

УДК 519.8

Н.Н. Гущинский

## ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДУГ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОРГРАФОВ

*Рассматривается задача оптимизации параметров технических систем, структура которых уже определена и может быть представлена последовательно-параллельными орграфами. Предполагается, что совокупность искоемых проектных параметров системы может быть приписана дугам орграфа, а условия функционирования системы могут быть заданы ограничениями (равенствами и неравенствами) на значения некоторых функций, монотонно зависящих от искоемых параметров. В качестве критерия выбора оптимальных решений рассматривается минимизация квазисепарабельной функции, зависящей как от параметров дуг орграфа, так и от их суммарных значений.*

### Введение

В комплексе оптимизационных задач, возникающих в системах автоматизированного проектирования, планирования и управления, значительное место занимают задачи, которые могут быть достаточно адекватно сформулированы в терминах оптимизации параметров дуг сети при надлежащем выборе целевой функции и ограничений. В частности, математическими моделями такого вида могут быть представлены задачи оптимального выбора параметров многозвенных механических трансмиссий различной структуры на начальном этапе их проектирования [1]. Эти модели могут быть как детерминированными, в которых случайный характер различных проектных и эксплуатационных факторов учитывается опосредованно, так и вероятностными, предполагающими прямой учет имеющейся информации о случайном характере всех либо части этих факторов. Ниже рассматривается один из классов таких задач.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается класс *последовательно-параллельных орграфов* (ПП-орграфов), который является подмножеством класса ориентированных мультиграфов с одним источником и одним стоком. Этот класс может быть определен следующим образом [4]. Орграф  $G$ , состоящий из двух вершин  $s$  и  $t$ , которые соединены дугой  $(s, t)$ , является *базовым*, или *минимальным*, ПП-орграфом. Вершина  $s$  называется *источником*, а вершина  $t$  – *стоком* ПП-орграфа  $G$  соответственно. В дальнейшем будем обозначать их через  $s(G)$  и  $t(G)$ . *Составной* ПП-орграф может быть получен из двух ПП-орграфов  $G_1$  и  $G_2$  с помощью следующих двух операций композиции. *Последовательная* композиция заключается в отождествлении стока  $t(G_1)$  орграфа  $G_1$  с источником  $s(G_2)$  орграфа  $G_2$  ( $s(G)=s(G_1)$ ,  $t(G)=t(G_2)$ ), а *параллельная* композиция – в отождествлении источников  $s(G_1)$  и  $s(G_2)$  и стоков  $t(G_1)$  и  $t(G_2)$  ( $s(G)=s(G_1)=s(G_2)$ ,  $t(G)=t(G_1)=t(G_2)$ ).

ПП-орграфы принято представлять в виде *двоичного декомпозиционного дерева* [4], в котором листьями (висячими вершинами) являются дуги исходного графа  $G$ , остальными вершинами – операции последовательной (+) и параллельной (//) композиции, а ребра соединяют подграфы, участвующие в композиции соответствующего подграфа более высокого уровня. Данное представление не единственное, для одного и того же ПП-графа может существовать несколько его различных декомпозиционных деревьев. В [5] предложен алгоритм, по которому можно найти некоторое такое представление за линейное время от числа дуг.

В настоящей работе, как и в [3], используется метод представления ПП-орграфов, основанный на операциях последовательной и параллельной композиции над несколькими графами. При последовательной композиции ПП-орграфов  $G_1, G_2, \dots, G_m$  последовательно для  $i = 1, 2, \dots, m-1$  отождествляется сток  $t(G_i)$  орграфа  $G_i$  с источником  $s(G_{i+1})$  орграфа  $G_{i+1}$  ( $s(G)=s(G_1)$ ,  $t(G)=t(G_m)$ ), а при их параллельной композиции отождествляются между собой источники  $s(G_i)$  ( $s(G)=s(G_1)=s(G_2)=\dots=s(G_{m-1})=s(G_m)$ ) и стоки  $t(G_i)$  ( $t(G)=t(G_1)=t(G_2)=\dots=t(G_{m-1})=t(G_m)$ ) соответственно. В этом случае ПП-орграф представляется единственным

образом его *декомпозиционным деревом*, в котором по-прежнему листьями являются дуги исходного графа  $G$ , остальными вершинами – операции последовательной и параллельной композиции, а ребра соединяют подграфы, участвующие в композиции соответствующего подграфа более высокого уровня. Для этого дерева характерным является то, что на каждом *уровне* его вершин (длине пути из корня дерева) используется одна и та же операция композиции (последовательной или параллельной).

Пусть  $R_1, R_2$  и  $R_3$  – некоторые подмножества действительных чисел. На множествах  $R_1$  и  $R_2$  заданы бинарные операции  $\bullet$  и  $\oplus$  соответственно, а на множестве  $R_3$  – бинарные операции  $\otimes$  и  $\circ$ . Предполагается, что все операции обладают свойствами *ассоциативности* и *коммутативности* и не убывают по своим операндам, т. е.  $a \bullet b \leq c \bullet b$  и  $a \bullet b \leq a \bullet d$ , если  $a < c$  и  $b < d$ . Будем предполагать также, что операции  $\bullet$  и  $\oplus$  образуют *абелеву группу* на соответствующем подмножестве. В этом случае в множествах  $R_1$  и  $R_2$  существуют *нейтральные элементы*  $1(\bullet)$  и  $1(\oplus)$  (называемые также *единицами*), для которых  $a \bullet 1(\bullet) = a$  и  $b \oplus 1(\oplus) = b$  для любых элементов  $a$  из  $R_1$  и  $b$  из  $R_2$ , а также существуют такие *обратные элементы*  $a^{-1}$  и  $b^{-1}$ , что  $a \bullet a^{-1} = 1(\bullet)$  и  $b \oplus b^{-1} = 1(\oplus)$ . Заметим, что при сделанном предположении операции  $\bullet$  и  $\oplus$  строго возрастают в силу единственности обратного элемента в абелевой группе.

Задан ПП-орграф  $G=(V,E)$  с множеством вершин  $V$  и множеством дуг  $E$  с источником  $s$  и стоком  $t$ . Каждой вершине  $v \in V$  сопоставлена функция  $M_v: R_1 \rightarrow R_2$ , а дуге  $e \in E$  – отрезки  $[\underline{x}(e), \bar{x}(e)]$  из  $R_1$  и  $[\underline{p}(e), \bar{p}(e)]$  из  $R_3$ , а также неубывающая по последнему аргументу функция  $M_e: R_1 \times R_1 \times R_3 \rightarrow R_2$ .

Обозначим соответственно через  $v_1(e)$  и  $v_2(e)$  начальную и конечную вершины дуги  $e \in E$ , а через  $L(v_1, v_2) = \{L_k(v_1, v_2) | k=1, \dots, r(v_1, v_2)\}$  – множество ориентированных путей в орграфе  $G$  из вершины  $v_1$  в вершину  $v_2$ . Положим  $L_k(v) = L_k(s, v)$  и  $r(v) = r(s, v)$ .

Пусть  $x = (x(e) | e \in E)$  – вектор с компонентами  $x(e)$  из  $R_1$ . Для пути  $L_k(v) = (s=v_0, e_1, v_1, \dots, v_{r-1}, e_r, v_r, \dots, v_{l-1}, e_l, v_l=v)$ ,  $v_{r-1} = v_1(e_r)$ ,  $v_r = v_2(e_r)$ ,  $r=1, \dots, l$ , и вектора  $x$  определим функцию  $c_k(v, x)$  с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$c_k(v, x) = c_k^l(v, x); \quad (1)$$

$$c_k^r(v, x) = c_k^{r-1}(v, x) \bullet x(e_r), r=1, \dots, l; \quad (2)$$

$$c_k^0(v, x) = 1(\bullet). \quad (3)$$

Предполагается также, что на множестве векторов вида  $p = (x(e) | e \in E)$  с компонентами  $p(e)$  из  $R_3$  задана функция  $\Phi$ , которая определяется операциями  $\otimes$  и  $\circ$  рекуррентным образом в соответствии с деревом декомпозиции орграфа  $G$ .

Для произвольного подграфа  $G^0 = (V^0, E^0)$  орграфа  $G$  обозначим через  $\Phi_{G^0}(p)$  сужение функции  $\Phi$  на множество дуг  $E^0$ . Положим  $\Phi_{G(\{e\})}(p) = p(e)$ , где  $G(\{e\})$  – подграф, порожденный дугой  $e$ . Если подграфы  $G^1, G^2, \dots, G^m$  представляют собой элементы последовательной или параллельной композиции орграфа  $G$ , то  $\Phi_G(p) = \Phi_{G^1}(p) \otimes \Phi_{G^2}(p) \otimes \dots \otimes \Phi_{G^m}(p)$  и  $\Phi_G(p) = \Phi_{G^1}(p) \circ \Phi_{G^2}(p) \circ \dots \circ \Phi_{G^m}(p)$  соответственно.

Примерами функции  $\Phi(p)$  являются функции

$$\Phi(p) = \min \{p(e) | e \in E\}; \quad (4)$$

$$\Phi(p) = \prod_{e \in E} p(e); \quad (5)$$

$$\Phi(p) = \min \left\{ \prod_{e \in L_k(t)} p(e) | k=1, \dots, r(s, t) \right\}. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что функция (4) может быть определена как функция  $\Phi_G(p)$ , если в качестве операций  $\otimes$  и  $\circ$  принять операцию взятия минимума. Аналогично функция (5) может быть определена операциями умножения в качестве операций  $\otimes$  и  $\circ$ , а функция (6) – операцией умножения в качестве операции  $\otimes$  и операцией взятия минимума в качестве операции  $\circ$ .

Исходная задача заключается в отыскании для заданного действительного числа  $P_0$  из  $R_3$  параметров  $x(e)$  и  $p(e)$  дуг  $e \in E$ , удовлетворяющих следующей системе соотношений:

$$g(x,p) = \bigoplus_{e \in E} M_e(c_1(v_1(e),x),x(e),p(e)) \oplus \bigoplus_{v \in V} M_v(c_1(v,x)) \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$c_k(t,x) = c^*, k=1, \dots, r(s,t); \quad (8)$$

$$x(e) \in [\underline{x}(e), \bar{x}(e)], e \in E; \quad (9)$$

$$\Phi_G(p) \geq P_0; \quad (10)$$

$$p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)], e \in E. \quad (11)$$

Подобные задачи с операциями сложения в качестве операций  $+$  и  $\oplus$  и функцией (4) в качестве  $\Phi_G(p)$  рассматривались в [1].

С целью упрощения обозначений далее используются символы: «+» для обозначения операции  $\bullet$ ,  $\sum$  для этой операции над несколькими операндами, « $\leftarrow$ » для ее обратной операции и «0» для ее нейтрального элемента.

## 2. Анализ задачи

Выясним сначала вопрос о существовании допустимого решения задачи (7)–(11), т. е. совместности ограничений (8)–(11). В силу неубывания функции  $\Phi$  по своим аргументам условия (10), (11), очевидно, выполняются тогда и только тогда, когда  $\Phi(\bar{p}) \geq P_0$ , где  $\bar{p} = (\bar{p}(e), e \in E)$ .

Перейдем теперь к исследованию совместности ограничений (8), (9). Обозначим через  $X$  множество векторов  $x$ , удовлетворяющих этим ограничениям.

Положим

$$\underline{c}(v_1, v_2) = \max \left\{ \sum_{e \in L_k(v_1, v_2)} \underline{x}(e) \mid k=1, \dots, r(v_1, v_2) \right\};$$

$$\bar{c}(v_1, v_2) = \min \left\{ \sum_{e \in L_k(v_1, v_2)} \bar{x}(e) \mid k=1, \dots, r(v_1, v_2) \right\}.$$

Нетрудно показать, что справедливо

**Утверждение 1.** Если граф  $G$  является ПП-орграфом, то  $X \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда выполняются следующие соотношения:

$$\underline{c}(s,t) \leq c^* \leq \bar{c}(s,t); \quad (12)$$

$$\underline{c}(v_1, v_2) \leq \bar{c}(v_1, v_2), v_1, v_2 \in V, L(v_1, v_2) \neq \emptyset. \quad (13)$$

Следует заметить, что условия (12) и (13) не являются достаточными для непустоты множества  $X$ , если  $G$  не является ПП-орграфом.

Пример на рис. 1 показывает, что условия (12) и (13) не являются достаточными для непустоты множества  $X$ , если  $G$  не является ПП-орграфом. Здесь в качестве множества  $R_1$  рассматривается множество действительных чисел, а в качестве операции «+» – обычная операция суммирования.

В квадратных скобках приведены допустимые диапазоны  $[\underline{x}(e), \bar{x}(e)]$  для дуг орграфа  $G$ . Условия (12) и (13) выполняются для графа  $G$  при  $c^* \in [6, 11]$ , поскольку  $\underline{c}(s, I) = 1$ ,  $\bar{c}(s, I) = 4$ ,

$\underline{c}(s,2)=5, \bar{c}(s,2)=6, \underline{c}(s,3)=3, \bar{c}(s,3)=3, \underline{c}(s,t)=6, \bar{c}(s,t)=11, \underline{c}(1,2)=1, \bar{c}(1,2)=2, \underline{c}(1,3)=2, \bar{c}(1,3)=2, \underline{c}(1,t)=3, \bar{c}(1,t)=7, \underline{c}(2,t)=1, \bar{c}(2,t)=5, \underline{c}(3,t)=1, \bar{c}(3,t)=20$ . Здесь и далее курсивом показаны номера вершин орграфов.

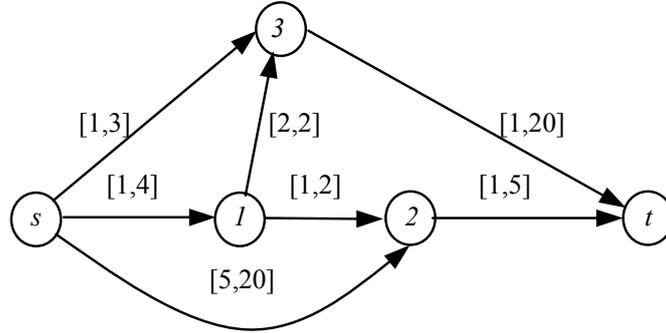


Рис. 1. Пример к утверждению 1

Для всех  $x \in X$  значение  $\sum_{e \in L_k(v_1, v_2)} x(e)$  должно быть одно и то же для всех путей  $\{L_k(v_1, v_2) |$

$k=1, \dots, r(v_1, v_2)\}$  и пар вершин  $v_1, v_2 \in V$ , а такого вектора не существует. Действительно,  $x(e)$  должно быть не меньше пяти для дуги из вершины  $s$  в вершину  $2$ . Следовательно, значение  $x(e)$  должно быть не меньше трех для дуги из вершины  $s$  в вершину  $1$  и  $x(e)$  должно быть не меньше пяти для дуги из вершины  $s$  в вершину  $3$ , что невозможно, поскольку это значение не может быть больше трех.

Значения  $\underline{c}(v_1, v_2)$  и  $\bar{c}(v_1, v_2)$  могут быть найдены с помощью алгоритма поиска кратчайших (критических) путей между всеми вершинами, трудоемкость которого  $O(|V|^3)$ . Ниже предлагается алгоритм проверки совместности ограничений (8) и (9) трудоемкости  $O(|E|)$ , использующий декомпозиционное дерево орграфа  $G$ . Алгоритм заключается в последовательном вычислении для каждого уровня декомпозиционного дерева (начиная с самого нижнего уровня) характеристик  $\underline{x}(G^i)$  и  $\bar{x}(G^i)$  составляющих его подграфов и проверке условия  $\underline{x}(G^i) \leq \bar{x}(G^i)$ . Характеристики  $\underline{x}(G)$  и  $\bar{x}(G)$  вычисляются следующим образом.

Пусть орграф  $G$  получен в результате последовательной или параллельной композиции подграфов  $G^i, i=1, \dots, m$ . Положим  $\underline{x}(G) = \sum_{i=1}^m \underline{x}(G^i)$  и  $\bar{x}(G) = \sum_{i=1}^m \bar{x}(G^i)$  в первом случае, а во втором –  $\underline{x}(G) = \max\{\underline{x}(G^i) | i=1, \dots, m\}$  и  $\bar{x}(G) = \min\{\bar{x}(G^i) | i=1, \dots, m\}$ . Если подграф  $G^i$  состоит из единственной дуги  $e$ , то полагается  $\underline{x}(G^i) = \underline{x}(e)$  и  $\bar{x}(G^i) = \bar{x}(e)$ . Нетрудно видеть, что  $\underline{x}(G) = \underline{c}(s(G), t(G))$  и  $\bar{x}(G) = \bar{c}(s(G), t(G))$ . Следовательно, если  $\underline{x}(G^i) > \bar{x}(G^i)$  для некоторого подграфа  $G^i$ , то задача (7)–(11) не имеет решения, так как в этом случае нарушается необходимое условие (13) непустоты множества  $X$ .

Определим для каждой вершины  $v \in V$  значения  $\underline{\beta}(v)$  и  $\bar{\beta}(v)$  с помощью следующего алгоритма. Как будет показано ниже, эти значения определяют диапазон возможных значений  $c_1(v, x)$  для векторов  $x \in X$ . В рассматриваемом алгоритме  $\{G_k^i | i=1, \dots, n_k\}$  – множество подграфов исходного графа, соответствующих  $k$ -му уровню его декомпозиционного дерева, а  $\{G_k^{ij} | j=1, \dots, n_{ki}\}$  – множество подграфов графа  $G_k^i$ , полученных при его декомпозиции.

**Алгоритм определения диапазонов значений  $c_1(v, x)$**

**Шаг 1.** Положить  $\underline{\beta}(s) = \bar{\beta}(s) = 0, \underline{\beta}(t) = \bar{\beta}(t) = c^*$ .

**Шаг 2.** Для каждого  $k$ -го уровня последовательной декомпозиции в порядке убывания  $k$  и для каждого  $i=1, \dots, n_k$  положить:

а)  $\underline{c} = 0, \bar{c} = 0$ ;

б) для каждого  $j=1, \dots, n_{ki}-1$

$$\underline{c} = \underline{c} + \underline{c}(s(G_k^{ij}), t(G_k^{ij})), \bar{c} = \bar{c} + \bar{c}(s(G_k^{ij}), t(G_k^{ij}));$$

$$\underline{c}(s(G_k^i), t(G_k^{ij})) = \underline{c}, \quad \bar{c}(s(G_k^i), t(G_k^{ij})) = \bar{c};$$

$$\underline{c}(t(G_k^{ij}), t(G_k^i)) = \underline{x}(G_k^i) - \underline{c}, \quad \bar{c}(t(G_k^{ij}), t(G_k^i)) = \bar{x}(G_k^i) - \bar{c};$$

$$\underline{\beta}(t(G_k^{ij})) = \max\{\underline{\beta}(s(G_k^i)) + \underline{c}(s(G_k^i), t(G_k^{ij})), \underline{\beta}(t(G_k^i)) - \bar{c}(s(G_k^{ij}), t(G_k^i))\}; \tag{14}$$

$$\bar{\beta}(t(G_k^{ij})) = \min\{\bar{\beta}(s(G_k^i)) + \bar{c}(s(G_k^i), t(G_k^{ij})), \bar{\beta}(t(G_k^i)) - \underline{c}(s(G_k^{ij}), t(G_k^i))\}. \tag{15}$$

Продемонстрируем работу алгоритма на примере ПП-орграфа  $G$  (рис. 2), на котором в квадратных скобках приведены допустимые диапазоны  $[\underline{x}(e), \bar{x}(e)]$  его дуг. В табл. 1 приведены значения  $\underline{x}(G^i)$  и  $\bar{x}(G^i)$  составляющих подграфов декомпозиционного дерева орграфа  $G$  (рис. 3). Результаты вычислений приведены в табл. 2 для  $c^* = 10$ . Поскольку  $\underline{c}(s, 4) = 4$ ,  $\bar{c}(s, 4) = 6$ ,  $\underline{c}(4, t) = 4$  и  $\bar{c}(4, t) = 5$ , то в силу (14)  $\underline{\beta}(4) = \max\{\underline{\beta}(s) + \underline{c}(s, 4), \underline{\beta}(t) - \bar{c}(4, t)\} = \max\{0 + 4, 10 - 5\} = 5$ , а в силу (15)  $\bar{\beta}(4) = \min\{\bar{\beta}(s) + \bar{c}(s, 4), \bar{\beta}(t) - \underline{c}(4, t)\} = \min\{0 + 6, 10 - 4\} = 6$ . Аналогичным образом  $\underline{c}(s, 2) = 1$ ,  $\bar{c}(2, 4) = 6$ ,  $\underline{\beta}(2) = \max\{\underline{\beta}(s) + \underline{c}(s, 2), \underline{\beta}(4) - \bar{c}(2, 4)\} = \max\{0 + 1, 5 - 6\} = 1$ ,  $\bar{\beta}(2) = \min\{\bar{\beta}(s) + \bar{c}(s, 2), \bar{\beta}(4) - \underline{c}(2, 4)\} = \min\{0 + 3, 6 - 2\} = 3$ ,  $\underline{c}(s, 3) = 2$ ,  $\bar{c}(3, 4) = 2$ ,  $\underline{\beta}(3) = \max\{\underline{\beta}(s) + \underline{c}(s, 3), \underline{\beta}(4) - \bar{c}(3, 4)\} = \max\{0 + 2, 5 - 2\} = 3$ ,  $\bar{\beta}(3) = \min\{\bar{\beta}(s) + \bar{c}(s, 3), \bar{\beta}(4) - \underline{c}(3, 4)\} = \min\{0 + 7, 6 - 1\} = 5$ .

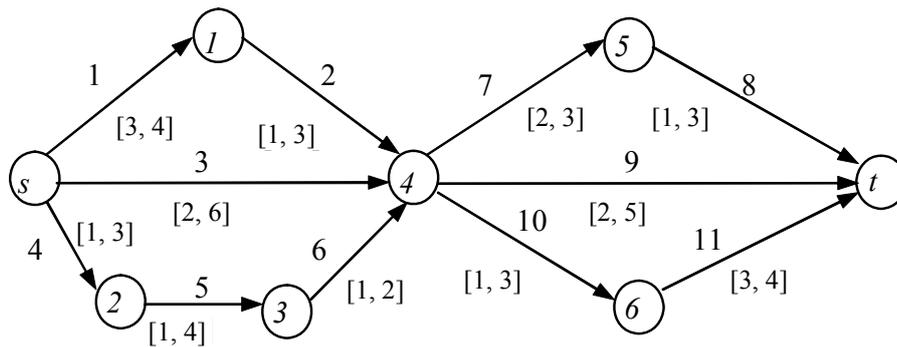


Рис. 2. ПП-орграф  $G$

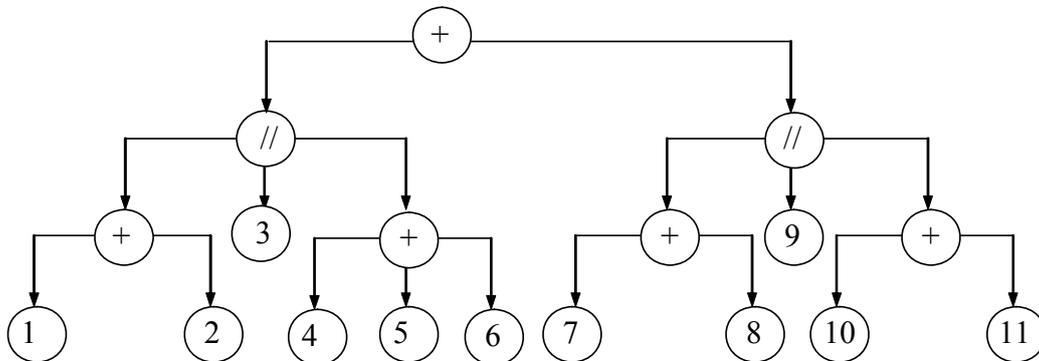


Рис. 3. Декомпозиционное дерево ПП-орграфа  $G$

Таблица 1

Характеристики декомпозиционного дерева ПП-орграфа  $G$

$E(G^i)$	{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}	{7}, {8}	{9}, {10}, {11}	{12}, {13}, {14}, {15}, {16}, {17}, {18}, {19}, {20}, {21}, {22}, {23}, {24}, {25}, {26}, {27}, {28}, {29}, {30}, {31}, {32}, {33}, {34}, {35}, {36}, {37}, {38}, {39}, {40}, {41}, {42}, {43}, {44}, {45}, {46}, {47}, {48}, {49}, {50}, {51}, {52}, {53}, {54}, {55}, {56}, {57}, {58}, {59}, {60}, {61}, {62}, {63}, {64}, {65}, {66}, {67}, {68}, {69}, {70}, {71}, {72}, {73}, {74}, {75}, {76}, {77}, {78}, {79}, {80}, {81}, {82}, {83}, {84}, {85}, {86}, {87}, {88}, {89}, {90}, {91}, {92}, {93}, {94}, {95}, {96}, {97}, {98}, {99}, {100}, {101}, {102}, {103}, {104}, {105}, {106}, {107}, {108}, {109}, {110}, {111}, {112}, {113}, {114}, {115}, {116}, {117}, {118}, {119}, {120}, {121}, {122}, {123}, {124}, {125}, {126}, {127}, {128}, {129}, {130}, {131}, {132}, {133}, {134}, {135}, {136}, {137}, {138}, {139}, {140}, {141}, {142}, {143}, {144}, {145}, {146}, {147}, {148}, {149}, {150}, {151}, {152}, {153}, {154}, {155}, {156}, {157}, {158}, {159}, {160}, {161}, {162}, {163}, {164}, {165}, {166}, {167}, {168}, {169}, {170}, {171}, {172}, {173}, {174}, {175}, {176}, {177}, {178}, {179}, {180}, {181}, {182}, {183}, {184}, {185}, {186}, {187}, {188}, {189}, {190}, {191}, {192}, {193}, {194}, {195}, {196}, {197}, {198}, {199}, {200}, {201}, {202}, {203}, {204}, {205}, {206}, {207}, {208}, {209}, {210}, {211}, {212}, {213}, {214}, {215}, {216}, {217}, {218}, {219}, {220}, {221}, {222}, {223}, {224}, {225}, {226}, {227}, {228}, {229}, {230}, {231}, {232}, {233}, {234}, {235}, {236}, {237}, {238}, {239}, {240}, {241}, {242}, {243}, {244}, {245}, {246}, {247}, {248}, {249}, {250}, {251}, {252}, {253}, {254}, {255}, {256}, {257}, {258}, {259}, {260}, {261}, {262}, {263}, {264}, {265}, {266}, {267}, {268}, {269}, {270}, {271}, {272}, {273}, {274}, {275}, {276}, {277}, {278}, {279}, {280}, {281}, {282}, {283}, {284}, {285}, {286}, {287}, {288}, {289}, {290}, {291}, {292}, {293}, {294}, {295}, {296}, {297}, {298}, {299}, {300}, {301}, {302}, {303}, {304}, {305}, {306}, {307}, {308}, {309}, {310}, {311}, {312}, {313}, {314}, {315}, {316}, {317}, {318}, {319}, {320}, {321}, {322}, {323}, {324}, {325}, {326}, {327}, {328}, {329}, {330}, {331}, {332}, {333}, {334}, {335}, {336}, {337}, {338}, {339}, {340}, {341}, {342}, {343}, {344}, {345}, {346}, {347}, {348}, {349}, {350}, {351}, {352}, {353}, {354}, {355}, {356}, {357}, {358}, {359}, {360}, {361}, {362}, {363}, {364}, {365}, {366}, {367}, {368}, {369}, {370}, {371}, {372}, {373}, {374}, {375}, {376}, {377}, {378}, {379}, {380}, {381}, {382}, {383}, {384}, {385}, {386}, {387}, {388}, {389}, {390}, {391}, {392}, {393}, {394}, {395}, {396}, {397}, {398}, {399}, {400}, {401}, {402}, {403}, {404}, {405}, {406}, {407}, {408}, {409}, {410}, {411}, {412}, {413}, {414}, {415}, {416}, {417}, {418}, {419}, {420}, {421}, {422}, {423}, {424}, {425}, {426}, {427}, {428}, {429}, {430}, {431}, {432}, {433}, {434}, {435}, {436}, {437}, {438}, {439}, {440}, {441}, {442}, {443}, {444}, {445}, {446}, {447}, {448}, {449}, {450}, {451}, {452}, {453}, {454}, {455}, {456}, {457}, {458}, {459}, {460}, {461}, {462}, {463}, {464}, {465}, {466}, {467}, {468}, {469}, {470}, {471}, {472}, {473}, {474}, {475}, {476}, {477}, {478}, {479}, {480}, {481}, {482}, {483}, {484}, {485}, {486}, {487}, {488}, {489}, {490}, {491}, {492}, {493}, {494}, {495}, {496}, {497}, {498}, {499}, {500}, {501}, {502}, {503}, {504}, {505}, {506}, {507}, {508}, {509}, {510}, {511}, {512}, {513}, {514}, {515}, {516}, {517}, {518}, {519}, {520}, {521}, {522}, {523}, {524}, {525}, {526}, {527}, {528}, {529}, {530}, {531}, {532}, {533}, {534}, {535}, {536}, {537}, {538}, {539}, {540}, {541}, {542}, {543}, {544}, {545}, {546}, {547}, {548}, {549}, {550}, {551}, {552}, {553}, {554}, {555}, {556}, {557}, {558}, {559}, {560}, {561}, {562}, {563}, {564}, {565}, {566}, {567}, {568}, {569}, {570}, {571}, {572}, {573}, {574}, {575}, {576}, {577}, {578}, {579}, {580}, {581}, {582}, {583}, {584}, {585}, {586}, {587}, {588}, {589}, {590}, {591}, {592}, {593}, {594}, {595}, {596}, {597}, {598}, {599}, {600}, {601}, {602}, {603}, {604}, {605}, {606}, {607}, {608}, {609}, {610}, {611}, {612}, {613}, {614}, {615}, {616}, {617}, {618}, {619}, {620}, {621}, {622}, {623}, {624}, {625}, {626}, {627}, {628}, {629}, {630}, {631}, {632}, {633}, {634}, {635}, {636}, {637}, {638}, {639}, {640}, {641}, {642}, {643}, {644}, {645}, {646}, {647}, {648}, {649}, {650}, {651}, {652}, {653}, {654}, {655}, {656}, {657}, {658}, {659}, {660}, {661}, {662}, {663}, {664}, {665}, {666}, {667}, {668}, {669}, {670}, {671}, {672}, {673}, {674}, {675}, {676}, {677}, {678}, {679}, {680}, {681}, {682}, {683}, {684}, {685}, {686}, {687}, {688}, {689}, {690}, {691}, {692}, {693}, {694}, {695}, {696}, {697}, {698}, {699}, {700}, {701}, {702}, {703}, {704}, {705}, {706}, {707}, {708}, {709}, {710}, {711}, {712}, {713}, {714}, {715}, {716}, {717}, {718}, {719}, {720}, {721}, {722}, {723}, {724}, {725}, {726}, {727}, {728}, {729}, {730}, {731}, {732}, {733}, {734}, {735}, {736}, {737}, {738}, {739}, {740}, {741}, {742}, {743}, {744}, {745}, {746}, {747}, {748}, {749}, {750}, {751}, {752}, {753}, {754}, {755}, {756}, {757}, {758}, {759}, {760}, {761}, {762}, {763}, {764}, {765}, {766}, {767}, {768}, {769}, {770}, {771}, {772}, {773}, {774}, {775}, {776}, {777}, {778}, {779}, {780}, {781}, {782}, {783}, {784}, {785}, {786}, {787}, {788}, {789}, {790}, {791}, {792}, {793}, {794}, {795}, {796}, {797}, {798}, {799}, {800}, {801}, {802}, {803}, {804}, {805}, {806}, {807}, {808}, {809}, {810}, {811}, {812}, {813}, {814}, {815}, {816}, {817}, {818}, {819}, {820}, {821}, {822}, {823}, {824}, {825}, {826}, {827}, {828}, {829}, {830}, {831}, {832}, {833}, {834}, {835}, {836}, {837}, {838}, {839}, {840}, {841}, {842}, {843}, {844}, {845}, {846}, {847}, {848}, {849}, {850}, {851}, {852}, {853}, {854}, {855}, {856}, {857}, {858}, {859}, {860}, {861}, {862}, {863}, {864}, {865}, {866}, {867}, {868}, {869}, {870}, {871}, {872}, {873}, {874}, {875}, {876}, {877}, {878}, {879}, {880}, {881}, {882}, {883}, {884}, {885}, {886}, {887}, {888}, {889}, {890}, {891}, {892}, {893}, {894}, {895}, {896}, {897}, {898}, {899}, {900}, {901}, {902}, {903}, {904}, {905}, {906}, {907}, {908}, {909}, {910}, {911}, {912}, {913}, {914}, {915}, {916}, {917}, {918}, {919}, {920}, {921}, {922}, {923}, {924}, {925}, {926}, {927}, {928}, {929}, {930}, {931}, {932}, {933}, {934}, {935}, {936}, {937}, {938}, {939}, {940}, {941}, {942}, {943}, {944}, {945}, {946}, {947}, {948}, {949}, {950}, {951}, {952}, {953}, {954}, {955}, {956}, {957}, {958}, {959}, {960}, {961}, {962}, {963}, {964}, {965}, {966}, {967}, {968}, {969}, {970}, {971}, {972}, {973}, {974}, {975}, {976}, {977}, {978}, {979}, {980}, {981}, {982}, {983}, {984}, {985}, {986}, {987}, {988}, {989}, {990}, {991}, {992}, {993}, {994}, {995}, {996}, {997}, {998}, {999}, {1000}	{3}	{4}	{5}	{6}	{7}	{8}	{9}	{10}	{11}
$\underline{x}(G^i)$	4	3	3	4	2	4	2	4	8				
$\bar{x}(G^i)$	7	9	6	7	6	6	5	5	11				

Таблица 2

Результаты работы алгоритма определения диапазонов значений  $c_1(v, x)$

$v$	$s$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$t$
$\underline{\beta}(v)$	0	3	1	3	5	7	6	10
$\bar{\beta}(v)$	0	4	3	5	6	9	7	10

Из соотношений (14) и (15) непосредственно следует, что справедливо

**Утверждение 2.** Для всех  $v \in V$

$$\underline{\beta}(v) = \max \{ \underline{c}(s, v), c^* - \bar{c}(v, t) \};$$

$$\bar{\beta}(v) = \min \{ \bar{c}(s, v), c^* - \underline{c}(v, t) \}.$$

**Утверждение 3.** Множество  $X \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $\underline{\beta}(v_2(e)) - \underline{\beta}(v_1(e)) \in [\underline{x}(e), \bar{x}(e)]$ .

Доказательство. Достаточность очевидна, поскольку в этом случае можно положить  $x = (\underline{\beta}(v_2(e)) - \underline{\beta}(v_1(e)), e \in E)$ . Тогда  $x \in X$ , поскольку  $c_k(v, x) = \underline{\beta}(v)$  и, следовательно,  $c_k(t, x) = c^*$ .

Докажем необходимость. Пусть граф  $G$  является последовательной композицией подграфов  $G^i = (V^i, E^i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и вершины  $v_i = t(G^i)$  – их стоки.

Покажем сначала, что  $\underline{\beta}(v_i) - \underline{\beta}(s) \in [\underline{c}(s, v_i), \bar{c}(s, v_i)]$  и  $\underline{\beta}(t) - \underline{\beta}(v_i) \in [\underline{c}(v_i, t), \bar{c}(v_i, t)]$  для всех  $i = 1, \dots, m$ .

Если  $\underline{\beta}(v_i) = \underline{c}(s, v_i)$ , то  $\underline{\beta}(v_i) - \underline{\beta}(s) = \underline{c}(s, v_i) \leq \bar{c}(s, v_i)$  и  $\underline{\beta}(t) - \underline{\beta}(v_i) = c^* - \underline{c}(s, v_i) \geq \underline{c}(s, t) - \underline{c}(s, v_i) = \underline{c}(s, v_i) + \underline{c}(v_i, t) - \underline{c}(s, v_i) = \underline{c}(v_i, t) \leq \bar{c}(v_i, t)$  в силу утверждения 2.

Пусть  $\underline{\beta}(v_i) = c^* - \bar{c}(v_i, t) > \underline{c}(s, v_i)$ . Тогда  $\underline{\beta}(t) - \underline{\beta}(v_i) = c^* - c^* + \bar{c}(v_i, t) = \bar{c}(v_i, t) \geq \underline{c}(v_i, t)$  и  $\underline{\beta}(v_i) - \underline{\beta}(s) = c^* - \bar{c}(v_i, t) \leq \bar{c}(s, t) - \bar{c}(v_i, t) = \bar{c}(s, v_i) + \bar{c}(v_i, t) - \bar{c}(v_i, t) = \bar{c}(s, v_i)$ .

Рассмотрим теперь вершины  $v_i$  и  $v_{i+1}$ . Возможны следующие ситуации:

а) если  $\underline{\beta}(v_i) = \underline{c}(s, v_i)$ ,  $\underline{\beta}(v_{i+1}) = \underline{c}(s, v_{i+1})$ , то  $\underline{\beta}(v_{i+1}) - \underline{\beta}(v_i) = \underline{c}(s, v_{i+1}) - \underline{c}(s, v_i) = \underline{c}(v_i, v_{i+1}) \leq \bar{c}(v_i, v_{i+1})$ ;

б) если  $\underline{\beta}(v_i) = c^* - \bar{c}(v_i, t)$ ,  $\underline{\beta}(v_{i+1}) = c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t)$ , то  $\underline{\beta}(v_{i+1}) - \underline{\beta}(v_i) = c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t) - c^* + \bar{c}(v_i, t) = \bar{c}(v_i, v_{i+1}) \geq \underline{c}(v_i, v_{i+1})$ ;

в) если  $\underline{\beta}(v_i) = \underline{c}(s, v_i)$ ,  $\underline{\beta}(v_{i+1}) = c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t)$ , то  $\underline{\beta}(v_{i+1}) - \underline{\beta}(v_i) = c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t) - \underline{c}(s, v_i) \geq \underline{c}(s, v_{i+1}) - \underline{c}(s, v_i) = \underline{c}(v_i, v_{i+1})$ . С другой стороны,  $\underline{\beta}(v_{i+1}) - \underline{\beta}(v_i) = c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t) - \underline{c}(s, v_i) \leq c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t) - c^* + \bar{c}(v_i, t) = \bar{c}(v_i, v_{i+1})$ ;

г)  $\underline{\beta}(v_i) = c^* - \bar{c}(v_i, t) > \underline{c}(s, v_i)$ ,  $\underline{\beta}(v_{i+1}) = \underline{c}(s, v_{i+1}) > c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t)$ . Данный случай невозможен, поскольку тогда одновременно  $\underline{\beta}(v_{i+1}) - \underline{\beta}(v_i) = \underline{c}(s, v_{i+1}) - c^* + \bar{c}(v_i, t) > c^* - \bar{c}(v_{i+1}, t) - c^* + \bar{c}(v_i, t) = \bar{c}(v_i, v_{i+1})$  и  $\underline{\beta}(v_{i+1}) - \underline{\beta}(v_i) = \underline{c}(s, v_{i+1}) - c^* + \bar{c}(v_i, t) < \underline{c}(s, v_{i+1}) - \underline{c}(s, v_i) = \underline{c}(v_i, v_{i+1})$ .

Таким образом, исходная задача разбивается на  $m$  независимых подзадач того же класса для подграфов  $G^i = (V^i, E^i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , являющихся компонентами последовательного разложения

графа  $G$ , со значениями  $(c^*)^i = \underline{\beta}(t(G^i)) - \underline{\beta}(s(G^i))$  соответственно. Заметим также, что  $\sum_{i=1}^m (c^*)^i = c^*$ ,

т. е. если векторы  $x^i(e)$ ,  $e \in E^i$ , удовлетворяют условию (8) для  $(c^*)^i$ , то вектор  $x(e)$ , являющийся объединением векторов  $x^i(e)$ , принадлежит  $X$ .

Поскольку граф  $G$  является ПП-орграфом, то, продолжая этот процесс до конца (пока подграфы  $G^i$  не станут дугами), получим, что  $\beta(v_2(e)) - \beta(v_1(e)) \in [\underline{c}(v_1(e), v_2(e)), \bar{c}(v_1(e), v_2(e))]$  для любой дуги  $e \in E$ . Поскольку  $X \neq \emptyset$ , то в силу утверждения 1  $\underline{c}(v_1(e), v_2(e)) \leq \bar{c}(v_1(e), v_2(e))$  и, следовательно,  $\beta(v_2(e)) - \beta(v_1(e)) \in [\underline{x}(e), \bar{x}(e)]$ . Утверждение полностью доказано. ■

Аналогичным образом показывается, что справедливо

**Утверждение 4.** Множество  $X \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $\bar{\beta}(v_2(e)) - \bar{\beta}(v_1(e)) \in [\underline{x}(e), \bar{x}(e)]$ .

Более того, непосредственно из соотношений (14), (15) и строгой монотонности операции « $\rightarrow$ » следует

**Утверждение 5.** Если  $X \neq \emptyset$ , то  $\beta(v) = \min\{c_1(v, x) | x \in X\}$  и  $\bar{\beta}(v) = \max\{c_1(v, x) | x \in X\}$  для любых  $v \in V$ , причем существуют единственные векторы  $x^{min} \in X$  и  $x^{max} \in X$ , такие, что  $\beta(v) = c_1(v, x^{min})$  и  $\bar{\beta}(v) = c_1(v, x^{max})$ .

В свою очередь, из утверждения 5 вытекает

**Следствие 1.** Если  $X \neq \emptyset$ , то  $\beta(v) \leq \bar{\beta}(v)$  для всех  $v \in V$ .

## 2. Общая декомпозиционная схема решения

В силу предыдущих утверждений задача (7)–(11) эквивалентна задаче

$$g(x, p) = \bigoplus_{e \in E} M_e(c_1(v_1(e), x), c_1(v_2(e), x) - c_1(v_1(e), x), p(e)) \bigoplus \bigoplus_{v \in V} M_v(c_1(v, x)) \rightarrow \min; \quad (16)$$

$$c_1(t, x) = c^*; \quad (17)$$

$$c_1(v, x) \in [\beta(v), \bar{\beta}(v)], v \in V \setminus \{s, t\}; \quad (18)$$

$$c_1(v_2(e), x) - c_1(v_1(e), x) \in [\underline{x}(e), \bar{x}(e)], e \in E; \quad (19)$$

$$\Phi_G(p) \geq P_0; \quad (20)$$

$$p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)], e \in E. \quad (21)$$

Для решения задачи (16)–(21) можно эффективно использовать метод фрагментарной параметрической декомпозиции [2]. Введем в качестве дополнительных переменных параметры  $y(v) = c_1(v, x)$  для всех  $v \in V$ . Тогда параметризованная задача  $\mathbf{C}$  получается из исходной задачи заменой в соотношениях (16)–(21) фрагментов  $c_1(v, x)$  параметрами  $y(v)$ . Для выбранной схемы параметризации естественным образом выполняются достаточные условия [2], при которых описанная декомпозиционная схема обеспечивает получение решения исходной задачи.

В результате задача (16)–(21) преобразуется в параметризованную задачу  $\mathbf{C}$  отыскания наборов  $(y(v), v \in V)$  и  $(p(e), e \in E)$ , удовлетворяющих следующей системе соотношений:

$$F(y, p) = \bigoplus_{e \in E} M_e^*(y(v_1(e)), y(v_2(e)), p(e)) \bigoplus \bigoplus_{v \in V} M_v^*(y(v)) \rightarrow \min; \quad (22)$$

$$y(v_1(e)) + \underline{x}(e) \leq y(v_2(e)), e \in E; \quad (23)$$

$$y(v_1(e)) + \bar{x}(e) \geq y(v_2(e)), e \in E; \quad (24)$$

$$y(v) \in [\beta(v), \bar{\beta}(v)], v \in V \setminus \{s, t\}; \quad (25)$$

$$y(s) = 0, y(t) = c^*; \quad (26)$$

$$\Phi_G(p) \geq P_0; \quad (27)$$

$$p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)], e \in E, \quad (28)$$

где  $M_e^*(y(v_1(e)), y(v_2(e)), p(e)) = M_e(y(v_1(e)), y(v_2(e)) - y(v_1(e)), p(e))$ .

### 3. Методы решения параметризованной задачи

Будем предполагать далее, что в множестве  $R_3$  существуют нейтральные элементы  $1(\otimes)$  и  $1(\circ)$  для операций  $\otimes$  и  $\circ$  соответственно, т. е.  $a \otimes 1(\otimes) = a$  и  $a \circ 1(\circ) = a$  для любого  $a \in R_3$ . Напомним, что функция  $\Phi$  определяется операциями  $\otimes$  и  $\circ$  рекуррентным способом в соответствии с деревом декомпозиции графа  $G$ .

Предлагаемые методы решения задачи **C** базируются на использовании этих свойств функции  $\Phi$ , а также свойств операций  $+$ ,  $\oplus$ ,  $\otimes$  и  $\circ$ , позволяющих получить решение задачи **C** с помощью рекурсивной процедуры. Каждый шаг этой процедуры соответствует некоторому уровню дерева декомпозиции графа  $G$ .

Рассмотрим основные шаги этой декомпозиционной процедуры более детально, начиная с последовательной декомпозиции.

Пусть исходный граф  $G$  является последовательной композицией подграфов  $G_k = (V_k, E_k)$  и  $v_{k-1} = s(G_{k-1})$ ,  $v_k = t(G_{k-1})$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Для  $k = 1, \dots, m$  положим

$$\begin{aligned} \underline{\pi}_k &= \max \left[ \bigotimes_{j=1}^k \Phi_{G_j}(\underline{p}), \min \left\{ a \in R_3 \mid a \otimes \bigotimes_{j=k+1}^m \Phi_{G_j}(\bar{p}) \geq P_0 \right\} \right]; \\ \bar{\pi}_k &= \min \left[ \bigotimes_{j=1}^k \Phi_{G_j}(\bar{p}), \max \left\{ a \in R_3 \mid a \otimes \bigotimes_{j=k+1}^m \Phi_{G_j}(\underline{p}) \geq P_0 \right\} \right]; \\ \underline{\pi}_0 &= \bar{\pi}_0 = 1(\otimes), \underline{\pi}_{m+1} = \max \left[ \bigotimes_{j=1}^{m+1} \Phi_{G_j}(\underline{p}), P_0 \right] \text{ и } \bar{\pi}_{m+1} = \bigotimes_{j=1}^{m+1} \Phi_{G_j}(\bar{p}). \end{aligned}$$

Для любого вектора  $p \in \mathbf{P}$  определим набор  $\pi(p) = (\pi_0(p), \pi_1(p), \dots, \pi_m(p))$ , такой что  $\pi_0(p) = 1(\otimes)$  и  $\pi_k(p) = \bigotimes_{j=1}^k \Phi_{G_j}(p)$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Пусть  $\Pi = \{\pi(p) \mid p \in \mathbf{P}\}$ . Справедливо следующее

**Утверждение 6.**  $\Pi = \{(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m) \mid \pi_k \in [\underline{\pi}_k, \bar{\pi}_k], k = 0, \dots, m, \pi_{k-1} \otimes \Phi_{G_k}(\underline{p}) \leq \pi_k \text{ и } \pi_{k-1} \otimes \Phi_{G_k}(\bar{p}) \geq \pi_k, k = 1, \dots, m\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $p \in \mathbf{P}$ . Покажем, что  $\pi(p) \in \Pi$ . Поскольку по определению  $\pi_k(p) = \pi_{k-1}(p) \otimes \Phi_{G_k}(p)$  и  $p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)]$  для всех  $e \in E_k$ , то  $\pi_{k-1}(p) \otimes \Phi_{G_k}(\underline{p}) \leq \pi_k$  и  $\pi_{k-1}(p) \otimes \Phi_{G_k}(\bar{p}) \geq \pi_k$  для  $k = 1, \dots, m$  в силу неубывания операции  $\otimes$ . Осталось показать, что  $\pi_k(p) \in [\underline{\pi}_k, \bar{\pi}_k]$ . По определению  $\pi_0(p) = \underline{\pi}_0 = \bar{\pi}_0$ .

В силу свойств операции  $\otimes$  следует, что  $\bigotimes_{j=1}^k \Phi_{G_j}(\underline{p}) \leq \pi_k(p) \leq \bigotimes_{j=1}^k \Phi_{G_j}(\bar{p})$  для  $k = 1, \dots, m$ .

Предположим от противного, что  $\pi_k(p) < \underline{\pi}_k$ . Это означает, что  $\pi_k(p) < \min \left\{ a \in R_3 \mid a \otimes \bigotimes_{j=k+1}^m \Phi_{G_j}(\bar{p}) \geq P_0 \right\}$  и, следовательно,  $\pi_k(p) \otimes \bigotimes_{j=k+1}^m \Phi_{G_j}(\bar{p}) < P_0$ . Тогда

$\Phi_G(p) = \pi_m(p) = \bigotimes_{j=1}^m \Phi_{G_j}(p) = \bigotimes_{j=1}^k \Phi_{G_j}(p) \otimes \bigotimes_{j=k+1}^m \Phi_{G_j}(p) \leq \pi_k(p) \otimes \bigotimes_{j=k+1}^m \Phi_{G_j}(\bar{p}) < P_0$ , т. е. для век-

тора  $p$  не выполняется условие (27). Аналогичным образом показывается, что  $\pi_k(p) \leq \bar{\pi}_k$ .

С другой стороны, для любого набора  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m) \in \Pi$  построим вектор  $p(\pi)$  с компонентами  $p(\pi, E_k) = \min \{a \in R_3 | \pi_k \geq \pi_{k-1} \otimes a, a \in [\Phi_{G_j}(\underline{p}), \Phi_{G_j}(\bar{p})]\}$  для  $k=1, \dots, m$ . Такой вектор существует, поскольку  $\pi_{k-1} \otimes \Phi_{G_j}(\underline{p}) \leq \pi_k$  и  $\pi_{k-1} \otimes \Phi_{G_j}(\bar{p}) \geq \pi_k$ . Кроме того,  $\Phi_G(p(\pi)) = \pi_m \geq P_0$ . ■

Поскольку значения функций  $M_s^*(y(s))$  и  $M_t^*(y(t))$  одни и те же для любых допустимых значений вектора  $y$ , задача С может быть представлена в виде

$$\bigoplus_{k=1}^m F_k^*(y(v_{k-1}), y(v_k), \pi_{k-1}, \pi_k) \oplus \bigoplus_{k=1}^{m-1} M_{v_k}^*(y(v_k)) \rightarrow \min; \quad (29)$$

$$y(v_k) \in [\underline{\beta}(v), \bar{\beta}(v)], k=1, \dots, m-1; \quad (30)$$

$$y(v_0) = 0; \quad (31)$$

$$y(v_m) = c^*; \quad (32)$$

$$\pi \in \Pi, \quad (33)$$

где значения функции  $F_k^*(y', y'', \pi', \pi'')$  определяются в результате решения следующей задачи  $C_k(y', y'', \pi', \pi'')$  при фиксированных значениях параметров  $y', y'', \pi'$  и  $\pi''$ :

$$\bigoplus_{e \in E_k} M_e^*(y(v_1(e)), y(v_2(e)), p(e)) \oplus \bigoplus_{v \in V_k \setminus \{v_{k-1}, v_k\}} M_v^*(y(v)) \rightarrow \min; \quad (34)$$

$$y(v_1(e)) + \underline{x}(e) \leq y(v_2(e)), e \in E_k; \quad (35)$$

$$y(v_1(e)) + \bar{x}(e) \geq y(v_2(e)), e \in E_k; \quad (36)$$

$$y(v) \in [\underline{\beta}(v), \bar{\beta}(v)], v \in V_k \setminus \{v_{k-1}, v_k\}; \quad (37)$$

$$y(v_{k-1}) = y', y(v_k) = y''; \quad (38)$$

$$\Phi_{G_k}(p) \geq \min \{a \in R_3 | \pi' \otimes a \geq \pi''\}; \quad (39)$$

$$p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)], e \in E_k. \quad (40)$$

Предполагается, что функция  $F_k^*(y', y'', \pi', \pi'')$  принимает достаточно большое значение, если ограничения (35)–(38) несовместны. Как и в случае исходной задачи, совместность этих ограничений может быть установлена с помощью алгоритма определения диапазонов значений  $c_1(v, x)$ .

Таким образом, решение задачи (34)–(40) может быть получено с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\mathfrak{I}_k(y', \pi') = M_{v_k}^*(y') \oplus \min \{ \mathfrak{I}_{k-1}(y'', \pi'') \oplus M_{e_k}^*(y'', y', a) | y'' \in [\underline{\beta}(v_{k-1}), \bar{\beta}(v_{k-1})],$$

$$y' \in [y'' + \underline{x}(e_k), y'' + \bar{x}(e_k)], \pi'' \in [\underline{\pi}_{k-1}, \bar{\pi}_{k-1}], \pi'' \otimes a \geq \pi', a \in [\Phi_{G_j}(\underline{p}), \Phi_{G_j}(\bar{p})] \}, k=1, \dots, m, \quad (41)$$

где  $\mathfrak{I}_0(y_0, \pi_0) = 0$ .

При этом целесообразно ввести дополнительные ограничения

$$y(v_{k-1}) + \underline{\varepsilon}_k \leq y(v_k), \quad k=1, \dots, m+1; \quad (42)$$

$$y(v_{k-1}) + \bar{\varepsilon}_k \geq y(v_k), \quad k=1, \dots, m+1, \quad (43)$$

где

$$\underline{\varepsilon}_k = \max \left\{ \sum_{e \in L_k(v_{i-1}, v_i)} \underline{x}(e) \mid i=1, \dots, r(v_{k-1}, v_k) \right\}; \quad (44)$$

$$\bar{\varepsilon}_k = \min \left\{ \sum_{e \in L_k(v_{i-1}, v_i)} \bar{x}(e) \mid i=1, \dots, r(v_{k-1}, v_k) \right\}. \quad (45)$$

Значения  $\underline{\varepsilon}_i$  и  $\bar{\varepsilon}_i$ ,  $i=1, \dots, m+1$ , могут быть легко найдены с помощью алгоритмов, аналогичных алгоритмов поиска кратчайшего пути в ациклическом орграфе. Справедливо следующее

**Утверждение 7.** Если значения  $y(v_{i-1})=y'$  и  $y(v_i)=y''$  являются компонентами некоторого вектора  $y$  из области  $\mathbf{Y}$  возможных значений задачи  $\mathbf{C}$ , то  $y' + \underline{\varepsilon}_i \leq y''$  и  $y' + \bar{\varepsilon}_i \geq y''$ .

Доказательство. Предположим противное, т. е. для некоторого вектора  $y \in \mathbf{Y}$  существуют компоненты  $y(v_{i-1})=y'$  и  $y(v_i)=y''$ , такие, что  $y' + \underline{\varepsilon}_i > y''$ . В силу соотношения (44) существует путь, скажем  $L_k(v_{i-1}, v_i)$ , из вершины  $v_{i-1}$  в вершину  $v_i$ , для которого  $\underline{\varepsilon}_i = \sum_{e \in L_k(v_{i-1}, v_i)} \underline{x}(e)$ .

Поскольку при сделанном предположении  $y' + \underline{\varepsilon}_i > y''$ , то в силу строгой монотонности операции «+» немедленно получаем, что  $y(v_1(e)) + \underline{x}(e) > y(v_2(e))$  для некоторой дуги  $e$ , принадлежащей пути  $L_k(v_{i-1}, v_i)$ . Аналогично показывается и справедливость второго неравенства. ■

Для конкретных задач вместо всего множества  $\Pi$  можно рассматривать его некоторое подмножество. Так, для задачи с функцией  $\Phi$ , определяемой соотношением (4), можно положить  $\underline{p}_0 = \bar{p}_0 = \max \{ \bar{p}(e) \mid e \in E \}$ ,  $\underline{p}_k = \bar{p}_k = \max [P_0, \min \{ \underline{p}(e) \mid e \in E_j, j=1, \dots, k \}]$  для  $k=1, \dots, m$ , а в

случае соотношений (5) и (6) –  $\underline{p}_0 = \bar{p}_0 = 1$ ,  $\underline{p}_k = \max \left[ \prod_{j=1}^k \prod_{e \in E_j} \underline{p}(e), \frac{\bar{P}_0}{\prod_{j=k+1}^m \prod_{e \in E_j} \bar{p}(e)} \right]$ ,

$$\bar{p}_k = \min \left[ \prod_{j=1}^k \prod_{e \in E_j} \bar{p}(e), \frac{\bar{P}_0}{\prod_{j=k+1}^m \prod_{e \in E_j} \underline{p}(e)} \right] \text{ для } k=1, \dots, m-1, \underline{p}_m = \bar{p}_m = \bar{P}_0, \text{ где } \bar{P}_0 = \max \left[ \prod_{j=1}^m \prod_{e \in E_j} \underline{p}(e), P_0 \right].$$

Задача (34)–(40) для каждого подграфа  $G_k$ ,  $k=1, \dots, m$ , аналогична исходной задаче, но имеет меньшую размерность. Поскольку исходный граф  $G$  является последовательно-параллельным, его подграф  $G_k$  является либо параллельно разложимым, либо состоит из единственной дуги между вершинами  $v_{k-1}$  и  $v_k$ . В последнем случае  $F_k^*(y', y'', \pi', \pi'') = M_e^*(y', y'', p^*(e))$ , где  $p^*(e) = \min \{ p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)] \mid \pi' \otimes p \geq \pi'' \}$ .

Пусть граф  $G_k$  параллельно разложим на подграфы  $G_{kj} = (V_{kj}, E_{kj})$ ,  $j=1, \dots, l_k$ .

Обозначим через  $\otimes_{\min}(\pi', \pi'') = \min \{ a \in R_3 \mid \pi' \otimes a \geq \pi'' \}$  и положим для  $i=1, \dots, l=l_k$

$$\underline{\theta}_i = \max \left[ \prod_{j=1}^i \Phi_{G_{kj}}(\underline{p}), \min \left\{ a \in R_3 \mid a \circ \prod_{j=i+1}^l \Phi_{G_{kj}}(\bar{p}) \geq \otimes_{\min}(\pi', \pi'') \right\} \right];$$

$$\bar{\theta}_i = \min \left[ \bigcirc_{j=1}^i \Phi_{G_{kj}}(\bar{p}), \max \left\{ a \in R_3 \mid \otimes_{\min}(\pi', \pi'') \leq a \circ \bigcirc_{j=i+1}^l \Phi_{G_{kj}}(\underline{p}) \leq \bigcirc_{j=1}^l \Phi_{G_{kj}}(\bar{p}) \right\} \right];$$

$$\underline{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 = 0(\circ), \underline{\theta}_i = \max \left[ \bigcirc_{j=1}^l \Phi_{G_{kj}}(\underline{p}), \otimes_{\min}(\pi', \pi'') \right] \text{ и } \bar{\theta}_i = \bigcirc_{j=1}^l \Phi_{G_{kj}}(\bar{p}).$$

Пусть  $\Theta$  – множество таких наборов  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_l)$ , что  $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$  для  $i=0, \dots, l$ ,  $\theta_{i-1} \circ \Phi_{G_{ki}}(\underline{p}) \leq \theta_i$  и  $\theta_{i-1} \circ \Phi_{G_{ki}}(\bar{p}) \geq \theta_i$  для  $i=1, \dots, l$ . Как и ранее, нетрудно показать, что каждому вектору  $p_k = (p(e), e \in E_k)$ , удовлетворяющему условиям (39) и (40), соответствует вектор  $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_l) \in \Theta$ , такой, что  $\theta_i = \bigcirc_{j=1}^i \Phi_{G_{kj}}(\underline{p})$  для  $i=1, \dots, l$ .

Тогда вычисление значения функции  $F_k^*(y', y'', \pi', \pi'')$  при фиксированных значениях ее аргументов сводится к решению следующей задачи:

$$\bigoplus_{i=1}^l F_{ki}^*(y', y'', \theta_{i-1}, \theta_i) \rightarrow \min, \quad (46)$$

$$\theta \in \Theta, \quad (47)$$

где значения  $F_{ki}^*(y', y'', \theta_{i-1}, \theta_i)$  соответствуют минимальному значению функции

$$\bigoplus_{e \in E_{ki}} M_e^*(y(v_1(e)), y(v_2(e)), p(e)) \bigoplus_{v \in V_{ki} \setminus \{v_{k-1}, v_k\}} \bigoplus M_v^*(y(v)) \quad (48)$$

при выполнении ограничений

$$y(v_1(e)) + \underline{x}(e) \leq y(v_2(e)), \quad e \in E_{ki}; \quad (49)$$

$$y(v_1(e)) + \bar{x}(e) \geq y(v_2(e)), \quad e \in E_{ki}; \quad (50)$$

$$y(v) \in [\underline{\beta}(v), \bar{\beta}(v)], \quad v \in V_{ki} \setminus \{v_{k-1}, v_k\}; \quad (51)$$

$$y(v_{k-1}) = y', \quad y(v_k) = y''; \quad (52)$$

$$\Phi_{G_{ki}}(\underline{p}) \geq \min \{ a \in R_3 \mid \theta_{i-1} \circ a \geq \theta_i \}; \quad (53)$$

$$p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)], \quad e \in E_{ki}. \quad (54)$$

Пусть  $f_{ki}(\theta_i)$  – наименьшее значение функции  $\bigoplus_{j=1}^i F_{kj}^*(y', y'', \theta_{j-1}, \theta_j)$  по всем таким наборам  $(p(e) \mid e \in E_{kj})$ , что  $p(e) \in [\underline{p}(e), \bar{p}(e)]$  и  $\bigcirc_{j=1}^i \Phi_{G_{kj}}(\underline{p}) \geq \theta_i$ . Значение функции  $F_k^*(y', y'', \pi', \pi'') = f_{kl}(\otimes_{\min}(\pi', \pi''))$  может быть получено из следующего рекуррентного соотношения:

$$f_{ki}(\theta_i) = \min \{ f_{ki-1}(\theta_{i-1}) \bigoplus F_{ki}^*(y', y'', \theta_{i-1}, \theta_i) \mid \theta_{i-1} \in [\underline{\theta}_{i-1}, \bar{\theta}_{i-1}], \theta_{i-1} \circ \Phi_{G_{ki}}(\underline{p}) \geq \theta_i, \theta_{i-1} \circ \Phi_{G_{ki}}(\bar{p}) \leq \theta_i \}, \quad i=1, \dots, l, \quad (55)$$

где  $\theta_0 = 1(\circ)$  и  $f_{k0}(\theta_0) = 1(\oplus)$ .

При решении конкретных задач (46), (47) вместо множества  $\Theta$  можно рассматривать его некоторое подмножество. Видно, что для задачи с функцией  $\Phi$ , определяемой соотношением (4), можно положить  $\underline{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 = W$ ,  $\underline{\theta}_i = \bar{\theta}_i = \max[\pi'', \min\{p(e) | e \in E_{kj}, j=1, \dots, i\}]$  для  $i=1, \dots, l_k$ ,

в случае соотношения (5) –  $\underline{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 = 1$ ,  $\underline{\theta}_i = \max \left[ \prod_{j=1}^i \prod_{e \in E_{kj}} p(e), \frac{\pi''/\pi'}{\prod_{j=i+1}^{l_k} \prod_{e \in E_{kj}} \bar{p}(e)} \right]$ ,

$\bar{\theta}_i = \min \left[ \prod_{j=i+1}^{l_k} \prod_{e \in E_{kj}} \bar{p}(e), \frac{\pi''/\pi'}{\prod_{j=1}^i \prod_{e \in E_{kj}} p(e)} \right]$  для  $i=1, \dots, l_k-1$ ,  $\underline{\theta}_{l_k} = \bar{\theta}_{l_k} = \pi''/\pi'$ , а в случае соотношения (6) –

$\underline{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 = W$ ,  $\underline{\theta}_i = \bar{\theta}_i = \max[\min\{\Phi_{G_{kj}}(p) | j=1, \dots, i\}, \pi''/\pi']$  для  $i=1, \dots, l_k$ , где  $W$  – достаточно большое число. Так как задача (46), (47) решается при фиксированных значениях  $u'$  и  $u''$ , то в случае соотношений (4) и (6) ее решение может быть получено в результате решения серии независимых подзадач.

Поскольку каждый из подграфов  $G_{kj}, j=1, \dots, l$ , в свою очередь, является последовательно-параллельным, то к его подграфам также применимы рассмотренные методы решения возникающих подзадач.

Таким образом, решение исходной задачи  $S$  может быть получено в результате применения рекурсивной процедуры последовательно-параллельной декомпозиции, на каждом шаге которой получаемая подзадача решается алгоритмами динамического программирования. Следует отметить, что в общем случае на шаге последовательной декомпозиции алгоритм динамического программирования работает в двухмерном пространстве состояний, а на шаге параллельной декомпозиции – только в одномерном.

Следует отметить, что требование существования нейтральных элементов  $1(\otimes)$  и  $1(\circ)$  не является обязательным. Оно только позволяет упростить изложение материала, поскольку в противном случае необходимо было бы выделять задачи для подграфов  $G_1$  и  $G_{k1}$ .

### Заключение

В статье предложена декомпозиционная схема решения задачи оптимизации параметров технических систем с последовательно-параллельной структурой, в которой целевая функция представляет собой общую сумму «весов» дуг и вершин орграфа. Разработаны алгоритмы проверки совместности ограничений, базирующиеся на представлении последовательно-параллельных орграфов в виде его дерева декомпозиции. Показано, что для решения получаемых подзадач могут быть использованы методы динамического программирования.

### Список литературы

1. Гушинский, Н.Н. Поддержка принятия решений при проектировании силовых трансмиссий / Н.Н. Гушинский, Г.М. Левин, А.Б. Долгий. – Минск : Белорусская наука, 2006. – 262 с.
2. Левин, Г.М. Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений / Г.М. Левин, В.С. Танаев. – Минск : Наука и техника, 1978. – 240 с.
3. Лепин, В.В. Алгоритмы для нахождения мультикликковой и бикликковой степени последовательно-параллельного графа / В.В. Лепин // Тр. И-та матем. – 2010. – Т. 18, № 2. – С. 60–78.
4. Eppstein, D. Parallel recognition of series-parallel graphs / D. Eppstein // Information and Computation. – 1992. – Vol. 98. – P. 41–55.

5. Schoenmakers, B. A new algorithm for the recognition of series parallel graphs / B. Schoenmakers // Technical report, No. CS-59504 / Centrum voor Wiskunde en Informatica. – Amsterdam, The Netherlands [Electronic resource]. – 1995. – Mode of access : <http://www.cwi.nl/ftp/CWIreports/AA/CS-R9504.ps.Z>. – Date of access : 22.09.2012.

**Поступила 21.06.2012**

*Объединенный институт проблем  
информатики НАН Беларуси,  
Минск, Сурганова, 6  
e-mail: gyshin@newman.bas-net.by*

**N.N. Guschinsky**

**DECOMPOSITION APPROACH TO OPTIMIZE  
ARC PARAMETERS OF SERIES-PARALLEL DIGRAPHS**

An optimization problem of engineering systems is considered. It is supposed that system structure has been already defined and it can be presented by series-parallel digraphs. Each arc of the digraph is assigned design parameters of the system and its operation conditions are modeled by equality and inequality constraints on monotone functions of design parameters. The objective function is quasi-separable and depends both on arc parameters and their total values.