

ISSN 1816-0301 (print)
УДК 004.31

Поступила в редакцию 30.01.2018
Received 30.01.2018

Е. В. Рыбенков, Н. А. Петровский

*Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

СИНТЕЗ FPGA-АРХИТЕКТУР БАНКОВ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ БЛОЧНОЙ ЛЕСТНИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ В АЛГЕБРЕ КВАТЕРНИОНОВ (ЧАСТЬ 1)

Аннотация. В настоящее время методологии проектирования систем на кристалле основываются на высокопараметризованных IP-компонентах (IP – intellectual property), которые для конкретного целевого приложения обеспечивают широкий диапазон регулировки затрат ресурсов, форматов данных арифметики с фиксированной запятой и производительности системы. В статье представлен систематический подход к синтезу FPGA-архитектур целочисленных обратимых параунитарных банков фильтров в алгебре кватернионов (Int-Q-ПУБФ) для трансформационного кодирования изображений по схеме L2L (lossless-to-lossy). Показывается, что базовым элементарным преобразованием банка фильтров является операция умножения кватернионов (Q-MUL). Блочная лестничная факторизация данной операции и распределенная арифметика на сумматорах положены в основу параметризуемого Q-MUL IP-компонента.

Ключевые слова: схема lossless-to-lossy, кватернионы, компрессия изображений, FPGA, банк фильтров, блочная лестничная факторизация

Для цитирования. Рыбенков, Е. В. Синтез FPGA-архитектур банков фильтров на основе блочной лестничной факторизации в алгебре кватернионов (часть 1) / Е. В. Рыбенков, Н. А. Петровский // Информатика. – 2018. – Т. 15, № 2. – С. 29–44.

E. V. Rybenkov, N. A. Petrovsky

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

SYNTHESIS OF FPGA ARCHITECTURES OF BLOCK LIFTING-BASED FILTER BANKS IN QUATERNION ALGEBRA (PART 1)

Abstract. Nowadays the methodology for designing systems on a chip is based on highly parameterized IP components which provide a wide range of adjustment of costs in resources, fixed point arithmetic data formats and system performance for a specific target application. The article presents a systematic approach for synthesizing FPGA architectures of integer reversible paraunitary filter banks in quaternion algebra (Int-Q-PUBB) for L2L (lossless-to-lossy) image transformed encoding. It is shown that the basic elementary transformation of the filter bank is the operation of quaternion multiplication (Q-MUL), the block-lifting factorization of which and the distributed arithmetic on the adder are the basis of the parametrizable Q-MUL IP-component.

Keywords: lossless-to-lossy, quaternions, image compression, FPGA, filter bank, block-lifting factorization

For citation. Rybenkov E. V., Petrovsky N. A. Synthesis of FPGA architectures of block lifting-based filter banks in quaternion algebra (part 1). *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 2, pp. 29–44 (in Russian).

Введение. В последние несколько десятилетий банки фильтров рассматриваются как наиболее эффективная техника компрессии мультимедиаданных. Они применяются в кодировании аудиосигналов, изображений и видеопотока в таких стандартах, как JPEG, JPEG2000, JPEG XR, MPEG и H.264/AVC [1]. Схема максимально децимированного M -канального банка фильтров состоит из систем анализа и синтеза, полифазная структура которых формулируется следующим образом [2, 3]:

$$\begin{aligned} [H_0(z) \ H_1(z) \ \dots \ H_{M-1}(z)]^T &= \mathbf{E}(z^M)\mathbf{e}(z)^T; \\ [F_0(z) \ F_1(z) \ \dots \ F_{M-1}(z)]^T &= \mathbf{e}(z)\mathbf{D}(z^M), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{e}(z) = [1 \ z^{-1} \ \dots \ z^{-(M-1)}]$, $H_k(z)$ и $F_k(z)$ – передаточные функции k -го канала банка фильтров анализа и синтеза соответственно; T (в степени) – знак транспонирования матрицы. Если матрица $\mathbf{E}(z)$ обратима, то полифазная матрица синтеза $\mathbf{D}(z)$ может быть выбрана как обратная матрица $\mathbf{E}(z)$, тогда достигается перфективная реконструкция:

$$\mathbf{D}(z)\mathbf{E}(z) = bz^{-l}\mathbf{I}, \quad b \neq 0, \quad l \geq 0. \quad (2)$$

Такой банк фильтров называется банком фильтров с перфективной реконструкцией входного сигнала или *биортогональным банком фильтров* (БОБФ). Если справедливо

$$\mathbf{E}^T(z^{-1})\mathbf{E}(z) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}(z) = \mathbf{E}^T(z^{-1}), \quad (3)$$

то банк фильтров относится к специальному классу *параунитарных банков фильтров* (ПУБФ). Если длина импульсной характеристики фильтра прототипа больше числа каналов, то компоненты данных полифазных матриц являются полиномами переменной z . Двухканальный банк фильтров ($M = 2$) – это дискретное вейвлет-преобразование. Когда длина импульсной характеристики фильтра прототипа равна числу каналов M , полифазные матрицы $\mathbf{E}(z)$ и $\mathbf{D}(z)$ образуются из полиномов нулевого порядка – скалярных величин, тогда полифазные матрицы становятся эквивалентными стандартным преобразованиям. Например, восьмиканальный ($M = 8$) максимально децимированный ПУБФ ассоциируется с другим преобразованием, широко используемым в трансформационном кодировании изображений в стандарте JPEG, – дискретным косинусным преобразованием (ДКП).

Особый интерес в настоящее время представляют схемы, работающие по принципу L2L [4] и осуществляющие сжатие и восстановление мультимедиаданных как без потерь, так и с контролируемым внесением артефактов. Схема L2L унифицирует схемы кодирования изображений lossy (с потерями) и lossless (без потерь), когда требуются высокое качество и степень компрессии. Это обеспечивает возможность широкого применения схем кодирования изображений в соответствии с мультимедийными приложениями. Таким образом, задача создания универсального кодера изображений, работающего по схеме L2L, в настоящее время весьма актуальна.

Для кодирования изображения по схеме lossless требуется, чтобы трансформационное преобразование было обратимо и реализовано в целочисленной арифметике, т. е. преобразование соответствовало схеме обработки «целое-в-целое». Стандарты JPEG [5] и JPEG2000 [6] уже имеют режимы сжатия по схемам lossy и lossless: независимо осуществляются кодирование исходного изображения по схеме lossy и кодирование исходного изображения по схеме lossless. Такой подход предполагает выполнение трансформационного преобразования отдельно, что увеличивает вычислительную сложность кодера. Простейшим способом кодирования изображения по схеме L2L является применение целочисленных преобразователей, например дискретного вейвлет-преобразования 5/3 стандарта JPEG2000 или 4×8 иерархического расширенного биортогонального преобразования (HLBT) стандарта HD Photo (JPEG-XR) [7]. Однако данные трансформационные преобразователи проектировались для режима сжатия исходного изображения по схеме lossless и не соответствуют кодированию изображений по схеме lossy.

Целочисленные ДКП (IntDCT) [8, 9], которые реализованы на основе лестничной схемной параметризации, были предложены для трансформационного кодирования изображений. Тем не менее результаты [8, 9] не могут быть использованы для кодирования изображений по схеме lossless, потому что динамический диапазон представления коэффициентов лестничной схемной параметризации не контролируется и часто бывает очень большим, что требует

большой разрядности слова представления коэффициентов или реализации арифметики с фиксированной запятой переменного формата [10]. В работе [4] предложены структуры банков фильтров на основе лестничной схемной параметризации для кодирования изображения по принципу L2L, но не берется во внимание число операций округления результатов умножения в лестничной структуре, которые можно рассматривать как белый шум квантования. Число операций округления влияет на компактность энергии в субполосах банка фильтров, и получить высокую эффективность систем сжатия изображений по схеме L2L не представляется возможным. Следовательно, количество операций округления в целочисленном трансформационном преобразователе для схемы L2L компрессии изображений должно быть уменьшено в максимально возможной степени.

Таким образом, банки фильтров можно рассматривать как обобщенный преобразователь в системе трансформационного кодирования изображений, которые должны обладать свойством перфективной реконструкции, иметь линейную фазочастотную характеристику (ФЧХ), сохранять структурную регулярность и не вносить постоянную составляющую, достаточно просто отображаться на аппаратные и программные ресурсы (структурную регулярность, модульность, высокий вычислительный параллелизм, буферы памяти небольшой емкости, малую латентность и потребляемую мощность).

Максимально децимированный банк фильтров. Стандартная решетчатая факторизация ПУБФ с линейной ФЧХ. Для ПУБФ анализа с линейной ФЧХ и четного числа каналов M выбор параметров компонентов разложения решетчатой факторизации передаточной полифазной матрицы $\mathbf{E}(z)$ в (1) осуществляется следующим образом [11]:

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{G}_{N-1}(z)\mathbf{G}_{N-2}(z)\dots\mathbf{G}_1(z)\mathbf{E}_0 = \left(\prod_{i=N-1}^1 \mathbf{G}_i(z)\right)\mathbf{E}_0, \quad (4)$$

где за начальной матрицей

$$\mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_0 \mathbf{W} \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, \mathbf{J}_{M/2}) \quad (5)$$

следуют этапы факторизации

$$\mathbf{G}_i(z) = \frac{1}{2}\Phi_i \mathbf{W} \Lambda(z) \mathbf{W}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (6)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & \mathbf{I}_{M/2} \\ \mathbf{I}_{M/2} & -\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda(z) = \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, z^{-1}\mathbf{I}_{M/2}).$$

Матрицы перекрестных суммирований \mathbf{W} и элементы задержки $\Lambda(z)$ фиксированные. Следовательно, все количество степеней свободы (неизвестных переменных) при синтезе ПУБФ с линейной ФЧХ определяется параметрами матрицы:

$$\Phi_i = \text{diag}(\mathbf{U}_i, \mathbf{V}_i), \quad (7)$$

где \mathbf{U}_i и \mathbf{V}_i – произвольные ортогональные матрицы размера $(M/2) \times (M/2)$. Кроме того, для упрощения обозначенной выше факторизации при $i > 0$ матрица \mathbf{U}_i может быть представлена единичной матрицей. Тогда справедливо выражение

$$\Phi_i = \text{diag}(\mathbf{I}_{M/2}, \mathbf{V}_i), \quad i > 0. \quad (8)$$

Среди ПУБФ с линейной ФЧХ необходимо выделить банки фильтров, у которых наблюдается попарная зеркальная симметрия частотных характеристик фильтров относительно $\pi/2$.

Для таких банков фильтров передаточные функции или импульсные характеристики анализирующих фильтров должны удовлетворять соответственно условиям

$$H_{M-1-k}(z) = \pm H_k(-z), \quad (9)$$

$$h_{M-1-k}(n) = \pm (-1)^n h_k(n),$$

где $k = (0, \dots, N-1)$, $n = (0, \dots, L-1)$, L – длина импульсной характеристики фильтра. Для четного числа каналов M ПУБФ с попарной зеркальной симметрией частотных характеристик фильтров может быть получен, если модифицировать факторизацию решетчатой структуры ПУБФ с линейной ФЧХ (4). Действительно, достаточно ассоциировать \mathbf{U}_i с \mathbf{V}_i в (7) и представить матрицу \mathbf{U}_i следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i &= \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}_i \mathbf{\Gamma}, \quad i = 0, \dots, N-2, \\ \mathbf{U}_{N-1} &= \mathbf{J}_{M/2} \mathbf{V}_{N-1} \mathbf{\Gamma}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{J}_{M/2}$ – обратная единичная матрица; $\mathbf{\Gamma}$ – диагональная матрица, элементы которой определяются как $\gamma_{mm} = (-1)^{m-1}$, $m = 1, \dots, M/2$. Количество неизвестных переменных (степеней свободы) при синтезе данного банка фильтров сократилось. Из (10) видно, что параметры настройки банка фильтров определяются только матрицей \mathbf{V}_i . Следовательно, оптимизация коэффициентов упростилась, что явилось основной мотивацией разработки ПУБФ с линейной ФЧХ, у которых наблюдается попарная зеркальная симметрия частотных характеристик фильтров относительно $\pi/2$.

Полифазная передаточная матрица $\mathbf{D}(z)$ банка фильтров синтеза конструируется на основе обратного включения компонентов факторизации полифазной передаточной матрицы банка анализа:

$$\mathbf{D}(z) = \mathbf{E}_0 \left(\prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{G}_i(z) \right). \quad (11)$$

При синтезе и реализации ПУБФ с линейной ФЧХ матрицы \mathbf{U}_i и \mathbf{V}_i в (7) и (10), как правило, параметризуются планарными вращениями Гивенса, каждое из которых соответствует одной степени свободы. Данный подход подобен QR-декомпозиции матриц и приводит к нескольким эквивалентным вычислительным схемам. Однако описанные выше факторизации теряют свойство параунитарности, когда матрицы \mathbf{U}_i и \mathbf{V}_i представляются с ограниченной точностью. Перфективная реконструкция не обеспечивается банком фильтров с решетчатыми структурами и фиксированной запятой, потому что наличия в разложении (4) даже одной неортогональной компоненты достаточно, чтобы условие перфективной реконструкции (3) не выполнялось [11]. Это обусловлено тем, что квантование компонент ортогональных матриц в общем случае приведет к изменению норм столбцов.

Гиперкомплексная факторизация ПУБФ анализа с линейной ФЧХ

Оператор умножения кватернионов – базовый модуль факторизации. Последние 20 лет в цифровой обработке сигналов гиперкомплексные числа – кватернионы – рассматриваются как новая парадигма, позволяющая осуществлять обработку сигналов непосредственно в многомерном домене. Кватернионы уже с успехом использовались в цифровой обработке сигналов, например в адаптивных фильтрах Калмана [13], оценке спектра по методу MUSIC [14], параунитарных банках фильтров Q-ПУБФ [15, 16] и других приложениях [17].

Алгебра кватернионов \mathbb{H} является ассоциативной некоммутативной четырехмерной алгеброй $\mathbb{H} = \{Q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k; q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$, где ортогональные мнимые части подчиняются следующим законам умножения: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ [18]. Для выполнения операции умножения кватернионов в векторно-матричной алгебре кватернионы представляются в виде четырехмерного вектора, а сама операция умножения выполняется по правилу умножения вектора на матрицу. Поскольку операция умножения некоммутативна, выделяют «левый» оператор умножения $\mathbf{M}^+(Q)$ и «правый» $\mathbf{M}^-(Q)$ [16]:

$$P \cdot Q \neq Q \cdot P,$$

$$R = P \cdot Q = \mathbf{M}^+(P) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{M}^-(Q) \cdot \mathbf{P},$$

$$\mathbf{M}^+(P) = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ p_2 & p_1 & -p_4 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_1 & -p_2 \\ p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^-(Q) = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_2 & q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & -q_4 & q_1 & q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Обе матрицы (12) ортогональные и имеют детерминант, равный +1, что позволяет отнести их к группе специальных матриц размерностью 4×4 , называемых $SO(4)$:

$$\mathbf{M}^\pm(Q)^{-1} = (1/|Q|) \cdot \mathbf{M}^\pm(Q)^T, \quad (13)$$

где $|Q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$ – норма кватерниона. Как следует из структур матриц, их свойства не зависят от значений компонентов кватерниона $\mathbf{M}^\pm(Q) \cdot \mathbf{M}^\pm(Q)^T = \mathbf{I}_4$ и, следовательно, не чувствительны к их модификации, например квантованию. Матрицы $\mathbf{M}^+(Q)$ и $\mathbf{M}^-(Q)$ соотносятся между собой как

$$\mathbf{M}^\mp(Q) = \mathbf{D}_C \mathbf{M}^\pm(Q)^T \mathbf{D}_C, \quad (14)$$

где $\mathbf{D}_C = \text{diag}(1, -\mathbf{I}_3)$ описывает в матричной нотации оператор гиперкомплексного сопряжения. Определив сопряженный кватернион $\bar{Q} = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k$ в векторно-матричном виде как $\bar{Q} = \mathbf{D}_C \cdot \mathbf{Q}$, можно получить, что $\mathbf{M}^\pm(\bar{Q}) = \mathbf{M}^\pm(Q)^T$. Тогда выражение (14) переопределяется следующим образом: $\mathbf{M}^\mp(Q) = \mathbf{D}_C \cdot \mathbf{M}^\pm(\bar{Q}) \cdot \mathbf{D}_C$. Последнее равенство показывает, что результаты, полученные для умножения «левого» типа qx или «правого» типа xq , могут быть применимы к умножению на сопряженный кватернион. В частности, это доказывает, что вычислительная сложность операторов умножений кватернионов одинакова. Данный факт позволяет сосредоточить внимание на организации вычисления «левого» оператора умножения кватернионов $\mathbf{M}^+(Q)$.

В работе [19] утверждается, что для каждой ортогональной матрицы \mathbf{A} размерностью 4×4 существует уникальная (с точностью до знака) пара единичных кватернионов P и Q ($|P|=1$, $|Q|=1$), таких, что

$$\forall_{\mathbf{A} \in SO(4)} \exists_{P, Q \in \text{unit quat.}} \mathbf{A} = \mathbf{M}^+(P) \cdot \mathbf{M}^-(Q) = \mathbf{M}^-(Q) \cdot \mathbf{M}^+(P). \quad (15)$$

Авторы работ [15, 16] показали, что умножитель кватернионов является базовым блоком для ПУБФ, и доказали в [16], что четырех- и восьмиканальный варианты (4)–(6) могут быть модифицированы, когда матрицы U_i и V_i параметризуются операторами умножения кватернионов. При этом, в отличие от вращений Гивенса, сохраняется ортогональность (3), несмотря на квантование компонент матриц операторов умножения кватернионов. Таким образом, вариант реализации ПУБФ в арифметике с фиксированной запятой становится системой структурно без потерь.

Кватернионный восьмиканальный ПУБФ с линейной ФЧХ. Принимая во внимание (15), как показано в работах [16, 20], матрица (7) параметризуется ортогональными блочными матрицами операторов умножения кватернионов, сохраняющих свойство постоянной нормы столбцов, следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_i \end{bmatrix} &= \text{diag}\{M^-(S_i), M^-(S_i)\} \cdot \text{diag}\{M^-(\bar{R}_i), M^-(R_i)\} \times \\ &\times \text{diag}\{M^+(\bar{Q}_i), M^+(Q_i)\} \cdot \text{diag}\{M^+(P_i), M^+(P_i)\}, \\ \text{diag}\{M^+(Q_i), M^+(Q_i)\} W &= W \text{diag}\{M^+(Q_i), M^+(Q_i)\}, \\ \text{diag}\{M^+(Q_i), M^+(Q_i)\} \Lambda(z) &= \Lambda(z) \text{diag}\{M^+(Q_i), M^+(Q_i)\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Следовательно, матрицы в (5) и (6) будут определены как

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \text{diag}\{M^-(\bar{R}_0), M^-(R_0)\} \cdot \text{diag}\{M^+(\bar{Q}_0), M^+(Q_0)\} \times \\ &\times \text{diag}\{M^-(S_0), M^-(S_0)\} \cdot \text{diag}\{M^+(P_0), M^+(P_0)\}, \\ \Phi_i &= \text{diag}\{M^-(\bar{R}_i), M^-(R_i)\} \cdot \text{diag}\{M^+(\bar{Q}_i), M^+(Q_i)\}, \quad i=1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{17}$$

Для $N = 3$ соответствующая структура Q-ПУБФ показана на рис. 1. К сожалению, сохранение Q-ПУБФ как структурно-ортогональной системы (системы без потерь) сопровождается многими избыточными вычислениями. Вычислительная сложность в три раза больше, чем у наиболее упрощенного варианта [21] (подробный анализ опущен для краткости). Тем не менее существуют очень эффективные VLSI- и FPGA-архитектурные решения реализации операторов умножения кватернионов [22, 23], что на практике делает разницу менее значительной.

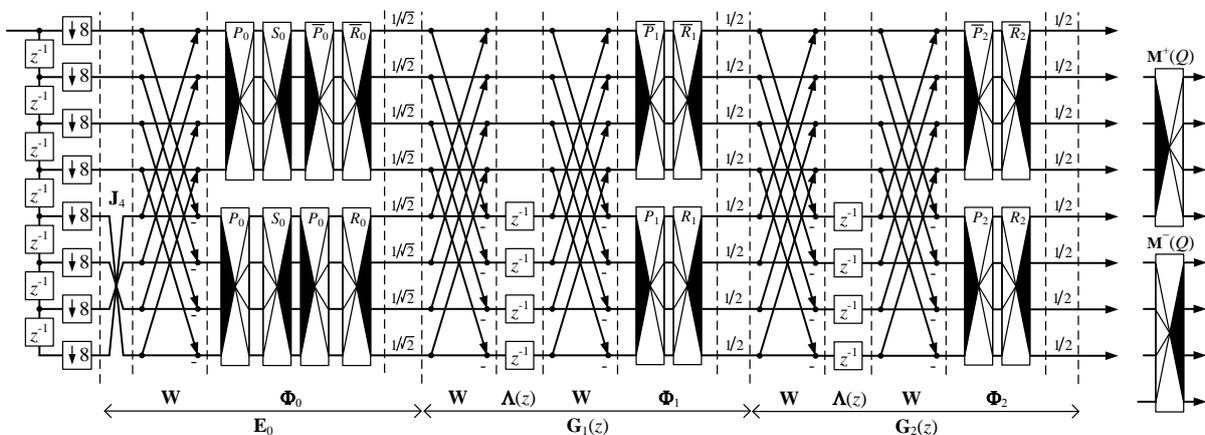


Рис. 1. Восьмиканальный Q-ПУБФ с линейной ФЧХ ($N = 3$)

Кватернионный восьмиканальный ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик. Параметризация ортогональными блочными матрицами операторов умножения кватернионов восьмиканального ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик (9) определяется как

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Gamma \mathbf{V}_i \Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_i \end{bmatrix} = \text{diag}\{\Gamma, \mathbf{I}\} \cdot \text{diag}\{\mathbf{M}^-(P_i), \mathbf{M}^-(P_i)\} \times \\ \times \text{diag}\{\mathbf{M}^+(Q_i), \mathbf{M}^+(Q_i)\} \cdot \text{diag}\{\Gamma, \mathbf{I}\}, \quad i = 0, \dots, N-2; \quad (18)$$

$$\Phi_{N-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} \mathbf{V}_{N-1} \Gamma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{N-1} \end{bmatrix} = \text{diag}\{\mathbf{J}, \mathbf{I}\} \cdot \text{diag}\{\mathbf{M}^-(P_{N-1}), \mathbf{M}^-(P_{N-1})\} \times \\ \times \text{diag}\{\mathbf{M}^+(Q_{N-1}), \mathbf{M}^+(Q_{N-1})\} \cdot \text{diag}\{\Gamma, \mathbf{I}\}.$$

Структура, полученная таким образом для $N = 3$, изображена на рис. 2.

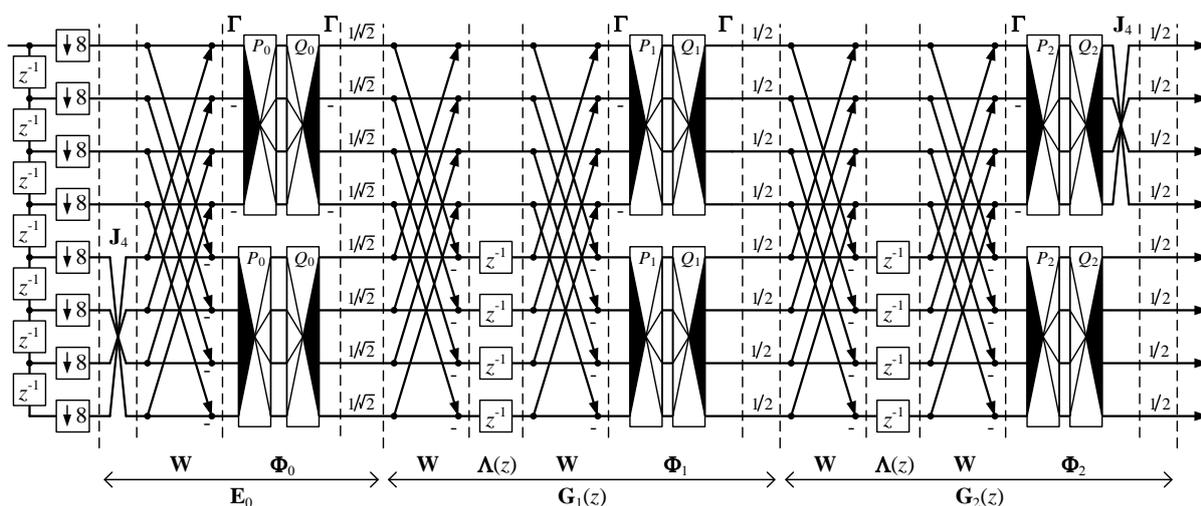


Рис. 2. Восьмиканальный Q-ПУБФ с попарно зеркальной симметрией частотных характеристик ($N = 3$)

Следует отметить, что блочные матрицы в (17) и (18) можно интерпретировать как матрицы умножения восьмимерных гиперкомплексных чисел, называемых октонионами [18]. Предложенный подход факторизации Q-ПУБФ дает возможность непосредственного выражения условия регулярности первого порядка в значениях коэффициентов решетчатой структуры Q-ПУБФ [20]:

$$Q_{N-1} = \pm \frac{1}{2} \overline{Q_{N-2}} \dots \overline{Q_0} \cdot c_1 \cdot \overline{P_0} \dots \overline{P_{N-1}} \cdot c_2, \quad (19)$$

где c_1 и c_2 – кватернионы вида $c_1 = 1 + i - j + k$, $c_2 = 0 + 0i + 0j + k$. Регулярность первого порядка позволяет локализовать постоянную составляющую на выходе банка фильтров, благодаря чему на обработанном изображении будет отсутствовать артефакт «шахматная доска». Например, для Q-ПУБФ с регулярностью первого порядка значения всех АЧХ-фильтров, кроме нулевого, стремятся к $-\infty$ на нулевой частоте [20].

Постановка задачи. Высокая вычислительная сложность Q-ПУБФ и требование работы в реальном масштабе времени для многих практических мультимедийных приложений часто обуславливают решение в виде специализированной аппаратуры. Благодаря развитию FPGA и языков описания структур [24] появилась возможность быстрого создания прототипа системы. Однако в каждой проблемной области требуется разработка предметной части структурного синтеза системы. В настоящее время методологии проектирования систем на FPGA основываются на IP-компонентах (IP – intellectual property) [25]. Высокопараметризованные IP-проекты характеризуются большей возможностью повторного использования в отличие от проектов, которые обычно оптимизированы под определенный критерий проектирования и, таким образом, являются слабопараметризованными. Такие параметры системы, как пропускная способность, затраты в ресурсах, формат данных в арифметике с фиксированной запятой, являются наиболее определяющими параметрами проекта. IP-компоненты, которые обеспечивают широкий диапазон регулировки данных параметров в процессе создания проекта FPGA, дают возможность выбора архитектуры системы, отвечающей требованиям конкретного целевого приложения.

Анализ факторизаций (16)–(18) показывает, что базовым элементарным преобразованием Q-ПУБФ является умножение кватернионов (Q-MUL), где один из сомножителей – кватернион-константа, т. е. кватернион с постоянными параметрами. При этом умножение кватернионов – ключевая операция, от эффективной реализации которой зависят характеристики всего преобразования. Следовательно, операция Q-MUL может быть выбрана в качестве параметризуемого IP-компонента. Прямое умножение матрицы на вектор потребует 16 умножений действительных чисел и 12 алгебраических сложений. В работе [26] показано, как можно вычислить продукт умножения кватернионов на основе восьми действительных умножений, но данная техника не подходит для случая, когда один операнд есть кватернион-константа. Алгоритм выполнения умножения кватернионов на арифметике с фиксированной запятой на основе лестничной структуры представлен в работе [27] (12 операций умножения на действительные числа), где основной компонент схемы – умножитель-накопитель (MAC). Аппаратная реализация MAC-операций на FPGA представляет собой специализированный блок DSP48. К достоинствам использования блоков DSP48 можно отнести универсальность и скорость работы. Однако ограниченное количество блоков DSP48 на FPGA не позволяет использовать данный подход при реализации Q-ПУБФ с длинной импульсной характеристикой или большим числом каналов. Представляют интерес вычислительные схемы умножителя кватернионов без использования устройств действительных умножений. Известно решение реализации умножителя кватернионов с использованием подхода распределенной арифметики на памяти [22], которое позволяет получать схемные решения, сбалансированные как по производительности, так и по потребляемой мощности. Однако для достижения высокой скорости и точности вычислений здесь необходим большой объем памяти и Q-ПУБФ не является обратимым преобразованием. CORDIC-лестничная параметризация позволяет интегрировать CORDIC-алгоритм «внутри» лестничной схемы умножителя, заменив действительные умножения на микровращения CORDIC-алгоритма: сложение и сдвиг. Параллельные и конвейерные структуры CORDIC-процессоров позволяют достигать высокую скорость вычислений [23], но основные их недостатки – большая латентность операции Q-MUL и затраты оборудования.

В настоящей работе предлагается гибкая технология быстрого прототипирования архитектур процессоров Int-Q-ПУБФ на основе FPGA, в основу которой положен Q-MUL IP-компонент оператора умножения кватернионов с использованием подхода распределенной арифметики на сумматорах DA-ADDER, обеспечивающий широкий диапазон регулировок параметров Int-Q-ПУБФ: амплитудных и фазочастотных характеристик, показателя эффективности кодирования, структурной регулярности, производительности, форматов данных арифметики с фиксированной запятой и затрат в ресурсах.

Блочные лестничные структурные преобразования оператора умножения кватернионов. Блочная лестничная параметризация операторов умножения кватернионов может быть представлена следующим образом [27]:

$$\mathbf{M}^+(\mathcal{Q}) = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathcal{Q}) & -\mathbf{S}(\mathcal{Q}) \\ \mathbf{S}(\mathcal{Q}) & \mathbf{C}(\mathcal{Q}) \end{bmatrix} = \pm \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{F}(\mathcal{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}(\mathcal{Q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathcal{Q}) & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}(\mathcal{Q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{H}(\mathcal{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}(\mathcal{Q})}; \quad (20)$$

$$\mathbf{M}^-(\mathcal{Q}) = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathcal{Q}) & -\mathbf{S}(\mathcal{Q}) \\ \mathbf{S}(\mathcal{Q}) & \mathbf{C}(\mathcal{Q}) \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{\Gamma}_2 \cdot \mathbf{H}(\mathcal{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathcal{Q}) \cdot \mathbf{\Gamma}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{\Gamma}_2 \cdot \mathbf{F}(\mathcal{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}; \quad (21)$$

$$\mathbf{C}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} q_3 & q_4 \\ q_4 & -q_3 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Выражения (20) и (21) могут рассматриваться как расширение 2D-вращения на случай четырехмерного пространства. Для заданного кватерниона \mathcal{Q} и матрицы оператора умножения $\mathbf{M}^+(\mathcal{Q})$ определяется набор матричных выражений, которые могут быть решены однозначно для $\mathbf{F}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ при условии, что матрица $\mathbf{S}(\mathcal{Q})$ является несингулярной или, более определенно, ненулевой [27]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathcal{Q}) &= (\mathbf{C}(\mathcal{Q}) \mp \mathbf{I}_2) \mathbf{S}(\mathcal{Q})^{-1}, \\ \mathbf{G}(\mathcal{Q}) &= \mathbf{S}(\mathcal{Q}), \\ \mathbf{H}(\mathcal{Q}) &= \mathbf{S}(\mathcal{Q})^{-1} (\mathbf{C}(\mathcal{Q}) \mp \mathbf{I}_2). \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку матрицы $\mathbf{C}(\mathcal{Q})$, \mathbf{I}_2 , $\mathbf{S}(\mathcal{Q})$ являются ортогональными, то матрицы $\mathbf{F}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ также будут ортогональными исходя из свойств умножения ортогональных матриц [19]. Элементы матриц $\mathbf{F}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ представляют собой вещественные коэффициенты блочной лестничной параметризации. Однако динамический диапазон коэффициентов матриц $\mathbf{F}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ увеличивается, что неприемлемо для арифметики с фиксированной запятой. Приведение параметров множителя к динамическому диапазону $[-1; 1]$ может быть достигнуто, если оператор умножения кватерниона выбирать согласно правилу [27]

$$\mathbf{M}^\pm(\mathcal{Q}) = \begin{cases} \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^\pm(\tilde{\mathcal{Q}}) \cdot \mathbf{P}_{pre}, & \text{если } \det(\mathbf{P}) = 1, \\ \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^\mp(\tilde{\mathcal{Q}}) \cdot \mathbf{P}_{pre}, & \text{если } \det(\mathbf{P}) = -1, \end{cases} \quad (24)$$

где \mathbf{P} – матрица перестановки, которая связывает \mathcal{Q} и $\tilde{\mathcal{Q}} = \mathbf{P} \cdot \mathcal{Q}$. Матрицы \mathbf{P}_{pre} и \mathbf{P}_{post} являются матрицами пред- и постобработки, состоящей в перестановке и, возможно, в изменении знаков компонентов кватерниона \mathcal{Q} , например $\mathcal{Q} = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ и $\tilde{\mathcal{Q}} = q_4 + q_2i - q_1j + q_3k$: $\mathcal{Q}\mathbf{x} = \mathbf{M}^\pm(\mathcal{Q})\mathbf{x} = \mathbf{P}_{post} \mathbf{M}^\pm(\tilde{\mathcal{Q}}) \mathbf{P}_{pre} \mathbf{x}$. Обе эти операции имеют одинаковую вычислительную сложность. На основе соотношения между левым и правым операторами умножения кватернионов (14), матриц перестановок \mathbf{P}_{pre} и \mathbf{P}_{post} , а также коэффициентов блочной лестничной параметризации $\mathbf{F}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{G}(\mathcal{Q})$, $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ левого оператора умножения $\mathbf{M}^+(\mathcal{Q})$ определяются правила модификации операторов умножения $\mathbf{M}^+(\bar{\mathcal{Q}})$, $\mathbf{M}^-(\mathcal{Q})$ и $\mathbf{M}^-(\bar{\mathcal{Q}})$ (табл. 1).

Таблица 1

Правила модификации операторов умножения кватерниона $\mathbf{M}^\pm(Q)$

| Целевой оператор умножения $\mathbf{M}^\pm(Q)$ | Правило модификации оператора для \tilde{Q} |
|--|--|
| $\mathbf{M}^+(Q)$ | $\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = \mathbf{P}_{pre}; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{P}_{post};$ $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}; \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ |
| $\mathbf{M}^+(\bar{Q})$ | $\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = \mathbf{P}_{post}^T; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{P}_{pre}^T;$ $\tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{H}; \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{F}$ |
| $\mathbf{M}^-(Q)$ | $\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = (\mathbf{P}_{post}^T) \mathbf{D}_c; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{D}_c (\mathbf{P}_{pre}^T);$ $\tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{H}; \tilde{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = -\mathbf{F}$ |
| $\mathbf{M}^-(\bar{Q})$ | $\tilde{\mathbf{P}}_{pre} = \mathbf{P}_{pre} \cdot \mathbf{D}_c; \tilde{\mathbf{P}}_{post} = \mathbf{D}_c \cdot \mathbf{P}_{post};$ $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}; \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}; \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ |

Таким образом, структура обратимого оператора умножения кватернионов на основе блочной лестничной схемной параметризации представляет собой каскадное соединение блочных матриц $\mathbf{F}(Q)$, $\mathbf{G}(Q)$, $\mathbf{H}(Q)$ и их инверсное включение с отрицательным знаком (обратное преобразование – умножение на сопряженный кватернион \bar{Q}) [27]. При этом ошибки округления соответствующих результатов умножений взаимно компенсируются секциями прямого и обратного преобразований. Входной вектор \mathbf{x} проходит три ступени обработки $\mathbf{F}(Q)$, $\mathbf{G}(Q)$, $\mathbf{H}(Q)$ для формирования произведения $\mathbf{M}^+(Q) \cdot \mathbf{x}$ (рис. 3).

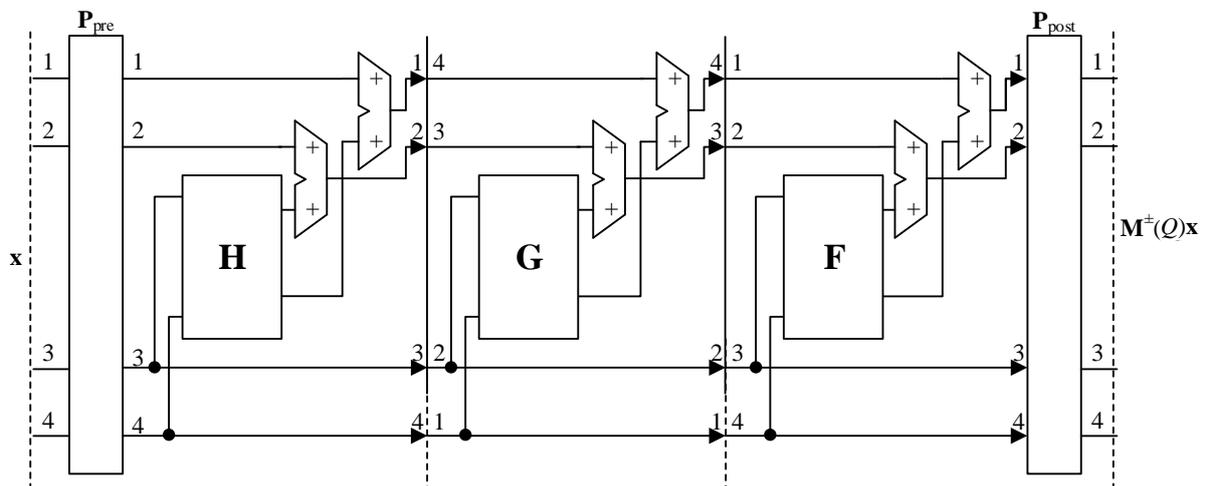


Рис. 3. Структурная схема Q-MUL IP-компонента для левого оператора умножения кватернионов (прямое преобразование)

Умножение в блоках \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{F} может быть реализовано на основе 2D-CORDIC-алгоритмов [23] или распределенной арифметики на памяти (DA-ROM) [22]. Конвейерные структуры 2D-CORDIC-процессоров и параллельные реализации умножения в блоках на DA-ROM позволяют достигать высокой скорости вычислений, но основной их недостаток – большая латентность операции Q-MUL (2D-CORDIC) и затраты оборудования (2D-CORDIC и DA-ROM). Другим альтернативным подходом к реализации Q-MUL IP-компонента может быть распределенная

арифметика на сумматорах DA-ADDER [28]. В основе DA-ADDER лежат последовательные побитные операции над константным вектором коэффициентов при переменном входном векторе. DA-ADDER для уменьшения вычислений используют тот факт, что константный вектор содержит биты, равные нулю. Кроме того, можно выделить общие термы при суммировании [29].

Конвейерная схема Q-MUL IP-компонента. Параметризация. Процесс получения результата умножения входного кватерниона $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ на кватернион-константу Q разделяется на пять ступеней:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= Q \cdot \mathbf{x} = \mathbf{M}^+(Q) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P}_{post} \cdot \mathbf{M}^+(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{P}_{pre} \cdot \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{P}_{post} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{F}(\tilde{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}(\tilde{Q})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\tilde{Q}) & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}(\tilde{Q})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{H}(\tilde{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}(\tilde{Q})} \cdot \mathbf{P}_{pre} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (25)$$

Две ступени перестановки входных переменных \mathbf{x} и формирования результата умножения \mathbf{y} (матрицы \mathbf{P}_{pre} и \mathbf{P}_{post} соответственно) обусловлены модификацией исходного кватерниона константы Q и соответствующими модификациями матриц $\mathbf{V}(\tilde{Q})$, $\mathbf{L}(\tilde{Q})$, $\mathbf{U}(\tilde{Q})$. С целью упрощения блоков перестановки данных (матрицы \mathbf{P}_{pre} , \mathbf{P}_{post} в (25) и $\Gamma_{M/2}$ в (18)) операция изменения знака выносится и предлагается включить ее внутрь лестничной структуры, т. е. в соответствующие ступени Q-MUL IP-компонента $\mathbf{V}(\tilde{Q})$, $\mathbf{L}(\tilde{Q})$, $\mathbf{U}(\tilde{Q})$, выполнив выходные сумматоры каждой ступени конвейерной схемы (см. рис. 3) в виде сумматоров (вычитателей), управление которыми осуществляется соответствующими векторами знаков $\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T$, $\mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T$, $\mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T$:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{B}_{post} \cdot \mathbf{L}) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{F}(\tilde{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}(\tilde{Q})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\tilde{Q}) & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}(\tilde{Q})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{H}(\tilde{Q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}(\tilde{Q})} \cdot (\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_{pre}) \cdot \mathbf{x}, \quad (26)$$

где матрицы перестановок определяются как

$$\mathbf{B}_{pre} = \left| \mathbf{P}_{pre} \right|, \quad \mathbf{B}_{post} = \left| \mathbf{P}_{post} \right|, \quad (27)$$

а соответствующие матрицы знаков как

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_{pre} \cdot \mathbf{B}_{pre}^{-1} = \text{diag}(r_1, r_2, r_3, r_4), \quad r_i \in (-1, 1), \quad (28)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}_{post}^{-1} \cdot \mathbf{P}_{post} = \text{diag}(l_1, l_2, l_3, l_4), \quad l_i \in (-1, 1).$$

Таким образом, функциональная схема Q-MUL IP-компонента (рис. 3) оператора умножения кватернионов $\mathbf{M}^+(P_1)$ параметризована следующим набором параметров: матрицами перестановок \mathbf{B}_{pre} и \mathbf{B}_{post} , векторами знаков \mathbf{SH} , \mathbf{SG} , \mathbf{SF} , а также соответствующими структурами деревьев сумматоров блоков распределенной арифметики $\mathbf{F}(\tilde{Q})$, $\mathbf{G}(\tilde{Q})$, $\mathbf{H}(\tilde{Q})$ (рис. 4).

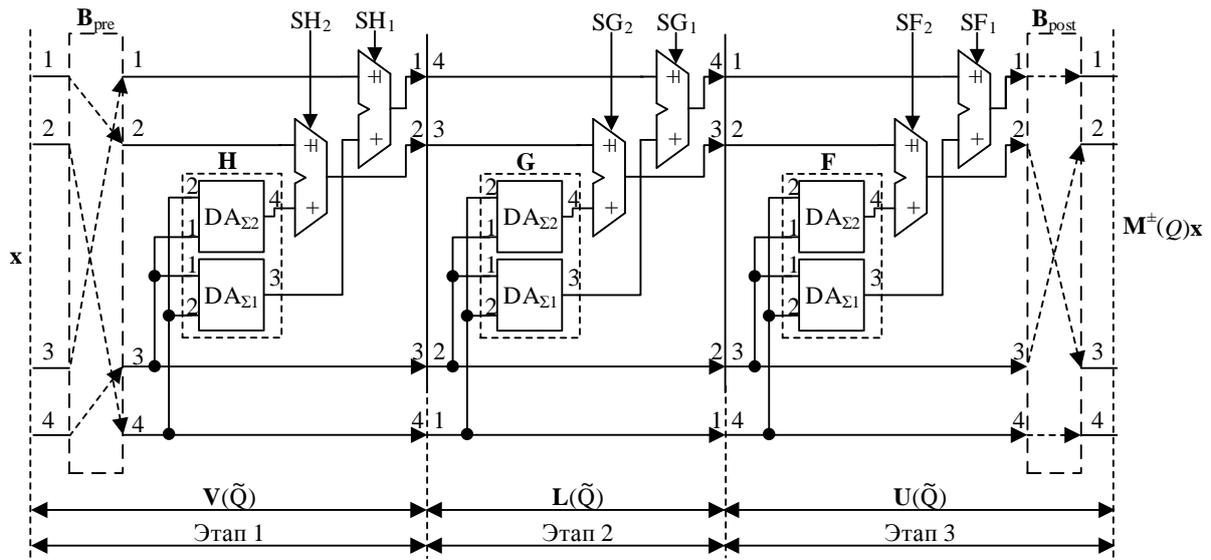


Рис. 4. Функциональная схема Q-MUL IP-компонента оператора $\mathbf{M}^+(\tilde{Q})$ умножения кватернионов

Продукт первого этапа обработки (рис. 4) согласно (26) определяется следующим образом:

$$\mathbf{y}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 1 & h_{21} & h_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{pre} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{V}(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{B}_{pre} \cdot \mathbf{x}.$$

После умножения справа матрицы знаков \mathbf{R} на $\mathbf{H}(\tilde{Q})$ степени факторизации $\mathbf{V}(\tilde{Q})$ формируется вектор знаков $\mathbf{SH}(SH_1 = r_1, SH_2 = r_2)$ и определяется изменение знаков коэффициентов $\mathbf{H}(\tilde{Q})$:

$$\mathbf{y}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SH_1 & 0 & r_3 \cdot h_{11} & r_4 \cdot h_{12} \\ 0 & SH_2 & r_3 \cdot h_{21} & r_4 \cdot h_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{pre} \cdot \mathbf{x}.$$

Выходной продукт Q-MUL IP-компонента оператора $\mathbf{M}^+(\tilde{Q})$ формируется как результат умножения \mathbf{y}_L выхода второго этапа $\mathbf{L}(\tilde{Q})$ на $\mathbf{F}(\tilde{Q})$ степени факторизации $\mathbf{U}(\tilde{Q})$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_{post} \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & f_{11} & f_{12} \\ 0 & 1 & f_{21} & f_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}_L = \mathbf{B}_{post} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}(\tilde{Q}) \cdot \mathbf{y}_L.$$

Компоненты $SF_1 = l_1$, $SF_2 = l_2$ вектора знаков \mathbf{SF} и изменения знаков коэффициентов $\mathbf{F}(\tilde{Q})$ определяются из выражения

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_{post} \cdot \begin{bmatrix} SF_1 & 0 & \left(\frac{l_1}{l_3}\right) \cdot f_{11} & \left(\frac{l_1}{l_4}\right) \cdot f_{12} \\ 0 & SF_2 & \left(\frac{l_2}{l_3}\right) \cdot f_{21} & \left(\frac{l_2}{l_4}\right) \cdot f_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}_L. \quad (29)$$

Таким образом, результат умножения входного кватерниона \mathbf{x} на оператор умножения $\mathbf{M}^+(\tilde{Q})$ формируется как результат перемножения следующих матриц:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_{post} \cdot \begin{bmatrix} SF_1 & 0 & \left(\frac{l_1}{l_3}\right) \cdot f_{11} & \left(\frac{l_1}{l_4}\right) \cdot f_{12} \\ 0 & SF_2 & \left(\frac{l_2}{l_3}\right) \cdot f_{21} & \left(\frac{l_2}{l_4}\right) \cdot f_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{L}(\tilde{Q}) \times \quad (30)$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} SH_1 & 0 & r_3 \cdot h_{11} & r_4 \cdot h_{12} \\ 0 & SH_2 & r_3 \cdot h_{21} & r_4 \cdot h_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{pre} \cdot \mathbf{x}.$$

Компоненты SG_1 и SG_2 вектора знаков \mathbf{SG} , а также изменение знаков коэффициентов $\mathbf{G}(\tilde{Q})$ находятся в результате следующей модификации этапа $\mathbf{L}(\tilde{Q})$ разложения (26):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & 1 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} = \quad (31)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_3 \cdot g_{11} & l_3 \cdot g_{12} & l_3 \cdot r_3 & 0 \\ l_4 \cdot g_{21} & l_4 \cdot g_{22} & 0 & l_4 \cdot r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l_3 \cdot g_{11} & l_3 \cdot g_{12} & SG_1 & 0 \\ l_4 \cdot g_{21} & l_4 \cdot g_{22} & 0 & SG_2 \end{bmatrix},$$

где $SG_1 = l_3 \cdot r_3$ и $SG_2 = l_4 \cdot r_4$. В табл. 2 приведены формулы расчета изменения знаков лестничных коэффициентов для множителя кватернионов $\mathbf{M}^+(\tilde{Q})$. Аналогичным образом можно получить правила изменения знаков матриц разложения $\mathbf{V}(\tilde{Q})$, $\mathbf{L}(\tilde{Q})$, $\mathbf{U}(\tilde{Q})$ для правого операнда умножения кватернионов $\mathbf{M}^-(Q)$ и матрицы $\mathbf{\Gamma}_{M/2}$ (18).

Таблица 2

Правила изменения знаков коэффициентов лестничной структуры оператора умножения кватернионов $\mathbf{M}^+(Q)$

| Оператор умножения | Лестничные коэффициенты умножителя кватернионов |
|----------------------------------|---|
| $\mathbf{M}^+(Q)$ | $\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T = [r_1, r_2]; \mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T = [l_3 \cdot r_3, l_4 \cdot r_4]; \mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T = [l_1, l_2],$ $\tilde{f}_{11} = l_1 \cdot f_{11}; \tilde{f}_{21} = l_2 \cdot f_{21}; \tilde{f}_{12} = l_1 \cdot f_{12}; \tilde{f}_{22} = l_2 \cdot f_{22};$ $\tilde{g}_{11} = l_3 \cdot g_{11}; \tilde{g}_{21} = l_4 \cdot g_{21}; \tilde{g}_{12} = l_3 \cdot g_{12}; \tilde{g}_{22} = l_4 \cdot g_{22};$ $\tilde{h}_{11} = r_3 \cdot h_{11}; \tilde{h}_{21} = r_3 \cdot h_{21}; \tilde{h}_{12} = r_4 \cdot h_{12}; \tilde{h}_{22} = r_4 \cdot h_{22}$ |
| $\Gamma_4 \cdot \mathbf{M}^+(Q)$ | $\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T = [r_1, r_2]; \mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T = [l_3 \cdot r_3, -l_4 \cdot r_4]; \mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T = [l_1, -l_2];$ $\tilde{f}_{11} = l_1 \cdot f_{11}; \tilde{f}_{21} = -l_2 \cdot f_{21}; \tilde{f}_{12} = l_1 \cdot f_{12}; \tilde{f}_{22} = -l_2 \cdot f_{22};$ $\tilde{g}_{11} = l_3 \cdot g_{11}; \tilde{g}_{21} = -l_4 \cdot g_{21}; \tilde{g}_{12} = l_3 \cdot g_{12}; \tilde{g}_{22} = -l_4 \cdot g_{22};$ $\tilde{h}_{11} = r_3 \cdot h_{11}; \tilde{h}_{21} = r_3 \cdot h_{21}; \tilde{h}_{12} = r_4 \cdot h_{12}; \tilde{h}_{22} = r_4 \cdot h_{22}$ |
| $\mathbf{M}^+(Q) \cdot \Gamma_4$ | $\mathbf{SH} = [SH_1, SH_2]^T = [r_1, -r_2]; \mathbf{SG} = [SG_1, SG_2]^T = [l_3 \cdot r_3, -l_4 \cdot r_4]; \mathbf{SF} = [SF_1, SF_2]^T = [l_1, l_2];$ $\tilde{f}_{11} = l_1 \cdot f_{11}; \tilde{f}_{21} = l_2 \cdot f_{21}; \tilde{f}_{12} = l_1 \cdot f_{12}; \tilde{f}_{22} = l_2 \cdot f_{22};$ $\tilde{g}_{11} = l_3 \cdot g_{11}; \tilde{g}_{21} = l_4 \cdot g_{21}; \tilde{g}_{12} = l_3 \cdot g_{12}; \tilde{g}_{22} = l_4 \cdot g_{22};$ $\tilde{h}_{11} = r_3 \cdot h_{11}; \tilde{h}_{21} = r_3 \cdot h_{21}; \tilde{h}_{12} = -r_4 \cdot h_{12}; \tilde{h}_{22} = -r_4 \cdot h_{22}$ |

Заключение. Предложенная функциональная схема Q-MUL IP-компонента является универсальной, поскольку изменение векторов знаков \mathbf{SH} , \mathbf{SG} , \mathbf{SF} , матриц \mathbf{B}_{post} , \mathbf{B}_{pre} и коэффициентов блока распределенной арифметики на сумматорах \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{F} позволяет, не меняя структуру умножителя $\mathbf{M}^+(Q)$, вычислять все используемые модификации операторов умножителей кватернионов в Int-Q-ПУБФ. Таким образом, внесение операции изменения знаков входного кватерниона внутрь блочной лестничной структуры позволило унифицировать VHDL-описание структуры Q-MUL IP-компонента.

Список использованных источников

1. Rao, K. Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding / K. Rao, J. Hwang. – Prentice Hall, 1996. – 563 p.
2. Vaidyanathan, P. P. Multirate Systems and Filter Banks / P. P. Vaidyanathan. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1993. – 911 p.
3. Крот, А. М. Теория анализа и синтеза бэнк-фильтров и их применение / А. М. Крот, В. О. Кудрявцев // Успехи современной радиоэлектроники. – 1999. – № 2. – С. 3–17.
4. Suzuki, T. Lifting-based paraunitary filterbanks for lossy/lossless image coding / T. Suzuki, Y. Tanaka, M. Ikehara // Proc. of Intern. Conf. EUSIPCO. – Florence, 2006. – Vol. 6.
5. Pennebaker, W. B. JPEG: Still Image Compression Standard / W. B. Pennebaker, J. L. Mitchell. – N. Y. : Van Nostrand Reinhold, 1993. – 639 p.
6. Taubman, D. JPEG2000: Image Compression Fundamentals, Standards, and Practice / D. Taubman, M. Marcellin. – Boston : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 777 p.
7. ISO/IEC 29199-2:2012. Information technology – JPEG XR image coding system. – Part 2: Image coding specification. – 2012.
8. Chen, Y. J. Integer discrete cosine transform (IntDCT) / Y. J. Chen, S. Oraintara, T. Nguyen // Proc. of 2nd Intern. Conf. ICICS. – Sydney, 1999. – Vol. 99.
9. Liang, J. Fast multiplierless approximations of the DCT with the lifting scheme / J. Liang, T.D. Tran // IEEE Trans. Signal Process. – 2001. – Vol. 49, no. 12. – P. 3032–3044.
10. Petrovsky, A. Dynamic reconfigurable on the lifting steps wavelet packet processor with frame-based psychoacoustic optimized time-frequency tiling for real-time audio applications / A. Petrovsky, M. Rodionov, Al. Petrovsky // Design and Architectures for Digital Signal Processing. – Vienna : InTech, 2013. – P. 3–30.

11. Lattice structure for regular paraunitary linear-phase filterbanks and m -band orthogonal symmetric wavelets / S. Oraintara [et. al.] // *IEEE Trans. Signal Process.* – 2001. – Vol. 49, no. 11. – P. 2659–2672.
12. Gan, L. A simplified lattice factorization for linear-phase paraunitary filter banks with pairwise mirror image frequency responses / L. Gan, K.-K. Ma // *IEEE Trans. Circuits Syst. II.* – 2004. – Vol. 51, no. 1. – P. 3–7.
13. Choukroun, D. Novel quaternion Kalman filter / D. Choukroun, I. Bar-Itzhack, Y. Oshman // *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* – 2006. – Vol. 42, no. 1. – P. 174–190.
14. Miron, S. Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing / S. Miron, N. Le Bihan, J. Mars // *IEEE Trans. Signal Process.* – 2006. – Vol. 54, no. 4. – P. 1218–1229.
15. Parfieniuk, M. Quaternionic building block for paraunitary filter banks / M. Parfieniuk, A. Petrovsky // *Proc. of the 12th European Signal Processing Conf. (EUSIPCO).* – Austria, Vienna, 2004. – P. 1237–1240.
16. Парфенюк, М. Параунитарные банки фильтров на основе алгебры кватернионов: теория и применение / М. Парфенюк, А. А. Петровский // *Цифровая обработка сигналов.* – 2008. – № 1. – С. 22–36.
17. Karney, C. Quaternions in molecular modeling / C. Karney // *J. Molecular Graphics and Modelling.* – 2007. – Vol. 25, no. 5. – P. 595–604.
18. Кантор, И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М. : Наука, 1973. – 145 с.
19. Baker, H. G. Quaternions and orthogonal 4×4 real matrices / H. G. Baker [Electronic resource]. – 1996. – Mode of access: <http://archive.gamedev.net/archive/reference/articles/article428.html>. – Date of access: 05.04.2018.
20. Parfieniuk, M. Inherently lossless structures for eight- and sixchannel linear-phase paraunitary filter banks based on quaternion multipliers / M. Parfieniuk, A. Petrovsky // *Signal Process.* – 2010. – Vol. 90. – P. 1755–1767.
21. Gan, L. A simplified lattice factorization for linear-phase perfect reconstruction filter bank / L. Gan, K.-K. Ma // *IEEE Signal Process. Lett.* – 2001. – Vol. 8, no. 7. – P. 207–209.
22. Petrovsky, N. Low read-only memory distributed arithmetic implementation of quaternion multiplier using split matrix approach / N. Petrovsky, A. Stankevich, A. Petrovsky // *Electronics Letters.* – 2014. – Vol. 50, no. 24. – P. 1809–1811.
23. Петровский, Н. А. CORDIC-техника для фиксированного угла вращения в операции умножения кватернионов / Н. А. Петровский, А. В. Станкевич, А. А. Петровский // *Информатика.* – 2015. – № 4(48). – С. 85–108.
24. Бибило П. Н. Основы языка VHDL : учеб. пособие. Изд. 6-е. – М. : Книжный дом «Либроком», 2014. – 328 с.
25. A systematic approach for synthesizing VLSI architectures of lifting-based filter banks and transforms / R. Bartholoma [et al.] // *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* – 2008. – Vol. 55, no. 7. – P. 1939–1952.
26. The complexity of the quaternion product : Rep. TR 75-245 / Cornell University. – 1975. – Mode of access: <http://www.theworld.com/~sweetser/quaternions/ps/cornellctr75-245.pdf>. – Date of access: 05.04.2018.
27. Parfieniuk, M. Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations / M. Parfieniuk, A. Petrovsky // *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* – 2010. – Vol. 57, no. 10. – P. 2708–2717.
28. Petrovsky, N. A. Design and implementation of reversible integer quaternionic paraunitary filter banks on adder-based distributed arithmetic / N. A. Petrovsky, E. V. Rybenkov, A. A. Petrovsky // *Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA 2017).* – Poznan, 2017. – P. 17–22.
29. Chang, T. S. New distributed arithmetic algorithm and its application to IDCT / T. S. Chang, C. Chen, C. W. Jen // *IEE Proceedings – Circuits, Devices and Systems.* – 1999. – Vol. 146, no. 4. – P. 159–163.

References

1. Rao K., Hwang J. *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding.* Prentice Hall, 1996, 563 p.
2. Vaidyanathan P. P. *Multirate Systems and Filter Banks.* Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1993, 911 p.
3. Krot A. M., Kudrjavcev V. O. Teoriya analiza i sinteza bjenk-fil'trov i ih primeneniye [Theory of analysis and synthesis filter banks and their application]. *Uspеhi sovremennoy radiojelektroniki [The Successes of Modern Radio Electronics]*, 1999, no. 2, pp. 3–17 (in Russian).
4. Suzuki T., Tanaka Y., Ikehara M. Lifting-based paraunitary filterbanks for lossy/lossless image coding. *Proc. of Intern. Conf. EUSIPCO.* Florence, 2006, vol. 6.
5. Pennebaker W. B., Mitchell J. L. *JPEG: Still Image Compression Standard.* N. Y., Van Nostrand Reinhold, 1993, 639 p.
6. Taubman D., Marcellin M. *JPEG2000: Image Compression Fundamentals, Standards, and Practice.* Boston, Kluwer Academic Publishers, 2002, 777 p. doi: 10.1007/978-1-4615-0799-4
7. ISO/IEC 29199-2:2012. Information technology – JPEG XR image coding system. – Part 2: Image coding specification. – 2012.
8. Chen Y. J., Oraintara S., Nguyen T. Integer discrete cosine transform (IntDCT). *Proc. of 2nd Intern. Conf. ICICS.* Sydney, 1999, vol. 99.
9. Liang J., Tran T. D. Fast multiplierless approximations of the DCT with the lifting scheme. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2001, vol. 49, no. 12, pp. 3032–3044. doi: 10.1109/78.969511
10. Petrovsky A., Rodionov M., Petrovsky A. I. Dynamic reconfigurable on the lifting steps wavelet packet processor with frame-based psychoacoustic optimized time-frequency tiling for real-time audio applications. *Design and Architectures for Digital Signal Processing.* Vienna, InTech, 2013, pp. 3–30. doi: 10.5772/51604
11. Oraintara S., Tran T. D., Heller P. N., Nguyen T. Q. Lattice structure for regular paraunitary linear-phase filterbanks and m -band orthogonal symmetric wavelets. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2001, vol. 49, no. 11, pp. 2659–2672. doi: 10.1109/78.960413

12. Gan L., Ma K.-K. A simplified lattice factorization for linear-phase paraunitary filter banks with pairwise mirror image frequency responses. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 2004, vol. 51, no. 1, pp. 3–7. doi: 10.1109/TCSII.2003.821515
13. Choukroun D., Bar-Itzhack I., Oshman Y. Novel quaternion Kalman filter. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 174–190. doi: 10.1109/TAES.2006.1603413
14. Miron S., Bihan Le N., Mars J. Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2006, vol. 54, no. 4, pp. 1218–1229. doi: 10.1109/TSP.2006.870630
15. Parfieniuk M., Petrovsky A. Quaternionic building block for paraunitary filter banks. *Proc. of the 12th European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*. Austria, Vienna, 2004, pp. 1237–1240.
16. Parfieniuk M., Petrovsky A. Paraunitarynye banki fil'trov na osnove algebry kvaternionov: teoriya i primeneniye [Quaternion based paraunitary filter banks: theory and applications]. *Cifrovaja obrabotka signalov [Journal of Digital Signal Processing]*, 2008, no. 1, pp. 22–36 (in Russian).
17. Karney C. Quaternions in molecular modeling. *J. Molecular Graphics and Modelling*, 2007, vol. 25, no. 5, pp. 595–604.
18. Kantor I. L., Solodovnikov A. S. Giperkompleksnye chisla. *Hypercomplex Algebra*. Moscow, Science Publ., 1973, 145 p. (in Russian).
19. Baker H. G. *Quaternions and orthogonal 4x4 real matrices*, 1996. Available at: <http://archive.gamedev.net/archive/reference/articles/article428.html> (accessed 05.04.2018).
20. Parfieniuk M., Petrovsky A. Inherently lossless structures for eight- and sixchannel linear-phase paraunitary filter banks based on quaternion multipliers. *Signal Process.* 2010, vol. 90, pp. 1755–1767. doi: 10.1016/j.sigpro.2010.01.008
21. Gan L., Ma K.-K. A simplified lattice factorization for linear-phase perfect reconstruction filter bank. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2001, vol. 8, no. 7, pp. 207–209. doi: 10.1109/97.928679
22. Petrovsky N., Stankevich A., Petrovsky A. Low read-only memory distributed arithmetic implementation of quaternion multiplier using split matrix approach. *Electronics Letters*, 2014, vol. 50, no. 24, pp. 1809–1811. doi:10.1049/el.2014.1775
23. Petrovsky N. A., Stankevich A. V., Petrovsky A. A. CORDIC-tehnika dlja fiksirovannogo ugla vrashhenija v operacii umnozhenija kvaternionov [CORDIC-techniques for fixed angle of rotation in multiplying operation of quaternions]. *Informatika [Informatics]*, 2015, no. 4(48), pp. 85–108 (in Russian).
24. Bibilo P. N. Osnovy jazyka VHDL: uchebnoe posobie. Izd. 6-e. *Fundamentals of VHDL: Textbook. Ed. 6th*. Moscow, Knizhnyj dom «Librokom» Publ., 2014, 328 p. (in Russian).
25. Bartholoma R., Greiner T., Kesel F., Rosenstiel W. A systematic approach for synthesizing VLSI architectures of lifting-based filter banks and transforms. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2008, vol. 55, no. 7, pp. 1939–1952.
26. The complexity of the quaternion product: Rep. TR 75-245 / Cornell University. – 1975. Available at: <http://www.theworld.com/~sweetser/quaternions/ps/cornellcstr75-245.pdf> (accessed 05.04.2018).
27. Parfieniuk M., Petrovsky A. Quaternion multiplier inspired by the lifting implementation of plane rotations. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 2010, vol. 57, no. 10, pp. 2708–2717. doi: 10.1109/TCSI.2010.2046259
28. Petrovsky N. A., Rybenkov E. V., Petrovsky A. A. Design and implementation of reversible integer quaternionic paraunitary filter banks on adder-based distributed arithmetic. *Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications (SPA 2017)*. Poznan, 2017, pp. 17–22. doi: 10.23919/SPA.2017.8166830
29. Chang T. S., Chen C., Jen C. W. New distributed arithmetic algorithm and its application to IDCT. *IEE Proceedings – Circuits, Devices and Systems*, 1999, vol. 146, no. 4, pp. 159–163. doi: 10.1049/ip-cds:19990537

Информация об авторах

Рыбенков Евгений Викторович – ассистент кафедры электронно-вычислительных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: rybenkov@bsuir.by

Петровский Николай Александрович – доцент кафедры электронно-вычислительных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: nick.petrovsky@bsuir.by

Information about the authors

Eugene V. Rybenkov – Assistant Professor, Department of Computer Engineering, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rybenkov@bsuir.by

Nick A. Petrovsky – Associate Professor, Ph. D. (Computer Science), Department of Computer Engineering, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nick.petrovsky@bsuir.by