ISSN 1816-0301 (print)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICAL MODELING

УДК 517.958:537.8

Поступила в редакцию 08.01.2018
Received 08.01.2018

В. Т. Ерофеенко

*Учреждение БГУ «НИИ прикладных проблем математики
и информатики», Минск, Беларусь*

МОДЕЛИ БАЗИСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В БИИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Аннотация. Разрабатывается математическая модель, описывающая распространение монохроматических электромагнитных волн в биизотропной матрице, содержащей сферические частицы из материалов с пространственной дисперсией. Моделирование основано на преобразовании интегро-дифференциальных уравнений для биизотропных сред к дифференциальным уравнениям электродинамики, содержащим электрическую и магнитную поляризации в операторном виде с дифференциальным оператором Лапласа. В рамках разработанной модели аналитически строится полная система базисных плоских, сферических и цилиндрических электромагнитных полей, распространяющихся в однородной биизотропной среде с пространственной дисперсией.

Ключевые слова: математические модели, интегро-дифференциальная модель, электромагнитные поля, плоские поля, сферические поля, цилиндрические поля, биизотропные среды, пространственная дисперсия

Для цитирования. Ерофеенко, В. Т. Модели базисных электромагнитных волн в биизотропной среде с пространственной дисперсией / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2018. − Т. 15, № 2. – С. 64–73.

V. T. Erofeenko

*Establishment of BSU "Research Institute of Applied
Mathematics and Informatics", Minsk, Belarus*

MODELS OF BASIC ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE BI-ISOTROPIC MEDIUM WITH SPACE DISPERSION

Abstract. A mathematical models describing the propagation of monochromatic electromagnetic waves in the bi-isotropic medium with space dispersion is being developed. Modeling is based on the transformation of integro-differential equations for bi-isotropic medium to the differential equations electrodynamics, containing electrical and magnetic polarizations in operator form with differential Laplace operator. Within the developed model it is analytically constructed a full system of basic plane, spherical and cylindrical electromagnetic fields extending in the homogeneous bi-isotropic medium with space dispersion.

Keywords: mathematical models, electromagnetic fields, plane fields, spherical fields, cylindrical fields, integro-differential model, bi-isotropic medium, space dispersion

For citation. Erofeenko V. T. Models of basic electromagnetic waves in the bi-isotropic medium with space dispersion. *Informatics*, 2018, vol. 15, no. 2, pp. 64–73 (in Russian).

Введение. В последнее десятилетие активно ведутся теоретические и прикладные исследования метаматериалов, биизотропных, бианизотропных и киральных материалов [1–5], а также электродинамических устройств из них [6–8]. Особое внимание уделяется исследованию плоских экранов, выполненных из биизотропных композитов, которые подвергаются воздействию плоских электромагнитных волн [9–11], полей дипольных источников [12, 13], пучков электромагнитных волн [14] и нестационарных полей [15]. Для прикладных исследований важным также является класс материалов с пространственной дисперсией [16–20]. Построение адекватных математических моделей, описывающих распространение электромагнитных волн в таких средах, представляет значительный научный интерес. Математические модели материалов, обладающих одновременно свойствами биизотропных сред и сред с пространственной дисперсией, не исследованы.

В настоящей статье предложена дифференциальная модель биизотропной среды с пространственной дисперсией, которая позволяет аналитическими методами строить распространяющиеся в среде электромагнитные поля в декартовых, сферических и цилиндрических координатах.

Интегро-дифференциальная модель биизотропной среды с пространственной дисперсией. Рассмотрим пространство R^3 с декартовой системой координат *Oxyz*, заполненное однородной биизотропной матрицей с материальными параметрами: $\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$, $\mu=\mu_r\mu_0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости; $G=G_r/c$, $Z=Z_r/c$ – параметры биизотропности; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные; c – скорость света в вакууме. В матрице случайным образом распределены частицы четырех типов с радиусами $R_j\,(j=1,2,3,4)$, заполненные материалом с пространственной дисперсией. Такую композитную среду из матрицы с частицами будем называть биизотропной средой с пространственной дисперсией (БСПД). Комплексные амплитуды $\vec{E},\vec{H}$ монохроматического электромагнитного поля с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ в такой среде подчиняются уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{H}=-i\omega\left(\varepsilon\vec{E}+G\vec{H}+\vec{P}\right),\ \operatorname{rot}\vec{E}=i\omega\left(\mu\vec{H}+Z\vec{E}+\vec{m}\right),\tag{1}$$

где ω – круговая частота поля.

Электрическая и магнитная поляризации определяются объемными интегралами по пространственным переменным $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$:

$$\vec{P}(\vec{r})=\vec{P}^{(1)}(\vec{r})+\vec{P}^{(2)}(\vec{r})=\frac{\varepsilon_0}{V_1}\int\limits_{D_{1M}}K_1\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|/R_1\right)\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0+\frac{1}{cV_3}\int\limits_{D_{3M}}K_3\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|/R_3\right)\vec{H}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0;\tag{2}$$

$$\vec{m}(\vec{r})=\vec{m}^{(1)}(\vec{r})+\vec{m}^{(2)}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{V_2}\int\limits_{D_{2M}}K_2\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|/R_2\right)\vec{H}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0+\frac{1}{cV_4}\int\limits_{D_{4M}}K_4\left(\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|/R_4\right)\vec{E}(\vec{r}_0)d\vec{r}_0,\tag{3}$$

где $D_{jM}=\left\{\vec{r}_0/\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|<R_j\right\}$ – шар радиуса R_j, описанный вокруг точки $M(x,y,z)$, точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D_{jM}$, $\vec{r}=(x,y,z)$; $V_j=\frac{4}{3}\pi R_j^3$; $K_j(p)$ – заданные функции, определяющие характер пространственной дисперсии, j = 1, 2, 3, 4.

Дифференциальная модель биизотропной среды с пространственной дисперсией. Интегро-дифференциальные уравнения (1)–(3), описывающие распространение электромагнитных волн в БСПД, преобразуем к дифференциальной модели среды. Такое преобразование при моделировании используется, когда радиусы частиц в матрице $R_j<<\lambda_{\text{мат}}$, где $\lambda_{\text{мат}}$ – длина волн в материале матрицы [16, с. 170]. Методику преобразований и итоговые дифференциальные уравнения модели сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *С точностью до величин третьего порядка малости система интегро-дифференциальных уравнений (1)–(3) эквивалентна системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{H}=-i\omega\left(\varepsilon_\Pi\vec{E}+G_\Pi\vec{H}+P_1\Delta\vec{E}+P_2\Delta\vec{H}\right),\\ \operatorname{rot}\vec{E}=i\omega\left(\mu_\Pi\vec{H}+Z_\Pi\vec{E}+m_1\Delta\vec{H}+m_2\Delta\vec{E}\right),\end{gathered}\tag{4}$$

где Δ *– оператор Лапласа,*

$$\varepsilon_\Pi=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r+3\int_0^1 K_1(p)p^2dp\right),\ G_\Pi=\frac{1}{c}\left(G_r+3\int_0^1 K_3(p)p^2dp\right),$$

$$P_1=\frac{\varepsilon_0}{2}R_1^2\int_0^1 K_1(p)p^4dp,\quad P_2=\frac{1}{2c}R_3^2\int_0^1 K_3(p)p^4dp,$$

$$\mu_\Pi=\mu_0\left(\mu_r+3\int_0^1 K_2(p)p^2dp\right),\quad Z_\Pi=\frac{1}{c}\left(Z_r+3\int_0^1 K_4(p)p^4dp\right),$$

$$m_1=\frac{\mu_0}{2}R_2^2\int_0^1 K_2(p)p^4dp,\quad m_2=\frac{1}{2c}R_4^2\int_0^1 K_4(p)p^4dp.$$

Доказательство. Компоненты векторов $\vec{E}(\vec{r}_0)=E_x(\vec{r}_0)\vec{e}_x+E_y(r_0)\vec{e}_y+\vec{E}_z(r_0)\vec{e}_z$, $\vec{H}(\vec{r}_0)==H_x(\vec{r}_0)\vec{e}_x+H_y(\vec{r}_0)\vec{e}_y+H_z(\vec{r}_0)\vec{e}_z$ разложим в ряды Тейлора в окрестности точки M. При этом ограничимся слагаемыми ряда до второго порядка включительно, пренебрегая величинами третьего порядка малости:

$$\begin{aligned}E_\alpha(\vec{r}_0)&=E_\alpha(\vec{r})+\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial x}(x_0-x)+\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial y}(y_0-y)+\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial z}(z_0-z)+\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}(x_0-x)^2+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}(y_0-y)^2+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}(z_0-z)^2\right]+\\&+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}(x_0-x)(y_0-y)+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}(x_0-x)(z_0-z)+\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}(y_0-y)(z_0-z),\\H_\alpha(\vec{r}_0)&=H_\alpha(\vec{r})+\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial x}(x_0-x)+\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial y}(y_0-y)+\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial z}(z_0-z)+\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}(x_0-x)^2+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}(y_0-y)^2+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}(z_0-z)^2\right]+\\&+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}(x_0-x)(y_0-y)+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}(x_0-x)(z_0-z)+\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}(y_0-y)(z_0-z),\end{aligned}\tag{5}$$

где $\alpha=x,y,z.$

Вычислим компоненты $P_\alpha^{(1)}, P_\alpha^{(2)}$ электрической поляризации (2). Подставляя (5) в (2), получим

$$\begin{aligned}P_\alpha^{(1)}(\vec{r})&=\varepsilon_0\Bigg(I_0^{(1)}E_\alpha(\vec{r})+I_1^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial x}+I_2^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial y}+I_3^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial z}+\\&+I_{11}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}+I_{22}^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}+I_{33}^{(1)}\frac{\partial E_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}+I_{12}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}+I_{13}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}+I_{23}^{(1)}\frac{\partial^2 E_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}\Bigg),\\P_\alpha^{(2)}(\vec{r})&=\frac{1}{c}\Bigg(I_0^{(3)}H_\alpha(\vec{r})+I_1^{(3)}\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial x}+I_2^{(3)}\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial y}+I_3^{(3)}\frac{\partial H_\alpha(\vec{r})}{\partial z}+\\&+I_{11}^{(3)}\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x^2}+I_{22}^{(3)}\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial y^2}+I_{33}^{(3)}\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial z^2}+I_{12}^{(3)}\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial y}+I_{13}^{(3)}\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial x\partial z}+I_{23}^{(3)}\frac{\partial^2 H_\alpha(\vec{r})}{\partial y\partial z}\Bigg).\end{aligned}\tag{6}$$

Интегралы, входящие в разложения (6), вычислим аналитически:

$$I_0^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p_j) dr_0 = \kappa_j = 3\int_0^1 K_j(p) p^2 dp,$$

$$I_1^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p)(x_0 - x) d\vec{r}_0 = 0, \quad I_2^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p)(y_0 - y) d\vec{r}_0 = 0,$$

$$I_3^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p)(z_0 - z) d\vec{r}_0 = 0,$$

$$I_{11}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p)(x_0 - x)^2 d\vec{r}_0 = g_j = \frac{1}{2} R_j^2 \int_0^1 K_j(p) p^4 dp, \tag{7}$$

$$I_{22}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p)(y_0 - y)^2 d\vec{r}_0 = g_j, \quad I_{33}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p)(z_0 - z)^2 d\vec{r}_0 = g_j,$$

$$I_{12}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p_j)(x_0 - x)(y_0 - y) d\vec{r}_0 = 0, \quad I_{13}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p_j)(x_0 - x)(z_0 - z) d\vec{r}_0 = 0,$$

$$I_{23}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int_{D_{jM}} K_j(p_j)(y_0 - y)(z_0 - z) d\vec{r}_0 = 0.$$

Подставляя значения интегралов (7) в (6), получим формулы для компонент вектора электрической поляризации:

$$P_\alpha^{(1)}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left(\kappa_1 E_\alpha(\vec{r}) + g_1 \Delta E_\alpha(\vec{r})\right), \; P_\alpha^{(2)}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\left(\kappa_3 H_\alpha(\vec{r}) + g_3 \Delta H_\alpha(\vec{r})\right).$$

Тогда вектор электрической поляризации определяется формулой

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left(\kappa_1 \vec{E}(\vec{r}) + g_1 \Delta \vec{E}(\vec{r})\right) + \frac{1}{c}\left(\kappa_3 \vec{H}(\vec{r}) + g_3 \Delta \vec{H}(\vec{r})\right). \tag{8}$$

После аналогичных преобразований получим формулу для вектора магнитной поляризации

$$\vec{m}(\vec{r}) = \mu_0 \left(\kappa_2 \vec{H}(\vec{r}) + g_2 \Delta \vec{H}(\vec{r})\right) + \frac{1}{c}\left(\kappa_4 \vec{E}(\vec{r}) + g_4 \Delta \vec{E}(\vec{r})\right). \tag{9}$$

Подставляя выражения (8), (9) в уравнения (1), придем к требуемым дифференциальным уравнениям (4).

Базисные плоские электромагнитные поля в биизотропных средах с пространственной дисперсией. Построим полную систему плоских электромагнитных полей, распространяющихся в БСПД вдоль заданного направления в пространстве, т. е. полей $\vec{E}, \vec{H}$, удовлетворяющих уравнениям (4). Поля аналитически выразим через базисные волновые поля [5, с. 96]:

$$\begin{aligned}
&\vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k) = \frac{i}{\lambda}\left(\alpha_2 \vec{e}_x - \alpha_1 \vec{e}_y\right) \Phi(x, y) \exp(\mp vz), \\
&\vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k) = \frac{1}{k}\left(\mp \frac{iv}{\lambda}\left(\alpha_1 \vec{e}_x + \alpha_2 \vec{e}_y\right) + \lambda \vec{e}_z\right) \Phi(x, y) \exp(\mp vz),
\end{aligned} \tag{10}$$

где $\Phi(x, y) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)$, α_1, α_2, k – произвольные комплексные постоянные, $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $0 \le \arg\lambda < \pi$, $v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg v < \frac{\pi}{2}$, k – волновое число, числа α_1, α_2 характеризуют направление распространения поля, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – волновой вектор в свободном пространстве, где $\alpha_1 = k_0 \cos\varphi_0 \sin\theta_0$, $\alpha_2 = k_0 \sin\varphi_0 \sin\theta_0$, $\alpha_3 = k_0 \cos\theta_0$, $0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi_0 < 2\pi$.

Для полей (10) выполнены формулы [5, с. 98]

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{W}^{(\mp 1)} = k\vec{W}^{(\mp 2)}, \quad \operatorname{rot}\vec{W}^{(\mp 2)} = k\vec{W}^{(\mp 1)}, \\ \operatorname{div}\vec{W}^{(\mp 1)} = 0, \ \operatorname{div}\vec{W}^{(\mp 2)} = 0, \quad \Delta\vec{W}^{(\mp j)} = -k^2\vec{W}^{(\mp j)},\end{gathered} \tag{11}$$

так как $\Delta\vec{W} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{W} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{W}$.

Образуем поля для биизотропной среды, комбинируя поля (10):

$$\vec{K}^{(\mp)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k) = \vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k) - \vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k). \tag{12}$$

Из соотношений (11) следуют формулы для поля (12):

$$\operatorname{div}\vec{K}^{(\mp)} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{K}^{(\mp)} = -k\vec{K}^{(\mp)}, \ \Delta\vec{K}^{(\mp)} = -k^2\vec{K}^{(\mp)}. \tag{13}$$

Построим электромагнитное поле в БСПД вида

$$\vec{E} = E_0\vec{K}^{(\mp)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k), \ \vec{H} = pE_0\vec{K}^{(\mp)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k), \tag{14}$$

где k, p – постоянные, подлежащие определению; E_0 – постоянная с физической размерностью $[E_0] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$, $|E_0| = 1$.

Подставим поля (14) в уравнения (4). Из первого уравнения с учетом формул (13) получим соотношение

$$ip\frac{k}{\omega} + \varepsilon_\Pi + pG_\Pi = k^2(P_1 + pP_2). \tag{15}$$

Из второго уравнения (4) следует

$$-i\frac{k}{\omega} + p\mu_\Pi + Z_\Pi = k^2(m_2 + pm_1). \tag{16}$$

Разделим уравнение (15) на (16) и исключим k^2. После соответствующих преобразований выразим k через величину p:

$$k = i\omega\frac{a_2p^2 + a_1p + a_0}{b_2p^2 + b_1p + b_0}, \tag{17}$$

где

$$a_0 = \varepsilon_\Pi m_2 - Z_\Pi P_1, \ a_1 = m_2G_\Pi + \varepsilon_\Pi m_1 - \mu_\Pi P_1 - Z_\Pi P_2,$$

$$a_2 = m_1G_\Pi - \mu_\Pi P_2, \ b_0 = P_1, \ b_1 = m_2 + P_2, \ b_2 = m_1.$$

Подставив (17) в соотношение (16), получим алгебраическое уравнение пятой степени относительно величины p:

$$\begin{gathered}\left(Z_{\Pi}+p\mu_{\Pi}\right)\left(b_2p^2+b_1p+b_0\right)^2+\left(a_2p^2+a_1p+a_0\right)\left(b_2p^2+b_1p+b_0\right)+\\+\omega^2\left(m_2+pm_1\right)\left(a_2p^2+a_1p+a_0\right)=0.\end{gathered}\tag{18}$$

Уравнение (18) имеет пять корней $p=p_s,\ s=1,2,3,4,5,$ в общем случае комплексных. С помощью формулы (17) определим значения волнового числа $k=k_s,\ s=1,2,3,4,5$. Значения p_s, k_s определяют электромагнитные поля (14). Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Плоские электромагнитные поля, распространяющиеся в биизотропной среде с пространственной дисперсией, удовлетворяют уравнениям (4) и определяются формулами*

$$\vec{E}=E_0\vec{K}^{(\mp s)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2),\ \vec{H}=p_sE_0\vec{K}^{(\mp s)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2),\ \ s=1,2,3,4,5,\tag{19}$$

где

$$\vec{K}^{(\mp s)}=\vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_s)-\vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_s),$$

$$\vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_s)=\frac{i}{\lambda}\left(\alpha_2\vec{e}_x-\alpha_1\vec{e}_y\right)\Phi(x,y)\exp(\mp v_sz),$$

$$\vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_s)=\frac{1}{k_s}\left(\mp\frac{iv_s}{\lambda}\left(\alpha_1\vec{e}_x+\alpha_2\vec{e}_y\right)+\lambda\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)\exp(\mp v_sz),$$

$v_s=\sqrt{\lambda^2-k_s^2},\ -\frac{\pi}{2}\le\arg v_s<\frac{\pi}{2}.$

Коэффициенты p_j являются корнями уравнения

$$B_5p^5+B_4p^4+B_3p^3+B_2p^2+B_1p+B_0=0,\tag{20}$$

где

$$B_5=\mu_{\Pi}b_2^2+\omega^2m_1a_2^2,\ B_4=b_2^2Z_{\Pi}+b_2\left(a_2+2\mu_{\Pi}b_1\right)+\omega^2a_2\left(m_2a_2+2m_1a_1\right),$$

$$B_3=a_1b_2+b_1a_2+\mu_{\Pi}b_1^2+2b_2\left(b_1Z_{\Pi}+\mu_{\Pi}b_0\right)+\omega^2\left(m_1a_1^2+2m_1a_0a_2+2m_2a_1a_2\right),$$

$$B_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0+b_1^2Z_{\Pi}+2b_0\left(b_2Z_{\Pi}+\mu_{\Pi}b_1\right)+\omega^2\left(m_2a_1^2+2m_1a_0a_1+2m_2a_0a_2\right),$$

$$B_1=a_0b_1+a_1b_0+\mu_{\Pi}b_0^2+2b_0b_1Z_{\Pi}+\omega^2a_0\left(m_1a_0+2m_2a_1\right),$$

$$B_0=a_0b_0+b_0^2Z_{\Pi}+\omega^2m_2a_0^2.$$

Волновые числа k_s определяются формулой

$$k_s=i\,\omega\frac{a_2p_s^{\ 2}+a_1p_s+a_0}{b_2p_s^2+b_1p_s+b_0}.\tag{21}$$

Базисные сферические электромагнитные поля в биизотропных средах с пространственной дисперсией. Построим аналитически полную систему сферических электромагнитных полей в сферической системе координат $Or\theta\varphi$, распространяющихся в среде и удовлетворяющих уравнениям (4). Поля $\vec{E},\vec{H}$ выразим через базисные сферические волновые поля [5, с. 118]:

$$\begin{gathered}\vec{n}_{mn}(\vec{r},k)=\frac{n(n+1)}{kr}j_n(kr)Y_n^m(\theta,\varphi)\vec{e}_r+g_n(kr)\vec{\Pi}_{mn}(\theta,\varphi),\\ \vec{m}_{mn}(\vec{r},k)=j_n(kr)\vec{T}_{mn}(\theta,\varphi),\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\quad m=0,\ \pm1,\ \ldots,\ \pm n;\end{gathered}\tag{22}$$

$$\tilde{\tilde{\vec{n}}}_{mn}(\vec{r},k)=\frac{n(n+1)}{kr}h_n^{(1)}(kr)Y_n^m(\theta,\varphi)\vec{e}_r+g_n^{(1)}(kr)\vec{\Pi}_{mn}(\theta,\varphi),$$
$$\tilde{\tilde{\vec{m}}}_{mn}(\vec{r},k)=h_n^{(1)}(kr)\vec{T}_{mn}(\theta,\varphi),\quad n=1,\ 2,\ \ldots,\quad m=0,\ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n, \tag{23}$$

где k – волновое число, $Y_n^m(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$, $j_n(x), h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Бесселя, $P_n^m(x)$ – присоединенная функция Лежандра,

$$g_n(x)=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(xj_n(x)),\quad g_n^{(1)}(x)=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(xh_n^{(1)}(x)\right),$$

$$\vec{\Pi}_{mn}(\theta,\varphi)=\left(\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\theta+\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\varphi\right)e^{im\varphi},$$

$$\vec{T}_{mn}(\theta,\varphi)=\left(\frac{im}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}P_n^m(\cos\theta)\vec{e}_\varphi\right)e^{im\varphi}.$$

Для полей (22) выполнены соотношения

$$\mathrm{rot}\,\vec{n}_{mn}=k\vec{m}_{mn},\quad \mathrm{rot}\,\vec{m}_{mn}=k\vec{n}_{mn},\quad \mathrm{div}\,\vec{n}_{mn}=0,$$
$$\mathrm{div}\,\vec{m}_{mn}=0,\quad \Delta\vec{n}_{mn}=-k^2\vec{n}_{mn},\quad \Delta\vec{m}_{mn}=-k^2\vec{m}_{mn}. \tag{24}$$

Аналогичные соотношения выполнены и для полей (23).

Построим поля в биизотропной среде, комбинируя поля (22) [5, с.121]:

$$\vec{K}_{mn}(\vec{r},k)=\vec{n}_{mn}(\vec{r},k)-\vec{m}_{mn}(\vec{r},k). \tag{25}$$

Аналогично

$$\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}(\vec{r},k)=\tilde{\tilde{\vec{n}}}_{mn}(\vec{r},k)-\tilde{\tilde{\vec{m}}}_{mn}(\vec{r},k). \tag{26}$$

Из соотношений (24) следуют формулы

$$\mathrm{div}\,\vec{K}_{mn}=0,\quad \mathrm{rot}\,\vec{K}_{mn}=-k\vec{K}_{mn},\quad \Delta\vec{K}_{mn}=-k^2\vec{K}_{mn},$$
$$\mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}=0,\quad \mathrm{rot}\,\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}=-k\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn},\quad \Delta\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}=-k^2\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}.$$

Образуем электромагнитные поля в среде БСПД, используя волновые поля (25), (26):

$$\vec{E}=E_0\vec{K}_{mn}(\vec{r},k),\quad \vec{H}=pE_0\vec{K}_{mn}(\vec{r},k); \tag{27}$$

$$\vec{E}=E_0\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}(\vec{r},k),\quad \vec{H}=pE_0\tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}(\vec{r},k), \tag{28}$$

где k, p – постоянные, подлежащие определению.

Подставляя поля (27) в дифференциальные уравнения (4), получим систему алгебраических уравнений (15), (16), из которых следует формула (17) и уравнение (20) для определения постоянных p и k. Аналогичные соотношения справедливы и для электромагнитных полей (28).

Теорема 3. *Сферические электромагнитные поля, распространяющиеся в биизотропной среде с пространственной дисперсией, удовлетворяют уравнениям (4) и определяются формулами*

$$\vec{E}=E_0\vec{K}_{mn}^{(s)}(\vec{r}),\quad \vec{H}=p_sE_0\vec{K}_{mn}^{(s)}(r),\quad s=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

$$\vec{E} = E_0 \tilde{\vec{K}}_{mn}^{(s)}(\vec{r}),\ \vec{H} = p_s E_0 \tilde{\tilde{\vec{K}}}_{mn}^{(s)}(r), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots;\ m = 0,\ \ \pm 1,\ \ldots,\ \pm n,$$

где

$$\vec{K}_{mn}^{(s)}(\vec{r}) = \vec{n}_{mn}(\vec{r}, k_s) - \vec{m}_{mn}(\vec{r}, k_s), \quad \tilde{\vec{K}}_{mn}^{(s)}(\vec{r}) = \tilde{\vec{n}}_{mn}(\vec{r}, k_s) - \tilde{\vec{m}}_{mn}(\vec{r}, k_s),$$

коэффициенты p_s являются корнями уравнения (20), k_s – волновые числа (21).■

Базисные цилиндрические электромагнитные поля в биизотропных средах с пространственной дисперсией. Конструирование электромагнитных полей в цилиндрических координатах $\vec{\rho} = (\rho, \varphi, z)$, аналогичное рассмотренному в предыдущем разделе, приводит к теореме.

Теорема 4. *Цилиндрические электромагнитные поля, распространяющиеся в биизотропной среде с пространственной дисперсией, удовлетворяют уравнениям (4) и определяются формулами*

$$\vec{E} = E_0 \vec{K}_m^{(\pm s)}(\vec{\rho}), \quad \vec{H} = p_s E_0 \vec{K}_m^{(\pm s)}(\vec{\rho}), \quad m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,$$

где

$$\vec{K}_m^{(\pm s)}(\vec{\rho}) = \vec{M}_m^{(\pm 2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_s) - \vec{M}_m^{(\pm 1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_s), \quad s = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

$$\vec{M}_m^{(\pm 1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_s) = \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) e^{im\varphi \pm \nu_s z},$$

$$\vec{M}_m^{(\pm 2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_s) = \frac{1}{k_s}\left(\pm \nu_s \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) + \lambda J_m(\lambda\rho)\vec{e}_z\right) e^{im\varphi \pm \nu_s z},$$

$$\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) = \frac{im}{\lambda\rho} J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\rho - J'_m(\lambda\rho)\vec{e}_\phi,$$

$$\vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) = J'_m(\lambda\rho)\vec{e}_\rho + \frac{im}{\lambda\rho} J_m(\lambda\rho)\vec{e}_\varphi,$$

$\nu_s = \sqrt{\lambda^2 - k_s^2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg \nu_s < \frac{\pi}{2}$, λ – *произвольная постоянная [5, с. 131, 139],* p_s – *корни уравнения (20),* k_s – *волновые числа (21),* $J_m(\cdot)$ – *функция Бесселя,* $J'_m(\cdot)$ – *производная функции Бесселя.*

Заключение. Разработан метод аналитического построения монохроматических электромагнитных полей, распространяющихся в биизотропной матрице, которая включает среды с пространственной дисперсией. Предложена математическая модель однородной биизотропной среды с пространственной дисперсией. Методика моделирования основана на преобразования интегро-дифференциальной модели к дифференциальной модели уравнений Максвелла с дифференциальными операторами второго порядка. Уравнения разрешены аналитически и построена система независимых пяти прямых и пяти обратных плоских электромагнитных волн, а также сферических и цилиндрических полей, излучаемых источниками. Поля представлены через базисные волновые поля, используемые в классической электродинамике в декартовых, сферических и цилиндрических координатах.

Работа выполнена в соответствии с заданием 1.1.09 государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2016–2020 гг.

Список использованных источников

1. Гуляев, Ю. В. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения / Ю. В. Гуляев, А. Н. Лагарьков, С. А. Никитов // Вестник РАН. – 2008. – Т. 78, № 5. – С. 438–457.

2. Cui, T. J. Metamaterials. Theory, design and applications / T. J. Cui, D. R. Smith, R. Lui. – Springer, 2009. – 367 p.

3. Иванов, О. В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О. В. Иванов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 262 с.

4. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I. V. Lindell [et al.]. – Boston : Artech Hause, 1994. – 324 p.

5. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – М. : Книжный дом «Либроком», 2014. – 304 с.

6. Неганов, В. А. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами / В. А. Неганов, О. В. Осипов. – М. : Радио и связь, 2006. – 280 с.

7. Ерофеенко, В. Т. Многократная фокусировка электромагнитного поля магнитного диполя плоскопараллельной двухслойной линзой из метаматериала / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2016. – № 4(52). – С. 5–19.

8. Ерофеенко, В. Т. Преобразование симметричных волн круглого волновода на бианизотропно-гиротропной перегородке / В. Т. Ерофеенко, А. К. Синицын // Радиотехника и электроника. – 2016. – Т. 61, № 11. – С. 1039–1048.

9. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В. Т. Ерофеенко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.

10. Ерофеенко, В. Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоскослойной структуре из биизотропных материалов / В. Т. Ерофеенко, С. В. Малый // Информатика. – 2012. – № 1(33). – С. 58–65.

11. Ерофеенко, В. Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3(43). – С. 28–43.

12. Ерофеенко, В. Т. Краевая задача проникновения электромагнитных полей дипольных источников через биизотропный экран / В. Т. Ерофеенко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 2. – С. 71–76.

13. Ерофеенко, В. Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2013. – № 4. – С. 113–120.

14. Ерофеенко, В. Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2013. – № 1(37). – С. 5–17.

15. Ерофеенко, В. Т. Взаимодействие экспоненциально затухающих осциллирующих электромагнитных полей с многослойными композитными экранами / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2014. – № 1. – С. 62–67.

16. Виноградов, А. П. Электродинамика композитных материалов / А. П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 208 с.

17. Агранович, В. М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов / В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1979. – 432 с.

18. Силин, Р. А. Обратные волны и пространственная дисперсия / Р. А. Силин, И. Р. Тимошина // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 7. – С. 725–733.

19. Ерофеенко, В. Т. Моделирование распространения электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией / В. Т. Ерофеенко // Информатика. – 2017. – № 3(55). – С. 5–12.

20. Виноградов, А. П. К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике / А. П. Виноградов // Успехи физических наук. – 2002. – Т. 172, № 3. – С. 363–370.

References

1. Gulyaev Yu. V., Lagarkov A. N., Nikitov S. A. Metamaterialy: fundamental'nye issledovanija i perspektivy primenenija [Metamaterials: fundamental research and prospects of application]. Vestnik RAN [*Bulletin of the Russian Academy of Sciences*], 2008, vol. 78, no. 5, pp. 438–457 (in Russian).

2. Cui T. J., Smith D. R., Lui R. *Metamaterials. Theory, Design and Applications*. Springer, 2009, 367 p.

3. Ivanov O. V. Rasprostranenie jelektromagnitnyh voln v anizotropnyh i bianizotropnyh sloistyh strukturah. *Propagation of Electromagnetic Waves in Anisotropic and Bianisotropic Layered Structures*. Ulyanovsk, UlSTU Publ., 2010, 262 p. (in Russian).

4. Lindell I. V., Sihvola A. H., Viitanen A. J., Tretyakov S. A. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-isotropic Media*. Boston, Artech Hause, 1994, 324 p.

5. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. Analiticheskoe modelirovanie v jelektrodinamike. *Analytical Modeling in Electrodynamics*. Moscow, Knizhnyi dom "Librocom" Publ., 2014, 304 p. (in Russian).

6. Neganov V. A., Osipov O. V. Otrazhajushhie, volnovedushhie i izluchajushhie struktury s kiral'nymi jelementami. *Reflecting, Waveguiding and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow, Radio i svyaz Publ., 2006, 280 p. (in Russian).

7. Erofeenko V. T. Mnogokratnaja fokusirovka jelektromagnitnogo polja magnitnogo dipolja ploskoparallel'noj dvuhslojnoj linzoj iz metamateriala [Multiple focusing of the electromagnetic field of a magnetic dipole by a plane-parallel two-layer lens made of metamaterial]. Informatika [*Informatics*], 2016, no. 4(52), pp. 5–19 (in Russian).

8. Erofeenko V. T., Sinitsyn A. K. Preobrazovanie simmetrichnyh voln kruglogo volnovoda na bianizotropno-girotropnoj peregorodke [Transformation of symmetric waves of a circular waveguide on a bianisotropically gyrotropic partition]. Radiotekhnika i elektronika [*Radio Engineering and Electronics*], 2016, vol. 61, no. 11, pp. 1039–1048 (in Russian).

9. Erofeenko V. T., Demidchik V. I., Malyi S. V., Kornev R. V. Proniknovenie jelektromagnitnyh voln cherez kompozitnye jekrany, soderzhashhie ideal'no provodjashhie spirali [Penetration of electromagnetic waves]. Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal [*Journal of Engineering Physics and Thermophysics*], 2011, vol. 84, no. 4, pp. 740–746 (in Russian).

10. Erofeenko V. T., Malyi S. V. Difrakcija ploskoj jelektromagnitnoj volny na ploskoslojnoj strukture iz biizotropnyh materialov [Diffraction of a plane electromagnetic wave on a plane-layer structure of bi-isotropic materials]. Informatika [*Informatics*], 2012, no. 1(33), pp. 58–65 (in Russian).

11. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Jekranirovanie jelektromagnitnyh polej jekranami iz matrichnyh kompozitov, soderzhashhih biizotropnye chasticy [Screening of electromagnetic fields by screens from matrix composites containing bi-isotropic particles]. Informatika [*Informatics*], 2014, no. 3(43), pp. 28–43 (in Russian).

12. Erofeenko V. T. Kraevaja zadacha proniknovenija jelektromagnitnyh polej dipol'nyh istochnikov cherez biizotropnyj jekran [Boundary-value problem of penetration of electromagnetic fields of dipole sources through a bi-isotropic screen]. Vestnik BGU [*Bulletin of the Belarusian State University*. *Ser. 1*], 2012, no. 2, pp. 71–76 (in Russian).

13. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Chislennoe issledovanie vzaimodejstvija jelektromagnitnyh polej jelektricheskogo i magnitnogo dipolej s kompozitnym jekranom [Numerical investigation of the interaction of electromagnetic fields of electric and magnetic dipoles with a composite screen]. Vestsi Natsyianal’nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-tekhnichnykh navuk [*Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Technical Series*], 2013, no. 4, pp. 113–120 (in Russian).

14. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Preobrazovanie puchkov jelektromagnitnyh voln pri prohozhdenii cherez jekran iz kiral'nogo metamateriala [Transformation of beams of electromagnetic waves when passing through a chiral metamaterial screen]. Informatika [*Informatics*], 2013, no. 1(37), pp. 5–17 (in Russian).

15. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Vzaimodejstvie jeksponencial'no zatuhajushhih oscillirujushhih jelektromagnitnyh polej s mnogoslojnymi kompozitnymi jekranami [Interaction of exponentially damped oscillating electromagnetic fields with multilayered composite screens]. Vestnik BGU [*Bulletin of the Belarusian State University*. *Ser. 1*], 2014, no. 1, pp. 62–67 (In Russian).

16. Vinogradov A. P. Jelektrodinamika kompozitnyh materialov. *Electrodynamics of Composite Materials*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2001, 208 p. (in Russian).

17. Agranovich V. M., Ginzburg V. L. Kristallooptika s uchetom prostranstvennoj dispersii i teorija jeksitonov. *Crystal Optics with Allowance for Spatial Dispersion and the Theory of Excitons*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p. (in Russian).

18. Silin R. A., Timoshina I. R. Obratnye volny i prostranstvennaja dispersija [Reverse waves and spatial dispersion]. Radiotekhnika i elektronika [*Radio Engineering and Electronics*], 2012, vol. 57, no. 7, pp. 725–733 (in Russian).

19. Erofeenko V. T. Modelirovanie rasprostranenija jelektromagnitnyh voln v sredah s prostranstvennoj dispersiej [*Modeling the propagation of electromagnetic waves in media with spatial dispersion*]. Informatika [*Informatics*], 2017, no. 3(55), pp. 5–12 (in Russian).

20. Vinogradov A. P. K voprosu o forme material'nyh uravnenij v jelektrodinamike [On the question of the form of material equations in electrodynamics]. Uspekhi fizicheskikh nauk [*Advances in Physical Sciences*], 2002, vol. 172, no. 3, pp. 363–370 (in Russian).

Информация об авторе

Ерофеенко Виктор Тихонович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории математических методов защиты информации, Учреждение Белорусского государственного университета «НИИ прикладных проблем математики и информатики» (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bsu_erofeenko@ tut.by

Information about the author

Viktor T. Erofeenko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, chief research associate of the Research Laboratory of Mathematical Methods of Information Security, Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bsu_erofeenko@tut.by