$:

$$\text{(I)}\ \frac{w_v}{b_v} < \frac{w_i}{b_i}, \quad \frac{w_v}{a_v} < \frac{w_i}{a_i}; \tag{3}$$

$$\text{(II)}\ \frac{w_v}{b_v} = \frac{w_i}{b_i}, \quad \frac{w_v}{a_v} = \frac{w_i}{a_i}; \tag{4}$$

$$\text{(III)}\ \frac{w_v}{b_v} \ge \frac{w_i}{b_i}, \quad \frac{w_v}{a_v} \le \frac{w_i}{a_i}. \tag{5}$$

Предполагается, что хотя бы одно из неравенств (5) является строгим.

В случае (III) множество требований J_v, для которых выполняются неравенства (5) относительно требования J_i, будем обозначать $J(i)$.

Свойство 2. *Для случая (I) существует перестановка $\pi_t \in S^{\max}$, в которой требование J_i предшествует требованию J_v.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае (I) искомый порядок требований J_v и J_i в перестановке $\pi_t \in S^{\max}$ может быть определен строгим неравенством из (3): требование J_i предшествует требованию J_v в перестановке π_t. Действительно, если требование J_v предшествует требованию J_i, то обе максимальные вариации $[l_i, u_i]$ и $[l_v, u_v]$ длительностей обслуживания требований p_i и p_v в перестановке $\pi_k \in S$ пусты (это следует из равенств (1) и (2)).

Свойство 3. *Для случая (II) существует перестановка $\pi_t \in S^{\max}$, в которой требования J_i и J_v расположены рядом (одно непосредственно за другим): $i = t_r$, $v = t_{r+1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если требования J_i и J_v расположены рядом, то *максимальная вариация* $[l_u, u_u]$ длительностей обслуживания требования p_u для любого требования $J_u \in J \setminus \{J_i, J_v\}$ в перестановке π_k не меньше, чем в случае, когда некоторое требование $J_w \in J \setminus \{J_i, J_v\}$ расположено между требованиями J_i и J_v.

Если выполняются равенства (4), то можно ограничить поиск перестановки $\pi_t \in S^{\max}$ подмножеством перестановок множества *S* с расположенными рядом требованиями J_i и J_v (свойство 3). Кроме того, порядок таких требований $\{J_i, J_v\}$ не влияет на объем многогранника устойчивости и на его размер.

Замечание. Согласно свойству 3 при поиске перестановки $\pi_t \in S^{\max}$ пару требований $\{J_i, J_v\}$, для которых выполняется (4), можно рассматривать как одно требование.

Оценим количество *максимальных вариаций* $[l_i, u_i]$ длительностей обслуживания требования $J_i \in J$, которые могут возникнуть в перестановках из множества S. При формулировке и доказательстве свойств 4(*ii*) и 5 будем предполагать, что множества требований, попарно удовлетворяющих неравенствам (4), рассматриваются как одно требование (см. замечание).

Свойство 4. *(i) Для фиксированной перестановки $\pi_k \in S$ требование $J_i \in J$ может иметь не более одной максимальной вариации $[l_i, u_i]$ длительности $p_i \in [a_i, b_i]$ в перестановке π_k.*

(ii) Для всего множества перестановок S только в случае (III) требование $J_i \in J$ может иметь более чем одну ($|J(i)|+1>1$) максимальную вариацию $[l_i, u_i]$ длительности $p_i \in [a_i, b_i]$ для какой-либо перестановки из множества S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Часть (*i*) свойства 4 следует из того факта, что непустая *максимальная вариация* $[l_i, u_i]$ длительностей обслуживания требования $J_i \in J$ (если она существует) однозначно определена подмножеством требований $J^-(i)$, расположенных перед требованием J_i в перестановке π_k, и подмножеством требований $J^+(i)$, расположенных после требования J_i. Подмножества $J^-(i)$ и $J^+(i)$ однозначно определены для фиксированной перестановки $\pi_k \in S$ и фиксированного требования $J_i \in J$.

Часть (*ii*) свойства 4 следует из следующих соображений. Если открытый интервал $\left(\frac{w_i}{b_i},\frac{w_i}{a_i}\right)$ не пересекается с отрезком $\left[\frac{w_v}{b_v},\frac{w_v}{a_v}\right]$ для каждого требования $J_v \in J$, то существует перестановка $\pi_t \in S^{\max}$ с максимальной вариацией $[l_i,u_i]=[a_i,b_i]$ длительности обслуживания требования $J_i \in J$.

Каждое требование $J_v \in J$ с $\left(\frac{w_i}{b_i},\frac{w_i}{a_i}\right)\bigcap\left[\frac{w_v}{b_v},\frac{w_v}{a_v}\right]\neq\varnothing$, удовлетворяющее неравенствам (3) (случай (I)), может уменьшить максимальную вариацию $[l_i,u_i]$ длительности обслуживания требования $J_i \in J$, но не может породить новых максимальных вариаций длительности обслуживания требования $J_i \in J$.

В случае (III) требование J_v, удовлетворяющее неравенствам (5), может породить новую максимальную вариацию длительности обслуживания только требования J_i, удовлетворяющего неравенствам (5). Таким образом, количество элементов $|L(i)|$ множества $L(i)$ таких отрезков $[l_i,u_i]$ не превышает числа $|J(i)|+1$.

Обозначим через L' упорядоченное множество $(i,[l_i,u_i])$, состоящее из всех отрезков $[l_i,u_i]$, каждый из которых является наибольшим из максимальных вариаций длительностей обслуживания p_i требования $J_i \in J$ по всем перестановкам из множества *S*. Пусть L – множество $(i,[l_i,u_i])$, состоящее из всех отрезков $[l_i,u_i]$, являющихся максимальными вариациями длительностей обслуживания p_i всех требований $J_i \in J$ в какой-либо перестановке из множества *S*.

Свойство 5. $|L'|\leq n$.

Доказательство. Поскольку множество L' содержит не более одной максимальной вариации длительностей обслуживания p_i каждого требования $J_i \in J$, то для него также выполняется неравенство $|L'|\leq n$.

Нетрудно убедиться в том, что доказанные утверждения позволяют обосновать следующий $O(n\log n)$-алгоритм построения перестановки, многогранник устойчивости которой имеет наибольшую размерность и наибольший относительный объем.

Алгоритм «Многогранник»

Вход: отрезки $[a_i;b_i]$, веса w_i, требования $J_i \in J$.

Выход: перестановка $\pi_t \in S^{\max}$, многогранник устойчивости $SB(\pi_t,T)$.

Шаг 1. Построить списки $M(U)=(J_{u_1},...,J_{u_n})$ и $w(U)=\left(\frac{w_{u_1}}{b_{u_1}},...,\frac{w_{u_n}}{b_{u_n}}\right)$ в порядке невозрастания значений w_{u_r}/b_{u_r}. Если на некотором подмножестве требований значения w_{u_r}/b_{u_r} совпадают, то требования этого подмножества сортируются в порядке неубывания значений w_{u_r}/a_{u_r}.

Шаг 2. Построить списки $M(L)=(J_{l_1},...,J_{l_n})$ и $w(L)=\left(\frac{w_{l_1}}{a_{l_1}},...,\frac{w_{l_n}}{a_{l_n}}\right)$ в порядке невозрастания значений w_{l_r}/a_{l_r}. Если на некотором подмножестве требований значения w_{l_r}/a_{l_r} совпадают, то требования этого подмножества сортируются в порядке неубывания значений w_{l_r}/b_{l_r}.

Шаг 3. Если существуют множества требований с одинаковыми отрезками $\left[\frac{w_v}{b_v}, \frac{w_v}{a_v}\right]$, то оставить для дальнейшего рассмотрения только одно из них (свойство 3). Положить n_1 равным количеству оставшихся требований.

Шаг 4. Положить $j = 1$.

Шаг 5. Если $j \le n_1$, то перейти к шагу 6, иначе перейти к шагу 12.

Шаг 6. Если $J_{u_j} = J_{l_j}$, то требование J_{l_j} должно быть расположено в позиции j в перестановке $\pi_t \in S^{\max}$, перейти к шагу 7. В противном случае требование $J_{l_j} = J_i$ удовлетворяет неравенствам (5), перейти к шагу 8.

Шаг 7. Положить $j := j + 1$. Перейти к шагу 5.

Шаг 8. Построить множество $J(i) = \{J_{u_j}, ..., J_{u_{k-1}}\}$ всех требований J_v, удовлетворяющих неравенствам (5), где $J_i = J_{l_j} = J_{u_k}$. Если в позициях $j,...,k$ в списках $M(L)$ и $M(U)$ стоят разные наборы требований, то переместить требования множества $J(i)$ в позиции $j+1,...,k$ в списках $M(L)$ и $w(L)$, сдвинув остальные требования соответственно вправо.

Шаг 9. Выбрать наибольший диапазон $[l_{l_j}, u_{l_j}]$ из всех диапазонов, построенных для требования $J_{l_j} = J_i$, и разбить множество $J(i)$ на подмножества $J^-(i)$ и $J^+(i)$, определяющие диапазон $[l_{l_j}, u_{l_j}]$ (см. алгоритм «Диапазон»).

Шаг 10. В перестановке $\pi_t \in S^{\max}$ поместить требования множеств $J^-(i)$, $\{J_i\}$, $J^+(i)$ в позиции $j,...,k$. Положить $j = k + 1$. Перейти к шагу 5.

Шаг 11. Удаленные на шаге 3 требования разместить в перестановке $\pi_t \in S^{\max}$ рядом с требованием с таким же отрезком $\left[\frac{w_v}{b_v}, \frac{w_v}{a_v}\right]$.

Шаг 12. Построить многогранник устойчивости $SB(\pi_t, T)$ по алгоритму STABOX, предложенному в статье [5].

При представлении упорядоченных множеств $M(L)$ и $w(L)$ в виде списочных структур перемещение требований множества $J(i)$ в позиции $j+1,...,k$ в списках $M(L)$ и $w(L)$ на шаге 8 со сдвигом остальных требований вправо можно реализовать за один перебор требований множества $J(i)$. Для этого перед выполнением шага 1 для элементов списка $M(U)$ необходимо сопоставить им адреса соответствующих элементов списка $M(L)$.

При выполнении шага 9 следует учитывать тот факт, что требования множества $J(i) = \{J_{u_j}, ..., J_{u_{k-1}}\}$ в списке $M(U)$ расположены в порядке невозрастания значений w_{u_r} / b_{u_r}, $j \le r \le k-1$, в силу чего наибольший диапазон $[l_{l_j}, u_{l_j}]$ можно найти с помощью алгоритма «Диапазон» за один перебор требований множества $J(i)$. Для этого нужно перебирать требования в порядке неубывания значений w_{u_r} / b_{u_r} и определять отрезки $[d^-_{l_j}, d^+_{l_j}]$ между требованиями, смежными в списке $M(U)$. Нижнюю границу $d^-_{l_j}$ отрезка $[d^-_{l_j}, d^+_{l_j}]$ между требованиями J_{u_t} и $J_{u_{t-1}}$ можно определить по формуле

$$d^-_{l_j} := \max\{d^-_{l_j}, w_{u_t} / a_{u_t}\}. \tag{6}$$

Соответствующую верхнюю границу можно получить по формуле

$$d^+_{l_j} = w_{u_{t-1}} / b_{u_{t-1}}. \tag{7}$$

Графически этот случай показан на рис. 3.

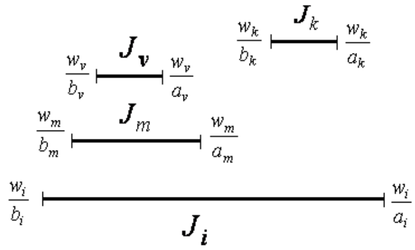

Рис. 3. Интервалы отношений весов к длительностям обслуживания требований

Построим списки $M(U)$ и $M(L)$ и множество требований $J(i)$:

$$M(U) = (\underbrace{J_k, J_v, J_m}_{J(i)}, \boldsymbol{J_i})\,;$$

$$M(L) = (\boldsymbol{J_i}, J_k, J_m, J_v)\,;$$

$$J(i) = \{J_k, J_v, J_m\}\,.$$

Требования множества $J(i) = \{J_k, J_v, J_m\}$ в списке $M(U)$ расположены в порядке невозрастания значений w_{u_r} / b_{u_r} . Перебирая требования множества $J(i)$ в порядке неубывания значений w_{u_r} / b_{u_r} (т. е. в обратном порядке: (J_m, J_v, J_k)), получаем следующие четыре вариации отношения весов к длительностям обслуживания требований:

1) $\left[\dfrac{w_i}{b_i}, \dfrac{w_m}{b_m}\right]$;

2) $\varnothing$ (поскольку $d_i^- = \dfrac{w_m}{a_m} > \dfrac{w_v}{b_v} = d_i^+$);

3) $\left[\max\left\{\dfrac{w_m}{a_m}, \dfrac{w_v}{a_v}\right\}, \dfrac{w_k}{b_k}\right] = \left[\dfrac{w_m}{a_m}, \dfrac{w_k}{b_k}\right]$;

4) $\left[\max\left\{\dfrac{w_m}{a_m}, \dfrac{w_k}{a_k}\right\}, \dfrac{w_i}{a_i}\right] = \left[\dfrac{w_k}{a_k}, \dfrac{w_i}{a_i}\right]$.

Из полученных интервалов выбирается тот, который дает самую большую максимальную вариацию длительностей обслуживания требований.

Следует отметить, что фиксированный порядок следования требований в перестановке требований множества $J \setminus (J(i) \bigcup J_{l_j})$ может привести к необходимости рассмотрения в алгоритме «Диапазон» сокращенных диапазонов $[\hat{a}_z, \hat{b}_z]$, $[\hat{a}_z, \hat{b}_z] \subseteq [a_z, b_z]$, $z \in \{u_j, ..., u_{k-1}, l_j\}$ вместо заданных отрезков $[a_z, b_z]$ возможных длительностей обслуживания требований $J_z \in J(i) \bigcup J_{l_j}$. Границы отношений весов к длительностям для сокращенных диапазонов можно определить по формулам

$$w_z / \hat{a}_z = \min\{w_z / a_z, w_{u_{j-1}} / b_{u_{j-1}}\}\,,\ w_z / \hat{b}_z = \max\{w_z / b_z, w_{l_{k+1}} / a_{l_{k+1}}\}\,. \qquad (8)$$

Алгоритм «Диапазон»

Вход: отрезки $[a_i, b_i]$, веса w_i, $J_i \in J$, множество $J(i) = \{J_{u_j}, ..., J_{u_{k-1}}\}$ для требования J_{l_j}, список $M(U) = (J_{u_1}, ..., J_{u_n})$ требований, расположенных в порядке невозрастания значений w_{u_r} / b_{u_r}, список $M(L) = (J_{l_1}, ..., J_{l_{j-1}}, J_{l_j}, ..., J_{l_{k-1}}, J_{l_k}, J_{l_{k+1}}, ..., J_{l_n}) = (J_{l_1}, ..., J_{l_{j-1}}, J_{u_k}, ..., J_{u_{k-1}}, J_{l_{k+1}}, ..., J_{l_n})$ требований, расположенных в порядке невозрастания значений w_{l_r} / a_{l_r} для требований $J_{l_1}, ..., J_{l_{j-1}}$ и $J_{l_{k+1}}, ..., J_{l_n}$.

Выход: наибольший диапазон $[l_{l_j}, u_{l_j}]$, подмножества $J^-(i)$ и $J^+(i)$.

Шаг 1. Найти сокращенный диапазон $[a,b] = [w_{l_j} / \hat{b}_{l_j}, w_{l_j} / \hat{a}_{l_j}]$ отношения веса к длительностям обслуживания требования J_{l_j} по формулам (8). Если $[a,b] \neq \varnothing$, то перейти к шагу 2, иначе положить $[l_{l_j}, u_{l_j}] = \varnothing$, $J^-(i) = J(i)$, $J^+(i) = \varnothing$, перейти к шагу 9.

Шаг 2. Положить $t = k-1$, $t_1 = t+1$, $d_{l_j}^- = w_{l_j} / b_{l_j}$, $d_{l_j}^+ = w_{u_t} / b_{u_t}$, $[l_{l_j}, u_{l_j}] = [w_{l_j} / d_{l_j}^+, w_{l_j} / d_{l_j}^-]$, $J^-(i) = J(i)$, $J^+(i) = \varnothing$.

Шаг 3. Если $t < j$, то перейти к шагу 7.

Шаг 4. Положить $d_{l_j}^- = \max\{d_{l_j}^-, w_{u_t} / a_{u_t}\}$. Если $t > j$, то положить $d_{l_j}^+ = w_{u_{t-1}} / b_{u_{t-1}}$, в противном случае положить $d_{l_j}^+ = b$.

Шаг 5. Если диапазон $[d_{l_j}^-, d_{l_j}^+] \cap [a,b]$ не пуст, а длина соответствующего отрезка $[l'_{l_j}, u'_{l_j}]$ больше длины отрезка $[l_{l_j}, u_{l_j}]$, то положить $[l_{l_j}, u_{l_j}] = [l'_{l_j}, u'_{l_j}]$, $t_1 = t$.

Шаг 6. Положить $t := t-1$. Перейти к шагу 3.

Шаг 7. Если $t_1 = j$, то положить $J^-(i) = \varnothing$, $J^+(i) = J(i)$.

Шаг 8. Если $j < t_1 < k$, то положить $J^-(i) = (J_{u_j}, ..., J_{u_{t_1}})$, $J^+(i) = (J_{u_{t_1+1}}, ..., J_{u_{k-1}})$.

Шаг 9. Конец алгоритма.

Шаг 3 алгоритма «Многогранник» основывается на свойстве 3 и приведенном замечании, шаг 6 – на свойстве 2, шаги 8, 9 – на свойстве 4 (часть (*ii*)). Шаг 10 основан на теореме, которая доказана ниже.

Свойство 6. *Существует перестановка $\pi_t \in S^{\max}$ с множеством пар $(i, [l_i, u_i])$, где i – номер требования, $[l_i, u_i]$ – максимальная вариация длительности p_i, $J_i \in J$, такой, что множество $(i, [l_i, u_i])$ совпадает с множеством $L' \subseteq L$.*

Доказательство. Для каждого требования J_i максимальные вариации $[l_i, u_i]$ можно найти как отрезки максимальной длины, для которых выполняется равенство $\left(\dfrac{w_i}{u_i}, \dfrac{w_i}{l_i}\right) \cap \left[\dfrac{w_v}{b_v}, \dfrac{w_v}{a_v}\right] = \varnothing$ для всех требований $J_v \in J \setminus J_i$. Поскольку для всех требований J_i имеет место включение $[l_i, u_i] \subseteq [a_i, b_i]$, то $\left(\dfrac{w_i}{u_i}, \dfrac{w_i}{l_i}\right) \cap \left(\dfrac{w_v}{u_v}, \dfrac{w_v}{l_v}\right) = \varnothing$. Для каждого требования можно выбрать наибольшую из максимальных вариаций. При этом для каждого из требований с непустой максимальной вариацией однозначно определяются подмножества предшествующих ему и следующих за ним требований. Поскольку интервалы $\left(\dfrac{w_i}{u_i}, \dfrac{w_i}{l_i}\right)$ не пересекаются, можно построить перестановку, удовлетворяющую условиям свойства 6. Такая перестановка будет иметь многогранник устойчивости с наибольшей размерностью, наибольшим относительным объемом и минимальным количеством максимальных вариаций нулевой длины.

Для доказательства теоремы проанализируем алгоритм «Многогранник». На шагах 1–3 и 6 все требования $J^t = \{J_i \mid J_{u_j} = J_i = J_{l_j}\}$ расположены одинаково в обоих списках $M(U)$, $M(L)$ и имеют фиксированное расположение в перестановке $\pi_t \in S^{\max}$. Расположение остальных требований $J \setminus J^t$ в перестановке π_t определяется на шагах 8, 9. Фиксированный порядок следования требований J^t может сократить первоначальный диапазон $[a_i, b_i]$ требований $J_i \in J \setminus J^t$, обозначим его через $[\hat{a}_i, \hat{b}_i]$ Таким образом, на шагах 8, 9 для требований $J_i \in J \setminus J^t$ вместо диапазонов $[a_i, b_i]$ в алгоритме «Многогранник» рассматриваются, возможно, уменьшенные диапазоны $[\hat{a}_i, \hat{b}_i]$.

Теорема. *Алгоритм «Многогранник» строит перестановку* $\pi_t \in S^{\max}$, *такую, что размерность* $|N_t|$ *многогранника устойчивости* $SB(\pi_t, T) = \times_{t_i \in N_t} [l_{t_i}, u_{t_i}] \subseteq T$ *является наибольшей среди всех перестановок S, а относительный объем многогранника устойчивости* $SB(\pi_t, T)$ *является наибольшим среди всех перестановок* $\pi_k \in S$, *имеющих наибольшую размерность их многогранников устойчивости и минимальное количество* n^k *максимальных вариаций нулевой длины.*

Доказательство. Покажем, что построенная по алгоритму «Многогранник» перестановка удовлетворяет свойству 6. Согласно шагам 1–7 алгоритма «Многогранник», если для требования J_i выполняются условия шага 6, то для него и каждого из следующих за ним в перестановке π_t требований выполняются условия (3). В этом случае требование имеет не более одной максимальной вариации, и она может быть непустой только тогда, когда требование J_i расположено перед всеми последующими требованиями в перестановке π_t.

Обозначим через J^* множество всех требований J_i, для которых существуют требования J_v, такие, что требования J_i и J_v попарно удовлетворяют неравенствам (5), и которые сами не принадлежат ни одному из множеств $J(i)$. Тогда для всех требований $J_i \in J^*$, согласно свойству 4 (часть (*ii*)) и шагам 8–11 алгоритма «Многогранник», множества $J^-(i)$ и $J^+(i)$, соответствующие наибольшей максимальной вариации требования J_i, определяются перебором множеств $J(i)$. В этом случае максимальные вариации требования определяются с учетом предшествующих ему и следующих за ним требований. Поэтому требования J_v, принадлежащие одновременно нескольким множествам $J(i)$, могут рассматриваться в паре с любым из множеств $J_i \in J^*$. После выполнения шага 8 для требования J_i условия (3) должны выполняться для требования J_i и для каждого из требований J_v, включенных в перестановку π_t на более поздних итерациях.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Проведенные вычислительные эксперименты на множестве случайно сгенерированных примеров показали высокую эффективность разработанного алгоритма как по времени решения задачи $1 \mid a_i \le p_i \le b_i \mid \sum w_i C_i$, так и по качеству получаемых расписаний (перестановок) относительно критерия $\sum w_i C_i$. Эксперименты проводились на персональном компьютере Pentium(R) 4, CPU 3 GHz, 1,00 GB RAM.

Построение примеров проводилось по следующей схеме. Для каждого требования случайным образом генерировалась середина C интервала длительностей его обслуживания из диапазона [1, 100]. Нижняя граница длительности обслуживания требования вычислялась по формуле $a_i = C \cdot (1 - L/100)$, верхняя – по формуле $b_i = C \cdot (1 + L/100)$, где L – погрешность длительности обслуживания требования в процентах. Вес каждого требования генерировался в диапазоне [1, 50].

Величина относительной погрешности целевой функции рассчитывалась исходя из значения целевой функции для эвристического расписания, построенного согласно предложенному алгоритму, и соответствующего оптимального значения целевой функции для случайно сгенерированной детерминированной задачи с длительностями из заданных интервалов возможных значений. Для каждой комбинации $n \in \{100, 200, ..., 1000\}\}$ и $L \in \{1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40\}\}$ была решена серия из 100 тестовых примеров $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$.

В проведенных экспериментах при $L = 40$ % средняя относительная погрешность Δ целевой функции для каждой серии не превосходила 3,4 % при любом количестве n требований. При $L = 20$ % средняя относительная погрешность Δ целевой функции для каждой серии не превосходила 0,86 % при любом количестве n требований. При $L = 5$ % средняя относительная погрешность Δ целевой функции для каждой серии не превосходила 0,075 % при любом количестве n требований.

Заключение

В статье введено и исследовано понятие параллелепипеда устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$ (определение 2) для задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ минимизации суммы взвешенных моментов завершения обслуживания требований $J_i \in J$ при условии, что при решении задачи $1 | a_i \le p_i \le b_i | \sum w_i C_i$ известны только нижняя и верхняя границы возможных длительностей обслуживания требований. Параллелепипед устойчивости является подмножеством шара устойчивости оптимального решения, который исследовался ранее для различных оптимизационных задач (например, в [4, 7, 8]).

Параллелепипед устойчивости может быть построен за $O(n \log n)$ элементарных действий. В статье предложен алгоритм «Многогранник» сложности $O(n \log n)$ для построения перестановки требований $J = \{J_1, J_2, ..., J_n\}$ с наибольшей размерностью и наибольшим объемом параллелепипеда устойчивости.

Полученные результаты предполагается использовать в разрабатываемой новой версии комплекса программ «Расписание», предназначенного для планирования рабочего времени руководящего работника [6]. При разработке эвристических алгоритмов построения расписаний для руководящего работника необходимо снизить риски получения неоптимальных расписаний.

При построении расписания и управления реализацией построенного расписания будут использованы описанные выше алгоритмы «Многогранник» и «Диапазон». Это позволит повысить гарантии того, что полученное расписание с большой вероятностью будет близким к оптимальному расписанию и, следовательно, риски его использования руководящим работником будут минимальны. В конечном итоге это приведет к максимизации прибыли.

Некоторые из полученных в данной статье результатов были представлены в материалах двух международных научных конференций [9, 10].

Список литературы

1. Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity / E.L. Lawler [et al.] // Handbooks in Operations Research and Management Science. Logistics of Production and Inventory. – New York, 1993. – P. 445–522.

2. Егорова, Н.Г. Минимизация суммы взвешенных моментов завершения обслуживания требований с интервальными длительностями / Н.Г. Егорова, Ю.Н. Сотсков // Информатика. – 2008. – № 3. – С. 5–16.

3. Smith, W.E. Various Optimizers for Single-Stage Production / W.E. Smith // Naval Research and Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3, № 1. – P. 59–66.

4. Сотсков, Ю.Н. Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами / Ю.Н. Сотсков, Н.Ю. Сотскова. – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2004. – 290 с.

5. Sotskov, Yu.N. Minimizing total weighted flow time under uncertainty using dominance and a stability box / Yu.N. Sotskov, T.-C. Lai // Computers & Operations Research. – 2012. – Vol. 39. – P. 1271–1289.

6. Модели и комплекс программ для планирования рабочего времени / Ю.Н. Сотсков [и др.] // Информатика. – 2007. – № 4. – С. 23–36.

7. Emelichev, V.A. Multicriterial investment problem in conditions of uncertainty and risk / V.A. Emelichev, V.V. Korotkov, K.G. Kuz'min // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2011. – Vol. 50, № 6. – P. 1011–1018.

8. Емеличев, В.А. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной квадратичной булевой задачи на узкие места / В.А. Емеличев, В.В. Коротков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 6. – С. 3–16.

9. The stability box in interval data for minimizing the sum of weighted completion times / Yu.N. Sotskov [et al.]// SIMULTECH 2011: 1st International Conf. on Simulation and Modeling Methodologies. Technologies and Applications, Noordwijkerhout, The Netherlands, 29–31 July 2011. – Portugal : SciTePress – Science and Technology Publications, 2011. – P. 14–23.

10. Егорова, Н.Г. Перестановка с наибольшим параллелепипедом устойчивости для обслуживания требований с неопределенными длительностями операций / Н.Г. Егорова, Ю.Н. Сотсков // Пятая Междунар. науч. конф. «Танаевские чтения». – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2012. – С. 24–29.

Поступила 11.06.12

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: NataMog@yandex.by
sotskov@newman.bas-net.by
aklotr809@gmail.com

N.G. Egorova, Yu.N. Sotskov, A.A. Kasiankou

PERMUTATIONS WITH LARGEST STABILITY BOX FOR PROCESSING JOBS WITH INTERVAL OPERATION TIMES

A single machine problem of minimizing the sum of job weighted completion times is considered. It is assumed that only lower and upper bounds for processing time of each job are known. Stability box of an optimal permutation is studied. An $O(n\log n)$ time algorithm is developed for constructing a permutation with stability box having largest dimension and largest volume.