ISSN 1816-0301 (print)
УДК 51-7

Поступила в редакцию 16.01.2018
Received 16.01.2018

В. М. Романчак

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

СУБЪЕКТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Аннотация. Предлагается метод субъективного измерения вероятности. Для этого вводится понятие величины, которая меняется равномерно от объекта к объекту. Аналогичное базовое понятие успешно используется в некоторых исследованиях для характеристики нефизических величин. С целью обоснования метода анализируется функциональная связь между объективной и субъективной вероятностями, устанавливаемая на основании эмпирических законов Фехнера и Стивенса.

Ключевые слова: субъективная вероятность, рейтинг, законы Фехнера и Стивенса, модель Раша, функция полезности, нечеткие множества, метод анализа иерархий Саати

Для цитирования. Романчак, В. М. Субъективное оценивание вероятности / В. М. Романчак // Информатика. – 2018. − Т. 15, № 2. – С. 74–82.

V. M. Romanchak

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

THE SUBJECTIVE MEASUREMENT OF PROBABILITY

Abstract. The article offers the method of subjective measurement of probability. For this purpose the concept of quantity which changes evenly from object to object is defined. The similar basic concept is successfully used in some researches to characterize non-physical quantities. To justify the method the functional relationship between objective and subjective probabilities established on the basis of Fechner’s and Stevens 's empirical laws is analyzed.

Keywords: subjective probability, rating, Fechner and Stevens 's laws, the Rasch model, function of usefulness, indistinct sets, method of the analysis of hierarchies Saati

For citation. Romanchak V. M. The subjective measurement of probability. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 2, pp. 74–82 (in Russian).

Введение. Существуют три подхода, с помощью которых получают вероятности: можно найти значения согласно классическому определению вероятности, эмпирически получить вероятности в ходе физического эксперимента или найти значения вероятности на основании ответов эксперта [1].

Обоснованием классического подхода является априорная физическая симметрия, которая подразумевает равную вероятность. Так, если считать, что обе стороны монеты симметричны и материал монеты однороден, то вероятность выпадения каждой из сторон одинакова.

В рамках эмпирического подхода вероятности находят на основе анализа результатов случайного эксперимента. Например, можно подбрасывать монету и считать, сколько раз выпала одна из сторон. При достаточно большом числе испытаний относительная частота появления одной из сторон монеты будет приближенно равна статистической вероятности этого события. В первом и втором случаях вероятность представляет собой число, которое характеризует объективную возможность появления случайного события в данном испытании.

Субъективная вероятность – это число, которое характеризует субъективное отношение к возможности наступления некоторого события.

Постановка задачи. Пусть A_i – конечное число событий из некоторого вероятностного пространства, p_i – вероятности событий A_i, $p_i=P(A_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $0<p_i<1$. Требуется сформулировать метод субъективного измерения вероятностей p_i.

© Романчак В. М., 2018

Уточним понятие субъективного измерения. Субъективное измерение вероятностей – это не приближенная оценка объективных вероятностей, а измерение нефизической величины, которое должно рассматриваться по законам измерения нефизических величин. Измерить нефизическую величину можно только в шкале порядка [2, 3]. Недостатком такой шкалы является то, что арифметические операции в ней недопустимы. Поэтому вероятности, найденные в данной шкале, нельзя численно сравнивать. Чтобы определить субъективные вероятности в более сильной шкале, например шкале интервалов, будем находить вероятности косвенно, используя определение рейтинга и аналогию с физическим измерением.

Идею метода субъективного измерения поясним на примере. Допустим, с помощью условного прибора измерены размеры m_1, m_2, m_3 трех объектов и получены показания прибора r_1=1, r_2=2 и r_3=3 (значения r_i будем называть рейтингами). Считаем, что деления на шкале прибора расположены равномерно, но нет числовых отметок шкалы. Начало отсчета произвольно. Делениям шкалы могут соответствовать значения величины или логарифмы значений величины в зависимости от способа измерения. Способ измерения не задан. Тем не менее можно найти рейтинги, произвольно выбрать способ измерения, определить m_1, m_2, m_3 с точностью до неизвестных постоянных. Тогда для первого способа $m_1=\lambda r_1+\beta$, $m_2=\lambda r_2+\beta$, $m_3=\lambda r_3+\beta$, для второго способа $\ln(m_1)=\lambda r_1+\beta$, $\ln(m_2)=\lambda r_2+\beta$, $\ln(m_3)=\lambda r_3+\beta$ ($\lambda>0$, β – неизвестные постоянные). В итоге появляется возможность сравнивать размеры объектов друг с другом. Аналогично будем предполагать, что при субъективном измерении вероятностей находятся рейтинги вероятностей с помощью эксперта. Далее на основании рейтингов (с точностью до неизвестных постоянных) получаем субъективные вероятности для двух способов измерения. Важно отметить, что в методе субъективного измерения выбор способа измерения осуществляется априори, поэтому оба способа возможны. Найденные таким образом субъективные вероятности можно сравнивать.

Классическая схема субъективного измерения. В определении классической вероятности понятие симметрии исходов является аксиоматическим и принимается на основании мнения эксперта. Например, при подбрасывании монеты эксперт может интуитивно считать, что стороны монеты достаточно симметричны и будут выпадать с одинаковой вероятностью. Классическое определение вероятности сводит вычисление вероятности к понятию событий, одинаковых по вероятности. Введем понятие величины, которая изменяется равномерно от объекта к объекту, если расположить объекты в порядке возрастания этой величины. Приведем примеры такой величины:

1. Астроном Гиппарх, наблюдая за звездами, разделил их по яркости на шесть величин, где первая величина – самый яркий объект, а шестая – наиболее тусклый [4]. Промежуточные величины он распределил равномерно между оставшимися звездами.
2. Фехнер рассматривал «едва заметные различия» субъективных ощущений [5]. Например, эксперт может сравнивать веса двух объектов. Вес второго объекта увеличивается до тех пор, пока эксперт не скажет «стал больше». Таким образом последовательно строятся объекты, которые упорядочены по возрастанию веса и едва заметно различаются. «Едва заметные различия» Фехнер считал равными потому, что эксперт просто отмечает, когда наступает едва заметное различие, и субъективно для него все различия одинаковы.
3. Терстоун использовал шкалу «равнокажущихся» интервалов для измерения исследуемых психологических и социальных характеристик [5]. Отличительной чертой шкалы Терстоуна является то, что интервалы между показателями соседних высказываний субъективно примерно одинаковы. Такое свойство шкалы достигается за счет метода ее построения.

В приведенных примерах рассматриваются последовательности объектов, величины которых изменяются равномерно (распределены равномерно, имеют «едва заметные различия», принадлежат «равнокажущимся» интервалам). Будем считать, что эксперт может указать последовательность объектов, величины которых изменяются равномерно от объекта к объекту.

Значение величины выражает размер объекта в тех или иных единицах измерения. Субъективное или объективное сравнение размеров опытным путем является единственным способом получения измерительной информации. Основных способов численного сравнения размеров всего два: сравнение разности размеров или отношения размеров величины [3]. Пусть A_1, A_2, …, A_n – конечное число объектов, для которых существует величина X, принимающая значения x_i, $x_i=x(A_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что если величина X изменяется равномерно от объекта к объекту, то разности или отношения последовательных значений величины постоянны. Для определенности будем считать, что значения величины X расположены в порядке возрастания. Это означает, что для первого способа сравнения

$$x_{i+1} - x_i = \lambda,\ x_i,\ x_{i+1} \in R,\ \lambda > 0,$$

для второго способа сравнения

$$x_{i+1}/x_i = \lambda,\ x_i,\ x_{i+1} \in R^+,\ \lambda > 1,$$

где $i=1, 2, \ldots, n-1$, λ – неизвестная постоянная, R – множество всех действительных чисел, R^+ – множество всех положительных чисел. Следовательно, если выбран первый способ сравнения, выполняется

$$x_i - x_j = \lambda_1(r_i - r_j),\ x_i,\ x_j \in R,\ \lambda_1 > 0, \tag{1}$$

если выбран второй способ сравнения, выполняется

$$\ln(x_i/x_j) = \lambda_2(r_i - r_j),\ x_i,\ x_j \in R^+,\ \lambda_2 > 0, \tag{2}$$

где $r_i=i$, $r_j=j$, $i=1, 2, \ldots, n-1$, $j=1, 2, \ldots, n$, λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные.

Функцию $r_i=r(x_i)$ будем называть рейтингом величины X. В данном случае $r_i=i$, r_i – значения рейтинга. Можно сформулировать обратную задачу, найти значения величины X, если на основании субъективных наблюдений известен рейтинг и не определен способ сравнения: (1) или (2).

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечное число объектов, для которых существует величина X, принимающая значения x_i, $x_i=x(A_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Определение 1. Пусть определены значения рейтинга $r_i=r(x_i)=i$, $i=1, 2, \ldots, n$, и не определен способ сравнения. Тогда существуют значения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и значения $v_1, v_2, \ldots, v_n$, такие, что

$$u_i - u_j = \lambda_1(r_i - r_j),\ u_i,\ u_j \in R,\ \lambda_1 > 0; \tag{3}$$

$$\ln(v_i/v_j) = \lambda_2(r_i - r_j),\ v_i,\ v_j \in R^+,\ \lambda_2 > 0, \tag{4}$$

где λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$. Значения $u_i=u(x_i)$ и $v_i=v(x_i)$ будем называть значениями величины X, которые получены различными способами субъективного измерения.

Замечание 1. Последовательность u_i, $i=1, 2, \ldots, n$, является арифметической, а последовательность v_i, $i=1, 2, \ldots, n$, – геометрической.

Таким образом, определена классическая схема субъективного измерения, которую можно обобщить.

Аксиоматическая схема субъективного измерения. Дадим определение рейтинга, используя равенства (1) и (2). Пусть величина X принимает значения x_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. Рейтингом величины X называется функция $r_i=r(x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, такая, что имеют место (1) или (2), где $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные, r_i – значение рейтинга.

Из определения 2 следует, что рейтинг может быть получен различными способами измерения величины X: (1) или (2). Аналогично классической схеме субъективного измерения можно сформулировать обратную задачу – найти величину X, если известны значения рейтинга и не определен способ измерения величины X.

Определение 3. Пусть величина X принимает значения x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, причем для величины X определены значения рейтинга r_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и не определен способ сравнения. Тогда существуют значения $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и значения $v_1, v_2, \ldots, v_n$, такие, что выполняются равенства (3) и (4), где $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные.

Значения $u_i=u(x_i)$ и $v_i=v(x_i)$ будем называть значениями величины X, которые получены различными способами субъективного измерения. Решения систем (3) и (4) всегда существуют, поскольку в качестве решений можно выбрать $u_i=\lambda_1 r_i$ и $\ln(v_i)=\lambda_2 r_i$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Замечание 2. Если величина X изменяется равномерно, то ее рейтинг меняется равномерно, $r_i=i$ и последовательность u_i является арифметической, а последовательность v_i – геометрической. Этот случай соответствует классической схеме субъективного измерения.

Таким образом, определена аксиоматическая схема субъективного измерения с помощью рейтинга величины. Рейтинг величины будем находить методом парных сравнений.

Матрица парных сравнений. Пусть величина X принимает значения x_i, $x_i=x(A_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, тогда существует $r_i=r(x_i)$ – рейтинг величины X. Определим матрицу парных сравнений D с элементами d_{ij}:

$$md_{i,j} = r_i - r_j, \tag{5}$$

где $m>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Предполагается, что элементы $d_{i,j}$ могут быть найдены с помощью интуитивного сравнения размеров объектов A_i и A_j по величине X, $d_{i,j}=d(x_i,x_j)$. Будем считать, что для матрицы парных сравнений D выполняются свойства

$$d_{i,j}= -d_{j,i}; \tag{6}$$

$$d_{i,j}=d_{i,k}+d_{k,j}, \tag{7}$$

где d_{ij}, $d_{i,k}$, $d_{k,j}$ – элементы матрицы парных сравнений D, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Если известна матрица парных сравнений D, которая удовлетворяет условиям (6) и (7), то существует решение системы уравнений (5). Действительно, в качестве решения можно выбрать $r_i=d_{i1}=md(x_i,x_1)$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Если известна матрица парных сравнений D, которая удовлетворяет условиям (6) и (7), то рейтинг определен с точностью до линейного преобразования. Для доказательства достаточно рассмотреть два различных решения системы линейных уравнений (5): r_{1i} , $i=1, 2, \ldots, n$, и r_{2i}, $i=1, 2, \ldots, n$. Решения существуют, поскольку выполняются (6) и (7), тогда $m_1 d_{i,j}=r_{1i} - r_{1j}$, $m_2 d_{i,j}=r_{2i} - r_{2j}$, m_1, m_2 – неизвестные постоянные. Следовательно, $m_1(r_{2i} - r_{21})=m_2(r_{1i} - r_{11})$.

Чтобы найти матрицу парных сравнений, в некоторых случаях можно интуитивно выполнить парные сравнения с помощью вербальной шкалы. Вербальную шкалу использовал Т. Саати (T. Saati) [6], чтобы находить отношения значений рейтингов нефизической величины. Приведем вариант такой шкалы (табл. 1), в которой $d_{i,j}$ – результат субъективного сравнения размеров объектов A_i и A_j по величине X.

Таблица 1

Шкала превосходства, $x_i \geq x_j$

Вербальная оценка	Числовая оценка $d_{i,j}$
Отсутствует	0
Небольшое	2
Большое	4
Очень большое	6
Максимальное	8
Промежуточные значения	1, 3, 5, 7
$x_i \geq x_j$	$d_{i,j} = -d_{j,i}$

Пример. Если превосходство x_2 над x_1 «большое», превосходство x_3 над x_1 «очень большое», то $d_{21} = 4$ и $d_{32} = 6$. Следовательно, $md_{21}=r_2 - r_1=4m$, $md_{32}=r_3 - r_2=6m$. Достаточно найти частное решение: $m=1$, $r_1=0$, $r_2=4$, $r_3=10$. Для значений, найденных способом субъективного измерения (3) и (4), получим $u_2=u_1+4\lambda_1$, $u_3=u_1+10\lambda_1$ и $v_2= v_1(\lambda_2)^4$, $v_3=v_1(\lambda_2)^{10}$; u_1, v_1, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ – неизвестные постоянные.

Аксиома субъективного измерения. Будем считать, что эксперт не в состоянии выбрать способ субъективного измерения. Тем не менее способ измерения может быть выбран исследователем. Например, исследователь предлагает эксперту оценить разность или отношение размеров. В этом случае исследователь выводит эксперта за пределы компетенции, поскольку эксперт не может делить и вычитать значения нефизических величин. Чтобы исследователь мог выбирать способ субъективного измерения и находить значения величины, сформулируем аксиому субъективного измерения.

Пусть определен рейтинг величины и не определен способ субъективного измерения.

Аксиома. *Способ субъективного измерения величины выбирается априори.*

Данное утверждение означает, что для объектов, для которых определен рейтинг и не определен способ измерения, можно произвольно выбрать способ измерения и найти значения величины с помощью равенств (3) или (4). Аксиома отражает особенность метода субъективного измерения. Нефизическая величина существует только в сознании людей. У нее нет измеряемых размеров и, соответственно, нельзя определить способ ее измерения. Эксперт может только найти рейтинг величины. После этого значения величины находятся, хотя и неоднозначно, на основании выбранного способа субъективного измерения. Здесь нет логического противоречия, поскольку значения величины в данном случае – это следствие математической обработки: числа, которые исследователь для удобства приписывает объектам.

В итоге получаем алгоритм метода субъективного измерения:

1. С помощью эксперта определяем элементы матрицы парных сравнений и находим рейтинг величины.
2. Априори выбираем способ измерения.
3. Находим значения величины.

Замечание 3. Способов сравнения существует много, но в теории измерений в качестве основных используют только два: разность и отношение значений [2]. Из соотношений (3) и (4) следует, что если $\lambda_1=\lambda_2$, то имеет место равенство

$$\ln(v_i/v_j) = u_i - u_j, \tag{8}$$

где $v_i, v_j \in R^+$, $u_i, u_j \in R$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$.

Равенство (8) является частным случаем более общего равенства

$$\ln(a/b)=\ln(a) - \ln(b),\ a, b \in R^+,$$

которое в теории групп означает, что группа R^+ по умножению изоморфна группе R по сложению, поэтому деление происходит аналогично вычитанию. Если с точки зрения теории групп изоморфные группы можно не различать, то с позиций субъективного измерения различить изоморфные группы невозможно.

В качестве обоснования аксиомы рассмотрим пример субъективного измерения вероятности. Субъективную вероятность можно интерпретировать как частично определенную вероятностную меру с неопределенным способом измерения.

Субъективная вероятность. Субъективную вероятность будем считать нефизической величиной с априори определяемым способом субъективного измерения. Будем считать, что $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечное число событий из некоторого вероятностного пространства с вероятностями $p_i=P(A_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Пусть с помощью эксперта определен рейтинг вероятности $r_i=r(p_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, и не определен способ измерения. Тогда допустим, что верно

$$u_i - u_j = \lambda_1(r_i - r_j),\ u_i, u_j \in R,\ \lambda_1 > 0, \tag{9}$$

или

$$\ln(v_i/v_j) = \lambda_2(r_i - r_j),\ v_i, v_j \in R^+, \lambda_2 > 0, \tag{10}$$

где $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, $d_{i,j} = r_i - r_j$, λ_1, λ_2 – неизвестные постоянные. Значения $u_i = u(p_i)$ и $v_i = v(p_i)$ будем называть субъективными вероятностями, которые получены различными способами субъективного измерения вероятности P. Если вероятность P изменяется равномерно от события к событию, то $r_i = i$.

Из равенства (9) следует, что $u_i = \lambda_1 r_i+\beta_1$, где λ_1, β_1 – постоянные, которые можно выбрать так, что будет выполняться $0<u_i<1$ для всех $i=1, 2, \dots, n$. Аналогично из (10) $\ln(v_i) = \lambda_2 r_i+\beta_2$ и λ_2, β_2 можно выбрать так, что выполняется $0<v_i<1$ для всех $i=1, 2, \dots, n$. Следовательно, вероятность, полученная различными способами субъективного измерения, «похожа» на объективную вероятность. В качестве примера рассмотрим геометрическую вероятность.

Геометрическая вероятность события A_i – это отношение меры области $\mu(A_i)$ к мере всей области. Элементы матрицы парных сравнений $d_{i,j}$ в данном случае являются результатом субъективного сравнения мер $\mu(A_i)$ и $\mu(A_j)$, $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, n$. В частности, если площадь областей $A_1, A_2, \dots, A_n$ изменяется равномерно, можно выбрать рейтинг $r_i = i$.

Пример. Область состоит из шести непересекающихся кругов (табл. 2, строка 2). При испытании точка случайно попадает в один из них. Требуется найти субъективную вероятность события «попасть в круг A_i».

Таблица 2

Круги, площадь которых изменяется равномерно

r_i	1	2	3	4	5	6
A_i	●	●	●	●	●	●

Чтобы найти вероятность, необходимо знать площади. Пусть исследователь просит эксперта оценить, во сколько раз площадь второго круга больше площади первого круга, и эксперт отвечает «в два раза» (здесь эксперт может назвать любое другое число). Далее, если площади подобраны таким образом, что с точки зрения эксперта они изменяются равномерно, то площадь третьего круга в два раза больше площади второго, площадь четвертого круга в два раза больше площади третьего и т. д. В итоге получим рейтинг площади круга, представленный в табл. 2, строке 1. В данном случае исследователь предложил сравнивать отношения площадей, а эксперт выбрал оценку «больше в два раза».

Пусть теперь исследователь просит оценить, насколько площадь второго круга больше площади первого. Это означает, что исследователь в качестве способа сравнения выбрал разность значений. По условиям эксперимента эксперт не может вычитать размеры площадей (напомним, что субъективно измеренная площадь – это число, которое именно исследователь приписывает каждому объекту на основании рейтинга). Поэтому эксперт может только ответить, например, что превосходство площади второго круга над площадью первого «большое» (значит, разность рейтингов согласно табл. 1 равна числу 4). Далее, поскольку площади кругов изменяются равномерно, эксперт ответит, что превосходство площади третьего круга над площадью второго «большое» и т. д. В этом случае получен рейтинг площади круга (табл. 2, строка 1).

Таким образом, для одних и тех же объектов из табл. 2 рейтинг совпадает, несмотря на разные способы сравнения. Это происходит потому, что эксперт не выполняет операцию деления или вычитания значений величины, а строит последовательность одинаково отличающихся по величине объектов и находит их рейтинг. Эксперт дает фактически один и тот же ответ, несмотря на изменение способа сравнения (способ сравнения в рассматриваемом примере априори указывает исследователь). Таким образом подтверждается аксиома субъективного сравнения. На основании рейтинга $r_i=i$, $i=1, 2, \dots, n$, по формулам (9) и (10) теперь можно определить субъективные вероятности.

Приведенный пример поясняет предлагаемый метод субъективного измерения вероятности. Чтобы получить более весомое подтверждение, обратимся к «настоящим» экспериментам, которые в течение более чем 100 лет проводили психологи. Итогом работы психологов стали закон Фехнера (Fechner), в котором участвуют разности значений субъективной величины, и закон Стивенса (Stevens), в котором сравниваются отношения значений субъективной величины [5].

Субъективная и объективная вероятности. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – конечное число событий из некоторого вероятностного пространства с вероятностями $p_i = P(A_i)$, i=1, 2, …, n, для которых с помощью эксперта определен рейтинг вероятности r_i=$r(p_i)$, i=1, 2, …, n, и не определен способ измерения.

Законы Стивенса и Фехнера связывают физические и соответствующие нефизические величины [5]. В качестве физической величины можно рассматривать объективные вероятности p_i, а в качестве нефизической величины – субъективные вероятности $u(p_i)$ или $v(p_i)$, i=1, 2, …, n.

Закон Фехнера для субъективной вероятности u_i=$u(p_i)$, i =1, 2, …, n, и объективной вероятности p_i, i =1, 2, …, n, имеет вид

$$u_i - u_j = c\ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right), \tag{11}$$

где i=1, 2, …, n, j=1, 2, …, n, c – постоянная.

Закон Стивенса предложен для замены закона Фехнера. Исходя из закона Стивенса зависимость между субъективной вероятностью $v_i = v(p_i)$, i=1, 2, …, n, и объективной вероятностью p_i, i=1, 2, …, n, находится из выражения

$$\frac{v_i}{v_j} = \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{\alpha}, \tag{12}$$

где i=1, 2, …, n, j=1, 2, …, n, α – постоянная.

Подставив (9) в закон Фехнера (11), получим

$$\lambda_1\left(r_i - r_j\right) = c\ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right), \tag{13}$$

где c, λ_1 – постоянные, p_i, p_j – вероятности, i, j=1, 2, …, n. Аналогично согласно закону Стивенса (12) на основании (10)

$$\lambda_2\left(r_i - r_j\right) = \alpha\ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right), \tag{14}$$

i=1, 2, …, n, j=1, 2, …, n, α, λ_2 – постоянные. Видно, что законы Фехнера (11) и Стивенса (12) после перехода к рейтингам совпадают и могут быть записаны в едином виде:

$$\lambda\left(r_i - r_j\right) = \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right), \tag{15}$$

где p_i, p_j – объективные вероятности, r_i, r_j – рейтинги вероятностей, λ>0, λ – постоянная, i=1, 2, …, n, j=1, 2, …, n. Совпадение законов Фехнера и Стивенса подтверждает аксиому субъективного измерения и гипотезу, что «… природа не наделила человека способностью сравнивать между собой разные свойства или их проявления в числовом формате» [3]. Таким образом, обосновывается модель субъективного измерения вероятностей.

Некоторые примеры. Для иллюстрации возможностей метода субъективного измерения вероятности рассмотрим два примера.

Пример 1. Три человека играют в игру, в которой может победить один из участников. Преимущество второго игрока перед первым «небольшое», у третьего по сравнению со вторым – «очень большое». Требуется найти вероятность победы для каждого из участников.

С помощью табл. 1 получим, что $d_{2,1}$=2 и $d_{3,2}$=6. Тогда можно выбрать m=1, r_1=1, r_2=3, r_3=9. Предположительно существует связь между объективной вероятностью и рейтингом, аналогичная закону Фехнера и Стивенса (15):

$$\ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = \lambda\left(r_i - r_j\right), \tag{16}$$

где p_i, p_j – объективные значения вероятности, i, j=1, 2, 3; λ – постоянная, которая может быть определена по результатам статистических испытаний.

Пример 2. Используя рейтинг, можно построить математическую модель встречи двух шахматистов в одной партии. Предположим, что отношение вероятности выигрыша игроком с номером i к вероятности выигрыша игроком с номером j определяется по формуле (15) и зависит от разности рейтингов игроков r_i и r_j:

$$\frac{p_i}{p_j} = q^{r_i - r_j}, \tag{17}$$

где $q=e^{\lambda}$ – постоянная. Тогда вероятность p_{ij} выиграть игроку с номером i у игрока с номером j определяется по формуле

$$p_{ij} = \frac{1}{1+q^{r_i - r_j}}. \tag{18}$$

Для проверки модели (18) можно использовать систему рейтингов Эло [7]. Рейтинги игроков r_i и r_j в системе Эло рассчитывают по специальной методике. Каждой разности рейтингов соответствует своя вероятность выигрыша (табл. 3, первая и вторая колонки).

Таблица 3

Рейтинги Эло (фрагмент)

Разность рейтингов, $r_i - r_j$	Вероятность выигрыша по системе Эло	Разность рейтингов, $r_i - r_j$	Вероятность выигрыша по модели Раша p_{ij}
0–03	0,50	0	0,50
18–25	0,53	25	0,53
47–53	0,57	50	0,57
99–106	0,64	100	0,63
146–153	0,70	150	0,70
198–206	0,76	200	0,75
560–619	0,98	600	0,96
620–734	0,99	700	0,98
735 и более	1,00	900	0,99

Если q=1,0055, то на основании формулы (18) получим математическую модель Раша [7], которая аппроксимирует статистические данные таблицы Эло. В этом случае для разности рейтингов r_i и r_j есть возможность рассчитать вероятность выигрыша по формуле (18). Результат такого расчета вероятностей представлен в табл. 3, третья и четвертая колонки.

Заключение. В работе рассматривается метод субъективного измерения вероятностей. Анализируются законы Фехнера и Стивенса, с помощью которых можно сравнить объективные вероятности, на основании результатов субъективного измерения. Установлено, что при переходе к рейтингу законы Фехнера и Стивенса становятся эквивалентными. Метод субъективного измерения нефизических величин может применяться в теории вероятности, в теории нечетких множеств, для нахождения функции полезности и при экспертном анализе систем.

Список использованных источников

1. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel / Д. М. Левин [и др.]. – 4-е изд. : пер. с англ. – М. : Вильямс, 2004. – 1312 с.
2. Шишкин, И. Ф. Теоретическая метрология : учебник для вузов : в 2 ч. / И. Ф. Шишкин. – СПб. : Питер, 2010. – Ч. 1 : Общая теория измерений. – 192 с.
3. Шишкин, И. Ф. Измерения нефизических величин (измерения в ноосфере) / И. Ф. Шишкин // Экономика качества [Электронный ресурс]. – 2016. – № 2(14). – Режим доступа: www.eq-journal.ru. – Дата доступа: 16.01.2018.
4. Берри, А. Краткая история астрономии / А. Берри ; пер. с англ. С. Г. Займовского. – М. : Гостехиздат, 1946. – 363 с.
5. Гусев, А. Н. Психологические измерения. Теория. Методы / А. Н. Гусев, И. С. Уточкин. – М. : Аспект Пресс, 2011. – 317 с.
6. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий : пер. с англ. / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1989. – 316 с.
7. Карнаухов, В. М. Статистическое моделирование некоторых сегментов учебного процесса / В. М. Карнаухов. – М. : РГАУ-МСХА, 2014. – 208 с.

References

1. Levine D. M., Stephan D., Krehbiel T. C., Berenson M. L. Statistika dlia menedzherov s ispol'zovaniem Microsoft Excel. *Statistics for Managers Using Microsoft Excel*. Moscow, Vil'jams Publ., 2004, 1312 p.
2. Shishkin I. F. Teoreticheskaia metrologiia. *Theoretical Metrology*. *Pt. 1. General Theory of Measurements.* St. Petersburg, Piter Publ, 2010, 192 p. (in Russian).
3. Shishkin I. F. Izmereniia nefizicheskikh velichin (izmereniia v noosfere) [Measurements of not physical quantities (measurements in a noosphere)]. Jekonomika kachestva [*Quality Economy*], 2016, no. 2(14) (in Russian). Available at: www.eq-journal.ru (accessed 16.01.2018).
4. Berri A. Kratkaia istoriia astronomii. *Short History of Astronomy*. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1946, 363 p.
5. Gusev A. N., Utochkin I. S. Psikhologicheskie izmereniia. Teorija. Metody. *Psychological Measurements. Theory. Methods*. Moscow, Aspekt Press Publ., 2011, 317 p. (in Russian).
6. Saati T. Priniatie reshenii. Metod analiza ierarkhii. *Decision Making. Method of the Analysis of Hierarchies*. Moscow, Radio i sviaz Publ., 1989, 316 p.
7. Karnaukhov V. M. Statisticheskoe modelirovanie nekotorykh segmentov uchebnogo protsessa. *Statistical Modeling of Some Segments of Educational Process*. Moscow, RGAU-MSHA Publ., 2014, 208 p. (in Russian).

Информация об авторе

Романчак Василий Михайлович – доцент кафедры «Инженерная математика», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: Romanchak@bntu.by

Information about the author

Vasily M. Romanchak – Associate Professor "Engineering Mathematics", Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Romanchak@ bntu.by