ИНФОРМАТИКА

2017 **октябрь-декабрь** **№ 4**

УДК 537.8

И.Е. Андрушкевич

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Рассматривается проблема нахождения точных аналитических решений нелинейных уравнений математической физики для моделирования динамических систем и нелинейных физических процессов. Предлагается алгоритм применения обобщенного метода Фурье разделения переменных для построения решений уравнений с частными производными, содержащих линейную часть и нелинейную квадратичную дифференциальную форму, состоящую из суммы произведений степеней неизвестной функции и ее производных. На основе использования предложенного алгоритма строится ряд новых решений уравнения третьего порядка в частных производных с квадратичной нелинейностью.

Введение

Задача нахождения точных решений нелинейных уравнений математической физики является чрезвычайно важной при моделировании динамических систем и нелинейных физических процессов. Обусловлен данный факт прежде всего тем, что точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют механизмы сложных нелинейных эффектов и позволяют понять их физику. Они во многих случаях способствуют формулировке выводов общего характера и достоверному прогнозу динамики исследуемых систем и явлений. Точные решения также используются для тестирования и отработки методов и алгоритмов численных расчетов.

Общие решения нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными удается получить только в исключительных случаях; их значение не следует преувеличивать, так как «*…общее решение может быть бесполезным…*» [1, с. 225]. Поэтому, исследуя нелинейные уравнения, как правило, ограничиваются поиском частных решений. В литературе частные решения нередко именуются точными.

Под точными решениями нелинейных уравнений с частными производными понимают [2]: 1) решения, которые могут быть выражены через элементарные функции; 2) решения в виде квадратур; 3) решения, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями; 4) решения, выражающиеся через решения линейных уравнений с частными производными. В силу ряда причин будем рассматривать только первый и второй типы точных решений.

Как правило, при построении точных решений нелинейных уравнений с частными производными используют следующие основные методы [2]: методы поиска симметрий, основанные на нахождении преобразований, оставляющих инвариантным вид уравнений; прямой метод Кларксона – Крускала (задается общая структура решения, в которое входят произвольные функции); методы дифференциальных связей, основанные на совместном исследовании исходных уравнений и вспомогательных; методы обобщенного и функционального разделения переменных[1]; метод обратной задачи рассеяния, который основан на условии совместимости двух линейных уравнений, совпадающем с заданным нелинейным уравнением; тест Пенлеве для нелинейных уравнений математической физики.

1. Сведение уравнений с частными производными к переопределенным системам обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод разделения переменных, известный ныне как классический метод Фурье, был предложен Ж. д’Аламбером в 1749 г. для решения волнового уравнения. В начале XIX в. этот

[1]Под методом разделения переменных понимается любой метод, позволяющий сопоставлять уравнению в частных производных (их системе) эквивалентную на определенном классе функций систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

метод с достаточной полнотой был развит Ж. Фурье, и только М.В. Остроградскому в 1828 г. удалось его сформулировать в полной общности. Суть метода Фурье заключается в том, что решение линейного дифференциального уравнения с заданными однородным начальным и краевыми условиями ищется как суперпозиция решений, удовлетворяющих краевым условиям и представимых в виде произведения функции от пространственной переменной на функцию от времени. Нахождение таких решений связано с отысканием собственных функций и собственных значений некоторых дифференциальных операторов и последующим разложением функций начальных условий по найденным собственным функциям [3, 4]. Данный подход позволил получить ряд аналитических решений краевых задач для простейших канонических областей: квадрата, круга, цилиндра и т. п. [1, 5, 6].

Отметим, что, несмотря на привлекательность метода Фурье, его возможности весьма ограничены. По этой причине ряд исследователей прилагали много усилий для решения задачи развития, улучшения и обобщения метода разделения переменных. Среди них нельзя не отметить особый вклад Ф.М. Морса, Г. Фешбаха, В.А. Чернятина, М.Х. Мартина, Алана Х. Кука, Д. Бриля, Дж. Уиллера, Г.В. Шишкина, В.Г. Багрова, А.Д. Полянина и других авторов.

На взгляд автора, наиболее перспективными оказались результаты, полученные В.Я. Скоробогатько [7]. Суть подхода В.Я. Скоробогатько заключается в следующем. Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$Lu(x,y)=F(x,y), \tag{1}$$

где $u(x,y)$ – искомая функция; $F(x,y)$ – неоднородность; L – дифференциальный оператор. Предполагается, что функции $u(x,y), F(x,y)$ могут быть представлены в виде суперпозиции произведений функций одной переменной:

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{S} X_i(x)\,Y_i(y),\ F(x,y)=\sum_{i=1}^{K}\tilde{X}_i(x)\,\tilde{Y}_i(y), \tag{2}$$

где функции $X_i(x),\ i=\overline{1,S};\tilde{X}_j(x), j=\overline{1,K}$, равно как и функции $Y_i(y), i=\overline{1,S};\ \tilde{Y}_j(y), j=\overline{1,K}$, являются линейно независимыми (такой вид функций называют «разделенным»). Предполагается также, что и оператор уравнения (1) является «разделяющимся», т. е. существует совокупность операторов L_{ix}, L_{iy} ($i=\overline{1,l}$), таких, что операторы L_{ix} действуют только по переменной x, L_{iy} – по переменной y и для всех функций (2), на которых определен оператор, выполняется равенство

$$LU(x,y)=\sum_{i=1}^{l} L_{ix}(X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,\ X_s(x))L_{iy}(Y_1(y),\ Y_2(y),\ \ldots,\ Y_s(y)). \tag{3}$$

Введя обозначения

$$f_i(x)=L_{ix}(X_1,\ldots,X_s), g_i(y)=L_{iy}(Y_1,\ldots,Y_s), i=\overline{1,l};\ f_i(x)=-\tilde{X}_i, g_i(y)=\tilde{Y}_i, i=\overline{l+1,l+K}, \tag{4}$$

с учетом (3) уравнение (1) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x)g_i(y)=0 \Leftrightarrow \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}=0\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{f}^{\mathrm{T}}=(f_1(x), f_2(x),\ldots, f_N(x)),\ \mathbf{g}^{\mathrm{T}}=(g_1(y), g_2(y),\ldots,g_N(y))$.

Уравнение (5) получило название билинейного функционального [7, 8].

В работе [7] показано, что для нахождения всех решений уравнения (5) необходимо и достаточно решить все системы уравнений вида

$$\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f}=0, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]\mathbf{g}=0; \tag{6}$$

$$\mathbf{I}=\left\|\delta_{i,j}\right\|_{N\times N}, \delta_{i,j}=\begin{cases}1, \ i=j;\\ 0, \ i\neq j,\end{cases} r=\overline{1,N}, \mathbf{A}\left[i^r\right]=\left\|\mathrm{a}_{i,j}\right\|_{N\times N}, \mathrm{a}_{i,j}=\sum_{k\in\{i^r\}}\delta_{i,k}\delta_{k,j}+\sum_{k\in\{i^r\}}\sum_{l\in\{j^r\}}\alpha_{i,j}\delta_{i,l}\delta_{k,j}, \tag{7}$$

где $\alpha_{i,j}$ – произвольные числовые коэффициенты; $\{i^r\},\{j^r\}$ – упорядоченные целочисленные множества, такие, что

$$\begin{aligned}&\left\{i^r\right\}=\left\{i_1,...,i_r\right\},\left\{j^r\right\}=\left\{j_1,...,j_{N-r}\right\}, \left\{i^r\right\}\cap\left\{j^r\right\}=\varnothing,\left\{i^r\right\}\cup\left\{j^r\right\}=\left\{1,...,N\right\},\\ &\left\{i^0\right\}=\varnothing,\left\{j^0\right\}=\left\{1,...,N\right\}, 1\le i_1<...<i_r\le N, 1\le j_1<...<j_{N-r}\le N, r=\overline{1,N}.\end{aligned} \tag{8}$$

В соответствии с [7] любое решение системы (6) может быть представлено в виде

$$\mathbf{f}=\mathbf{A}\left[i^r\right]_{i_1,...i_r}\begin{pmatrix}F_1(x)\\ ...\\ F_r(x)\end{pmatrix}, \ \mathbf{g}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]\right)_{j_1,...j_{N-r}}\begin{pmatrix}G_1(y)\\ ...\\ G_{N-r}(y)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\mathbf{A}\left[i^r\right]_{k_1,...k_S}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]_{k_1,...k_S}$ – матрицы, образованные столбцами $k_1,...,k_S$ матриц $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left[i^r\right]$ соответственно; $F_1(x),...,F_r(x)-$ произвольная линейно независимая система функций, а $G_1(y)$, ..., $G_{N-r}(y)$ – произвольная система функций.

Таким образом, для нахождения всех решений вида (2) уравнения (1) необходимо решить 2^N систем переопределенных обыкновенных дифференциальных уравнений (6) (по количеству различных матриц (7)). Так, при $N=30$ таких систем 1 073 741 824. Заметим также, что каждая система при конкретных r и N содержит $r\cdot(N-r)$ произвольных постоянных $\alpha_{i,j}$, для однозначного определения которых нужны дополнительные условия. И это еще не все сложности, возникающие при попытке использования результатов В.Я. Скоробогатько для решения практических задач: нетривиален вопрос о разделимости функций и операторов.

Казалось бы, проблема сведения дифференциального уравнения с частными производными (1) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений на классе функций (2) решена. Однако сам автор работы критически оценивает свои результаты [7, с. 204, 205]: «В заключение заметим, что… построено общее решение уравнения» (1), «но для применения оно неудобно, поскольку даже при нахождении с его помощью разделенных решений однородных линейных дифференциальных уравнений с частными производными, которые имеют постоянные коэффициенты с двумя независимыми переменными, необходимо решать неоднородные переопределенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольными свободными членами, которые нужно подобрать так, чтобы системы были совместными». «М. Мартин [8] установил необходимые и достаточные условия существования решений…, однако его результаты также не совсем удачны для применения из-за их сложности».

2. Обобщенный метод Фурье разделения переменных

Развивая идеи В.Я. Скоробогатько, удалось в значительной мере улучшить его подход к решению задачи сведения уравнений с частными производными к эквивалентным системам обыкновенных дифференциальных уравнений и предложить метод разделения переменных, называемый обобщенным методом Фурье.

Действительно, вопрос о «разделимости» напрямую связан с вопросом о возможности представления функции нескольких переменных при помощи функций одной переменной. Данная проблема решена в ставших уже классическими работах В.И. Арнольда и А.Н. Колмогорова [9–12].

В 1957 г. В.И. Арнольду удалось показать [9], что любая непрерывная функция n переменных может быть представлена как сумма $3n$ функций, каждая из которых представляет собой суперпозицию, получаемую путем подстановки в функцию двух переменных вместо одного из аргументов функции $n-1$ переменных. В этом же году А.Н. Колмогоров доказал следующую теорему: *для каждого* $n \in N$ *существует* $n(2n+1)$ *непрерывных на* $[0,1]$ *функций* $h_{i,j}(\varsigma_i)$ $(i=1,...,n,\ j=1,...,2n+1)$, *таких, что для любой функции* $F(\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)$, *непрерывной на* $0<\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n \le 1$, *существуют* $2n+1$ *функций* $g_j(u)$, $u=\varsigma_l$, $l=1,\ 2,...,n$, $j=1,\ 2,...,2n+1$, *каждая из которых непрерывна на* R, *причем*

$$F(\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)=\sum_{j=1}^{2n+1}\left(g_j(u)\sum_{i=1}^{n}\left(h_{i,j}(\varsigma_i)\right)\right). \tag{10}$$

Данная теорема означает, что каждую непрерывную функцию $F(\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)$ n действительных переменных ($0 \le \varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n \le 1$) можно представить в виде суммы (внешней суммы формулы (10)) $2n+1$ суперпозиций непрерывных функций $g_j(u)$ одного переменного и суммы (внутренней суммы формулы (10)) n непрерывных функций одного переменного $h_{i,j}(\varsigma_i)$. Функции $h_{i,j}(\varsigma_i)$ являются универсальными и не зависят от $F(\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)$. Функции $g_j(u)$, напротив, однозначно определяются функцией $F(\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)$.

К сожалению, нахождение явного вида функций $h_{i,j}$ в общем случае и g_j конкретно для заданной функции $F(\varsigma_1,\varsigma_2,...,\varsigma_n)$ представляет собой математическую проблему, для которой пока не найдено общего решения. Тем не менее в каждом конкретном случае, как правило, удается найти преобразование функции и (или) преобразование координат. Осуществив эти преобразования, получают разложение вида (10).

Таким образом, в соответствии с теоремой Колмогорова любую непрерывную функцию двух переменных можно представить как

$$u(x,y)=X_1(x)\,Y_1(y)+...+X_S(x)\,Y_S(y),\quad S\le 10\ . \tag{11}$$

Данный факт позволяет считать «разделимыми» операторы достаточно широкого класса дифференциальных уравнений с частными производными. По крайней мере, это утверждение справедливо для уравнений вида

$$L\,\mathrm{U}(x,y)=\sum_i\left(\sum_j A_{i,j}(x,y)\frac{\partial^{i+j}\,\mathrm{U}(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}\right)+\sum_k A_k(x,y)\Pi_k\left(\mathrm{U}(x,y)\right)=\psi(x,y), \tag{12}$$

где $A_{i,j}(x,y)$, $A_k(x,y)$ – заданные функциональные коэффициенты; $\Pi_i(\mathrm{U}(x,y))$ – дифференциальная форма, представляющая собой произведения степеней функции $\mathrm{U}(x,y)$ и ее частных производных.

Развивая подход В.Я. Скоробогатько, удалось доказать следующие теоремы.

Теорема 1 (о подобии матриц билинейных функциональных уравнений) [13, 14]. *Различные матрицы* $\mathbf{A}[i^r]$, *определенные в (7), (8), при совпадении* r *являются подобными.*

Следствие теоремы 1. *Доказанная теорема позволяет ограничиться рассмотрением* N *систем обыкновенных дифференциальных уравнений (6) вместо* 2^N *систем, предписываемых* *работой [7]. Так, при* $N=15$ *теорема уменьшает трудоемкость задачи разделения переменных в 2184 раза, а при* $N=33$ *– в 260 301 048 раз* ($2^N/N$).

Теорема 2 (о приведении матриц $\mathbf{A}[i^r]$ ***к специальному виду)*** [14, 15].

1. В случае если $r<N/2$, *матрица* $\mathbf{A}[i^r]$, *заданная в (7), (8), подобна матрице* $\mathbf{B}[i^r]$, *элементы которой* $\mathbf{b}_{i,j}$ *определены соотношениями*

$$\mathbf{b}_{i,j}=\begin{cases}\delta_{i,j}, & i\in\{i^r\},\, j\in\{i^r\}\,;\\ \beta_{j_m,i_q}\cdot\delta_{p,q}, & i\in\{j_1,\dots,j_m,\dots,j_{N-r}\},\, j\in\{i_1,\dots,i_q,\dots,i_r\},\, p=m-[m/r]r\,;\\ 0, & j\in\{j^r\},\end{cases} \tag{13}$$

где $[m/r]$ *– целая часть частного* m/r; $\beta_{i,j}$ *– произвольные числовые коэффициенты.*

2. В случае если $r>N/2$, *матрица* $\mathbf{A}[i^r]$, *заданная в (7), (8), подобна матрице* $\mathbf{C}[i^r]$, *элементы которой* $\mathbf{c}_{i,j}$ *определены соотношениями*

$$\mathbf{c}_{i,j}=\begin{cases}\delta_{i,j}, & i\in\{i^r\},\, j\in\{i^r\};\\ c_{j_m,i_q}\cdot\delta_{p,m}, & i\in\{j_1,\dots,j_m,\dots,j_{N-r}\},\, j\in\{i_1,\dots,i_q,\dots,i_r\},\, p=q-\left[q/(N-r)\right](N-r);\\ 0, & j\in\{j^r\},\end{cases} \tag{14}$$

где $[q/(N-r)]$ *– целая часть частного* $q/(N-r)$, $c_{i,j}$ *– произвольные числовые коэффициенты.*

Следствие теоремы 2. *Теорема 2 позволяет скорректировать вид матриц* $\mathbf{A}[i^r]$ *в уравнении (6) в сторону значительного уменьшения количества неопределенных коэффициентов разделения: в (7) фигурируют* $(N-r)r$ *коэффициентов* $\alpha_{i,j}$, *тогда как в (13) их* $(N-r)$, *а в (14) –* r.

Полученные результаты позволяют предложить алгоритм построения решений нелинейных уравнений с частными производными на основе реализации обобщенного метода Фурье разделения переменных (рисунок).

3. Новые точные решения уравнения третьего порядка с квадратичной нелинейностью

В работе [16, с. 382] приводятся известные точные решения модельного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-c\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=0. \tag{15}$$

Их три, и они имеют вид

$$u(x,t)=c_1t+c_2+c_3\exp\left(c_1b^{-1}x\right)+c_4x\,; \tag{16}$$

$$u(x,t)=c_1x+c_2+c_3\exp\left(ac_1c^{-1}t\right)+c_4t\,; \tag{17}$$

$$u(x,t)=c_1e^{-a\lambda x}+a^{-1}c\lambda x+c_2e^{\lambda t}-ab\lambda t+c_3, \tag{18}$$

где c_1,c_2,c_3,c_4,λ – произвольные постоянные.

Примем приведенные результаты к сведению и будем исследовать уравнение (15) с применением предложенного алгоритма (реализованного в системе Maple).

1

Исходная задача

Найти решение дифференциального уравнения в частных производных для функции $\mathrm{U}(x,y)$ вида

$$L\,\mathrm{U} = (L_1 + L_2)\mathrm{U} = \sum_i \left(\sum_j A_{i,j}(x,y) \frac{\partial^{i+j}\,\mathrm{U}(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} \right) + \sum_k A_k(x,y)\Pi_k(\mathrm{U}(x,y)) = 0,$$

где $A_{i,j}$, A_k – заданные функциональные коэффициенты, $\Pi_i(\mathrm{U})$ – дифференциальная форма, представляющая собой произведения степеней функции $\mathrm{U}(x,y)$ и ее частных производных

2

Преобразование оператора уравнения к разделенному виду посредством поиска и осуществления замены переменных $(x,y) \leftrightarrow (\xi_1,\xi_2)$ и (или) замены искомой функции $\mathrm{U}(x,y) \leftrightarrow \tilde{u}(x,y) \leftrightarrow u(\xi_1,\xi_2)$, таких, что

$$A_{i,j}(x,y) \leftrightarrow \sum_l {}^l\tilde{F}_{i,j}(\xi_1) \cdot {}^lF_{i,j}(\xi_2), \quad A_k(x,y)\Pi_k(\mathrm{U}(x,y)) \leftrightarrow \sum_m {}^m\tilde{F}_k(\xi_1) \cdot {}^mF_k(\xi_2)\Pi_m(u(\xi_1,\xi_2))$$

3

Выбор конкретного значения S и представление искомой функции в виде $u(\xi_1,\xi_2) = \sum_{k=1}^{S} X_k(\xi_1) Y_k(\xi_2)$

8

4

Преобразование уравнения к виду билинейного функционального $\sum_{i=1}^{N} f_i(\xi_1) g_i(\xi_2) = 0$, вычисление N, выбор размерности базиса $(r \in [1,\ldots,N-1])$

5

Выбор базиса $\mathbf{F}_{1,r} = (f_1,\ldots,f_r)^{\mathrm{T}}$,

построение функциональных матриц-столбцов

$\mathbf{F}_{r+1,N} = (f_{r+1},\ldots,f_N)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{G}_{1,r} = (g_1,\ldots,g_r)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{G}_{r+1,N} = (g_{r+1},\ldots,g_N)^{\mathrm{T}}$

8

6

Построение матрицы коэффициентов разделения $\mathbf{A}_{(N-r)\times r} = \left\|\mathbf{a}_{i,j}\right\|_{(N-r)\times r}$, где

$\mathbf{a}_{i,j} = \alpha_{j_m,i_q} \cdot \delta_{p,q}$, $i \in \{j_1,\ldots,j_m,\ldots j_{N-r}\}$, $j \in \{i_1,\ldots,i_q,\ldots,i_r\}$, $p = m - [m/r]r$, при $r < N/2$

и $\mathbf{a}_{i,j} = \alpha_{j_m,i_q} \cdot \delta_{p,m}$, $i \in \{j_1,\ldots,j_m,\ldots j_{N-r}\}$, $j \in \{i_1,\ldots,i_q,\ldots,i_r\}$, $p = q - [q/(N-r)](N-r)$,

если $r \geq N/2$

7

Построение решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентной исходному нелинейному уравнению с частными производными на классе функций $u(\xi_1,\xi_2) = \sum_{k=1}^{S} X_k(\xi_1) Y_k(\xi_2)$:

по переменной ξ_1 $\mathbf{F}_{r+1,N} = \mathbf{A}_{(N-r)\times r} \cdot \mathbf{F}_{1,r}$, по переменной ξ_2 $\mathbf{G}_{1,r} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{(N-r)\times r} \cdot \mathbf{G}_{r+1,N}$

8

Осуществление обратного преобразования переменных и полученной функции. В случае необходимости вычисления повторяют для иной размерности базиса (начиная с этапа 5) или иного значения параметра S (начиная с этапа 3)

Алгоритм применения обобщенного метода Фурье разделения переменных для решения нелинейных уравнений в частных производных

Перепишем уравнение (15) в виде

$$h\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-b\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-c\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=0, h=\mathrm{const}. \tag{19}$$

Обобщенный метод Фурье-2. В соответствии с алгоритмом принимаем $S=2$,

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{2}\chi_i(x)\tau_i(t)=\chi_1(x)\tau_1(t)+\chi_2(x)\tau_2(t). \tag{20}$$

Тогда вместо (19) получаем (5), где $N=12$, а матрицы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}=\left(-c\chi_1,\ -c\chi_2, h\chi_1\chi_1'', h\chi_2\chi_2'', h\chi_1\chi_2'', h\chi_2\chi_1'', a\chi_1'\chi_1, a\chi_2'\chi_2, a\chi_1'\chi_2, a\chi_2'\chi_1,\ -b\chi_1''',\ -b\chi_2'''\right),\\ \mathbf{g}^{\mathrm{T}}=\left(\tau_1''',\tau_2''',\tau_1\tau_1',\tau_2\tau_2',\tau_2\tau_1',\tau_1\tau_2',\tau_1\tau_1'',\tau_2\tau_2'',\tau_1\tau_2'',\tau_2\tau_1'',\tau_1,\tau_2\right).\end{gathered} \tag{21}$$

В (21) и далее «штрих» означает производную, т. е.

$$\chi'=\frac{d\chi(x)}{dx},\ \ \tau''=\frac{d^2\tau(t)}{dt^2},\ \ \chi'''=\frac{d^3\chi(x)}{dx^3}.$$

Продемонстрируем, как легко можно получить решения (16)–(18). Для этого, конкретизируя вид функции (20), полагаем

$$\chi_1(x)=\chi(x),\ \ \tau_1(t)=1,\ \chi_2(x)=1,\ \ \tau_2(t)=\tau(t). \tag{22}$$

Тогда вместо (21) получим

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}=\left(-c,\ h\chi'',\ a\chi',\ -b\chi'''\right),\ \ \mathbf{g}^{\mathrm{T}}=\left(\tau''',\tau',\tau'',1\right). \tag{23}$$

Пусть $r=1$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений будет иметь вид

$$h\chi''=-\alpha_{2,1}c,\ \ a\chi'=-\alpha_{3,1}c,\ \ b\chi'''=\alpha_{4,1}c;\ \ \tau'''=-\alpha_{2,1}\tau'-\alpha_{3,1}\tau''-\alpha_{4,1}. \tag{24}$$

Решая систему (24), находим

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{4,1}c=0;\ \chi=-ca^{-1}\alpha_{3,1}x+c_1,\ \ \tau=c_2{\alpha_{3,1}}^{-2}e^{-\alpha_{3,1}t}+c_3t+c_4;\ \ c_1,c_2,c_3=\mathrm{const}.$$

Окончательно первое частное решение уравнения (19) будет иметь вид

$$u_1(x,t)=-ca^{-1}\alpha_{3,1}x+c_1+c_2{\alpha_{3,1}}^{-2}e^{-\alpha_{3,1}t}+c_3t. \tag{25}$$

Очевидно, что (25) совпадает с (16) с точностью до обозначения констант.

Выбирая $r=3$, находим еще одно решение, аналогичное (16):

$$u_2(x,t)=c_6b\left(\alpha_{4,2}h\right)^{-1}e^{-\frac{\alpha_{4,2}h}{b}x}+c_7x+c_8-\alpha_{4,2}t;\ c_6,c_7,c_8=\mathrm{const}. \tag{26}$$

Заметим, что если положить в (25), (26) $c_3=c_7=0$, $\alpha_{4,2}=-\alpha_{3,1}ab/h^2/c_2$, то сумма $u_1(x,t)+u_2(x,t)$ также будет решением (19), причем это решение совпадает с (18).

Вернемся к рассмотрению системы (21) без формулировки дополнительных условий. Пусть $r=2$. Соответствующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений после незначительных преобразований будут иметь вид

$$\begin{gathered} h\chi_1''=-\alpha_{3,1}c,\quad h\chi_2''=-\alpha_{4,2}c,\quad h\chi_2''=-\alpha_{5,1}c,\quad h\chi_1''=-\alpha_{6,2}c,\quad a\chi_1'=-\alpha_{7,1}c,\\ a\chi_2'=-\alpha_{8,2}c,\quad a\chi_1'=-\alpha_{9,2}c,\quad a\chi_2'=-\alpha_{10,1}c,\quad b\chi_1'''=\alpha_{11,1}c\chi_1,\quad b\chi_2'''=\alpha_{12,2}c\chi_2; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} \tau_1'''=-\alpha_{3,1}\tau_1\tau_1'-\alpha_{5,1}\tau_2\tau_1'-\alpha_{7,1}\tau_1\tau_1''-\alpha_{10,1}\tau_2\tau_1''-\alpha_{11,1}\tau_1,\\ \tau_2'''=-\alpha_{4,2}\tau_2\tau_2'-\alpha_{6,2}\tau_1\tau_2'-\alpha_{8,2}\tau_2\tau_2''-\alpha_{9,2}\tau_1\tau_2''-\alpha_{12,2}\tau_2. \end{gathered} \tag{28}$$

Совместимость системы (27) приводит к необходимости выполнения тождеств

$$\alpha_{3,1}=\alpha_{4,2}=\alpha_{5,1}=\alpha_{6,2}=\alpha_{11,1}=\alpha_{12,2}=0;\ \alpha_{7,1}=\alpha_{9,2}=-\frac{a}{c}c_1,\ \ \alpha_{8,2}=\alpha_{10,1}=-\frac{a}{c}c_3. \tag{29}$$

В итоге для функций $\chi_1,\ \chi_2$ получаем

$$\chi_1(x)=c_1x+c_2,\ \chi_2(x)=c_3x+c_4, \tag{30}$$

где c_1,c_2,c_3,c_4 – произвольные постоянные, удовлетворяющие условию $c_1c_4-c_2c_3\neq 0$.

Функции $\tau_1(t),\ \tau_2(t)$ будут определяться как решение следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\tau_1'''=\frac{a}{c}c_1\tau_1\tau_1''+\frac{a}{c}c_3\tau_2\tau_1'',\quad \tau_2'''=\frac{a}{c}c_3\tau_2\tau_2''+\frac{a}{c}c_1\tau_1\tau_2''. \tag{31}$$

Решая систему (31), можно получить ряд новых точных аналитических решений уравнения (19). Действительно, пусть $c_3\equiv 0,\ c_1\neq 0,\ c_4\neq 0$. Тогда система (31) примет вид

$$\tau_1'''=\frac{a}{c}c_1\tau_1\tau_1'',\quad \tau_2'''=\frac{a}{c}c_1\tau_1\tau_2'', \tag{32}$$

откуда следует

$$\tau_2(t)=c_5\int\left(\int\exp\left\{\frac{a}{c}c_1\int\tau_1(t)dt\right\}dt\right)dt+c_6t+c_7, \tag{33}$$

где функция $\tau_1(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\tau_1'''=\tau_1\tau_1''ac_1/c. \tag{34}$$

Например, функция

$$\tau_1(t)=\left(-ac_1t+c_8\right)^{-1}3c \tag{35}$$

является решением уравнения (34). В соответствии с (32) функции τ_1, определенной в (35), соответствует функция $\tau_2(t)=\left(2a^2c_1^2\left(-ac_1t+c_8\right)\right)^{-1}c_5+c_6t+c_7,\ c_5,c_6,c_7,c_8=\mathrm{const}$.

Окончательно получаем новое точное решение уравнения (19):

$$u(x,t)=3c\left(c_1x+c_2\right)/\left(c_6-ac_1t\right)+c_3/\left(c_6-ac_1t\right)+c_4t+c_5, \tag{36}$$

где $c_1\neq 0,\ c_1=\mathrm{const}$. Постоянные c_2,c_3,c_3,c_5,c_6 – произвольные.

Аналогичным образом можно получить еще одно решение:

$$u(x,t)=3b\left(c_1t+c_2\right)/\left(c_6-hc_1x\right)+c_3/\left(c_6-hc_1x\right)+c_4x+c_5\,. \tag{37}$$

Пусть далее

$$\tau_1(t)=c_8t+c_9\,, \tag{38}$$

тогда в соответствии с (32) для τ_2 находим

$$\tau_2=c_5\int\left(\int\exp\left\{\frac{a}{c}c_1\left(\frac{c_8}{2}t^2+c_9t+c_{10}\right)\right\}dt\right)dt+c_6t+c_7\,. \tag{39}$$

Таким образом, еще одно из точных решений уравнения (19) будет иметь вид

$$u(x,t)=\left(c_1x+c_2\right)\cdot\left(c_3t+c_4\right)+c_5\int\left(\int\exp\left\{\frac{a}{c}c_1\left(\frac{c_3}{2}t^2+c_4t+c_6\right)\right\}dt\right)dt+c_7t+c_8, \tag{40}$$

где $c_1\neq 0, c_1=\mathrm{const}$. Постоянные $c_2,c_3,c_3,c_5,c_6,c_7,c_8$ – произвольные.

Аналогично получаем еще одно решение

$$u(x,t)=\left(c_1t+c_2\right)\cdot\left(c_3x+c_4\right)+c_5\int\left(\int\exp\left\{\frac{h}{b}c_1\left(\frac{c_3}{2}x^2+c_4x+c_6\right)\right\}dx\right)dx+c_7x+c_8\,. \tag{41}$$

Обобщенный метод Фурье-3. Решения уравнения (19) будем искать в виде

$$u(x,t)=\chi_1(x)\tau_1(t)+\chi_2(x)\tau_2(t)+\chi_3(x)\tau_3(t), \tag{42}$$

тогда вместо (19) получаем (5), где $N=24$, а матрицы $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{f}^{\mathrm{T}}=\left(-c\chi_1,-c\chi_2,-c\chi_3,a\chi_1'\chi_1,a\chi_1'\chi_2,a\chi_1'\chi_3,a\chi_2'\chi_1,a\chi_2'\chi_2,a\chi_2'\chi_3,a\chi_3'\chi_1,a\chi_3'\chi_2,a\chi_3'\chi_3,\right.\\ \left.h\chi_1\chi_1'',h\chi_1\chi_2'',h\chi_1\chi_3'',h\chi_2\chi_1'',h\chi_2\chi_2'',h\chi_2\chi_3'',h\chi_3\chi_1'',h\chi_3\chi_2'',h\chi_3\chi_3'',-b\chi_1''',-b\chi_2''',-b\chi_3'''\right);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}=\left(\tau_1''',\tau_2''',\tau_3''',\tau_1\tau_1'',\tau_1\tau_2'',\tau_1\tau_3'',\tau_2\tau_1'',\tau_2\tau_2'',\tau_2\tau_3'',\tau_3\tau_1'',\tau_3\tau_2'',\tau_3\tau_3'',\right.\\ \left.\tau_1'\tau_1,\ \tau_1'\tau_2,\ \tau_1'\tau_3,\ \tau_2'\tau_1,\ \tau_2'\tau_2,\ \tau_2'\tau_3,\ \tau_3'\tau_1,\ \tau_3'\tau_2,\ \tau_3'\tau_3,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\right).\end{gathered} \tag{43}$$

Пусть $r=3$. В соответствии с алгоритмом (см. рисунок) получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}a\chi_1'=-c\alpha_{4,1}\,,\ a\chi_1'=-c\alpha_{5,2}\,,\ a\chi_1'=-c\alpha_{6,3}\,,\ a\chi_2'=-c\alpha_{7,1}\,,\ a\chi_2'=-c\alpha_{8,2}\,,\ a\chi_2'=-c\alpha_{9,3}\,,\\ a\chi_3'=-c\alpha_{10,1}\,,\ a\chi_3'=-c\alpha_{11,2}\,,\ a\chi_3'=-c\alpha_{12,3}\,,\ h\chi_1''=-c\alpha_{13,1}\,,\\ h\chi_1\chi_2''=-c\alpha_{14,2}\chi_2\,,\ h\chi_1\chi_3''=-c\alpha_{15,3}\chi_3\,,\ h\chi_2\chi_1''=-c\alpha_{16,1}\chi_1\,,\\ h\chi_2''=-c\alpha_{17,2}\,,\ h\chi_2\chi_3''=-c\alpha_{18,3}\chi_3\,,\ h\chi_3\chi_1''=-c\alpha_{19,1}\chi_1\,,\\ h\chi_3\chi_2''=-c\alpha_{20,2}\chi_2\,,\ h\chi_3''=-c\alpha_{21,3}\,,\ b\chi_1'''=c\alpha_{22,1}\chi_1\,,\ b\chi_2'''=c\alpha_{23,2}\chi_2\,,\ b\chi_3'''=c\alpha_{24,3}\chi_3\,;\end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1''' &= -\alpha_{4,1}\tau_1\tau_1'' - \alpha_{7,1}\tau_2\tau_1'' - \alpha_{10,1}\tau_3\tau_1'' - \alpha_{13,1}\tau_1'\tau_1 - \alpha_{16,1}\tau_2'\tau_1 - \alpha_{19,1}\tau_3'\tau_1 - \alpha_{22,1}\tau_1,\\
\tau_2''' &= -\alpha_{5,2}\tau_1\tau_2'' - \alpha_{8,2}\tau_2\tau_2'' - \alpha_{11,2}\tau_3\tau_2'' - \alpha_{14,2}\tau_1'\tau_2 - \alpha_{17,2}\tau_2'\tau_2 - \alpha_{20,2}\tau_3'\tau_2 - \alpha_{23,2}\tau_2,\\
\tau_3''' &= -\alpha_{6,3}\tau_1\tau_3'' - \alpha_{9,3}\tau_2\tau_3'' - \alpha_{12,3}\tau_3\tau_3'' - \alpha_{15,3}\tau_1'\tau_3 - \alpha_{18,3}\tau_2'\tau_3 - \alpha_{21,3}\tau_3'\tau_3 - \alpha_{24,3}\tau_3.
\end{aligned} \tag{45}$$

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (44), (45) являются переопределенными. Найти общие условия их разрешимости, к сожалению, не удается. Однако, если принять

$$\begin{aligned}
&\alpha_{13,1} = \alpha_{14,2} = \alpha_{15,3} = \alpha_{16,1} = \alpha_{17,2} = \alpha_{18,3} = \alpha_{19,1} = \alpha_{20,2} = \alpha_{21,3} = \alpha_{22,1} = \alpha_{23,2} = \alpha_{24,3} = 0,\\
&\alpha_{4,1} = \alpha_{5,2} = \alpha_{6,3} = -ac_1/c, \alpha_{7,1} = \alpha_{8,2} = \alpha_{9,3} = -ac_3/c, \alpha_{10,1} = \alpha_{11,2} = \alpha_{12,3} = -ac_5/c,
\end{aligned} \tag{46}$$

(44), (45) трансформируются к виду

$$\chi_1' = c_1,\ \chi_2' = c_3,\ \chi_3' = c_5; \tag{47}$$

$$\tau_1''' = \frac{a}{c}(c_1\tau_1 + c_3\tau_2 + c_5\tau_3)\tau_1'',\ \tau_2''' = \frac{a}{c}(c_1\tau_1 + c_3\tau_2 + c_5\tau_3)\tau_2'',\ \tau_3''' = \frac{a}{c}(c_1\tau_1 + c_3\tau_2 + c_5\tau_3)\tau_3''. \tag{48}$$

Из (47) следует

$$\chi_1(x) = c_1x + c_2,\ \chi_2(x) = c_3x + c_4,\ \chi_3(x) = c_5x + c_6, \tag{49}$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям линейной независимости функций χ_1, χ_2, χ_3:

$$c_1c_4 - c_3c_2 \neq 0,\ \ c_1c_6 - c_5c_2 \neq 0,\ \ c_5c_4 - c_3c_6 \neq 0. \tag{50}$$

Исследуя системы (47), (48), можно получить некоторые решения уравнения (19). Например, полагая $c_5 \equiv 0$ (что не противоречит требованиям (50)) и выбирая

$$\tau_1(t) = c_7t + c_8, \tag{51}$$

из (48) для τ_2, τ_3 получаем уравнения

$$\tau_2''' = a(c_1c_7t + c_1c_8 + c_3\tau_2)\tau_2''/c; \tag{52}$$

$$\tau_3''' = a(c_1c_7t + c_1c_8 + c_3\tau_2)\tau_3''/c. \tag{53}$$

Можно показать, что функция

$$\tau_2(t) = -\frac{c_1c_7}{c_3}t - \frac{c_1c_8}{c_3} + \frac{c_9}{-ac_3c_9(3c)^{-1}t + c_{10}} \tag{54}$$

является частным решением уравнения (52). Соответственно из (53) для $\tau_3(t)$ получаем

$$\tau_3(t) = c_{12}t + c_{13} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{ac_3c_9}\right)^2 c_{11}\frac{c^2}{-ac_3c_9(3c)^{-1}t + c_{10}}. \tag{55}$$

Окончательно решение уравнения (19), полученное обобщенным методом Фурье-3 при выборе $r=3$, будет иметь вид

$$u(x,t)=(c_2c_8-c_1c_8c_4/c_3+c_6c_5)+\left(c_2c_7-c_1c_7c_4/c_3+c_6{}^2\right)t+ \\ +\left(c_9(c_3x+c_4)+\frac{9c_6c_{11}c^2}{2a^2c_3{}^2c_9{}^2}\right)\Bigg/\left(-\frac{ac_3c_9}{3c}t+c_{10}\right), \tag{56}$$

где $c_1,c_2,...,c_{11}-$ постоянные, удовлетворяющие условиям $c_1\neq 0,\ c_6\neq 0,\ c_3\neq 0,\ c_1c_4-c_3c_2\neq 0$.

Аналогичным образом можно получить и следующее решение:

$$u(x,t)=(c_2c_8-c_1c_8c_4/c_3+c_6c_5)+\left(c_2c_7-c_1c_7c_4/c_3+c_6{}^2\right)x+ \\ +\left(c_9(c_3t+c_4)+\frac{9c_6c_{11}b^2}{2h^2c_3{}^2c_9{}^2}\right)\Bigg/\left(-\frac{hc_3c_9}{3b}x+c_{10}\right). \tag{57}$$

В заключение раздела заметим, что для получения всех возможных решений вида (42) уравнения (19) следует рассмотреть все системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $r=1,\ 2,\ ...,\ 23$.

4. Решение специального вида

Осуществим в (19) замену искомой функции

$$u(x,t)=1/v(x,t). \tag{58}$$

Получаем

$$h\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}v-2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)+a\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}v-2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right)+bv\left(6\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3-6v\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v^2\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)+ \\ +cv\left(6\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^3-6v\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+v^2\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\right)=0. \tag{59}$$

Решение уравнения (59) будем искать в виде

$$v(x,t)=(\chi_1(x)\tau_1(t)+\chi_2(x)\tau_2(t))c_1{}^{-1}, \tag{60}$$

где c_1- некоторая постоянная.

Тогда вместо (59) получаем билинейное функциональное уравнение (5), где $N=34$, а матрицы-функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ представлены в таблице.

i	$\mathbf{f}_i$	$\mathbf{g}_i$
1	$-2\chi_1(\chi_1')^2+\chi_1{}^2\chi_1''$	$hc_1\tau_1'\tau_1{}^2$
2	$-2\chi_2(\chi_2')^2+\chi_2{}^2\chi_2''$	$hc_1\tau_2'\tau_2{}^2$
3	$6b(\chi_1')^3\chi_1+b\chi_1'''\chi_1{}^3-6b\chi_1''\chi_1'\chi_1{}^2$	$\tau_1{}^4$
4	$6b(\chi_2')^3\chi_2+b\chi_2'''\chi_2{}^3-6b\chi_2'\chi_2''\chi_2{}^2$	$\tau_2{}^4$
5	$6(\chi_2')^3\chi_1+18\chi_1'(\chi_2')^2\chi_2-6\chi_1'\chi_2''\chi_2{}^2-$ $-6\chi_2'\chi_1''\chi_2{}^2+3\chi_2'''\chi_1\chi_2{}^2-12\chi_2'\chi_2''\chi_1\chi_2+\chi_1'''\chi_2{}^3$	$b\tau_1\tau_2{}^3$
6	$6(\chi_1')^3\chi_2+18\chi_2'(\chi_1')^2\chi_1-6\chi_2'\chi_1''\chi_1{}^2-$ $-6\chi_1'\chi_2''\chi_1{}^2+3\chi_1'''\chi_2\chi_1{}^2-12\chi_1'\chi_1''\chi_2\chi_1+\chi_2'''\chi_1{}^3$	$b\tau_1{}^3\tau_2$

Окончание таблицы

i	$\mathbf{f}_i$	$\mathbf{g}_i$
7	$\chi_1(\chi_2')^2$	$-2hc_1\tau_1'\tau_2^2$
8	$\chi_2(\chi_1')^2$	$-2hc_1\tau_2'\tau_1^2$
9	$\chi_1'\chi_2^2$	$ac_1\tau_1\tau_2''\tau_2$
10	$\chi_2'\chi_1^2$	$ac_1\tau_1\tau_1''\tau_2$
11	$hc_1\chi_1^2\chi_2''$	$\tau_1'\tau_2\tau_1$
12	$hc_1\chi_2^2\chi_1''$	$\tau_2'\tau_2\tau_1$
13	$\chi_1'\chi_2'\chi_2$	$-4hc_1\tau_2'\tau_1\tau_2$
14	$\chi_1'\chi_2'\chi_1$	$-4hc_1\tau_1'\tau_1\tau_2$
15	$\chi_1'\chi_1\chi_2$	$ac_1\tau_1\tau_1''\tau_2$
16	$\chi_2'\chi_1\chi_2$	$ac_1\tau_1\tau_2''\tau_2$
17	$ac_1\chi_1'\chi_1^2$	$-2\tau_1(\tau_1')^2+\tau_1^2\tau_1''$
18	$ac_1\chi_2'\chi_2^2$	$-2\tau_2(\tau_2')^2+\tau_2^2\tau_2''$
19	χ_1^4	$6c(\tau_1')^3\tau_1+c\tau_1'''\tau_1^3-6c\tau_1'\tau_1''\tau_1^2$
20	χ_2^4	$6c(\tau_2')^3\tau_2+c\tau_2'''\tau_2^3-6c\tau_2'\tau_2''\tau_2^2$
21	$c\chi_1\chi_2^3$	$6(\tau_2')^3\tau_1+18\tau_1'(\tau_2')^2\tau_2-6\tau_1'\tau_2''\tau_2^2-$ $-6\tau_2'\tau_1''\tau_2^2+3\tau_2'''\tau_1\tau_2^2-12\tau_2'\tau_2''\tau_1\tau_2+\tau_1'''\tau_2^3$
22	$c\chi_1^3\chi_2$	$6(\tau_1')^3\tau_2+18\tau_2'(\tau_1')^2\tau_1-6\tau_1'\tau_2''\tau_1^2-$ $-6\tau_2'\tau_1''\tau_1^2+3\tau_1'''\tau_2\tau_1^2-12\tau_1'\tau_1''\tau_1\tau_2+\tau_2'''\tau_1^3$
23	$-ac_1\chi_1'\chi_2^2$	$2\tau_1(\tau_2')^2$
24	$-ac_1\chi_2'\chi_1^2$	$2\tau_2(\tau_1')^2$
25	$hc_1\chi_2''\chi_2\chi_1$	$\tau_1'\tau_2^2$
26	$hc_1\chi_1''\chi_2\chi_1$	$\tau_2'\tau_1^2$
27	$\chi_1'\chi_1\chi_2$	$ac_1\tau_1^2\tau_2''$
28	$\chi_2'\chi_1\chi_2$	$ac_1\tau_2^2\tau_1''$
29	$\chi_2'\chi_1\chi_2$	$-4ac_1\tau_1'\tau_2'\tau_2$
30	$\chi_1'\chi_1\chi_2$	$-4ac_1\tau_1'\tau_2'\tau_1$
31	$\chi_1''\chi_1\chi_2$	$hc_1\tau_1'\tau_2\tau_1$
32	$\chi_2''\chi_2\chi_1$	$hc_1\tau_2'\tau_2\tau_1$
33	$6(\chi_1')^2\chi_2'\chi_2+6(\chi_2')^2\chi_1'\chi_1-2\chi_1'\chi_1''\chi_2^2-2\chi_2'\chi_2''\chi_1^2+$ $+\chi_1'''\chi_1\chi_2^2+\chi_2'''\chi_2\chi_1^2-4\chi_1'\chi_2''\chi_1\chi_2-4\chi_2'\chi_1''\chi_1\chi_2$	$3b\tau_1^2\tau_2^2$
34	$3c\chi_1^2\chi_2^2$	$6(\tau_1')^2\tau_2'\tau_2+6(\tau_2')^2\tau_1'\tau_1-2\tau_1'\tau_1''\tau_2^2-2\tau_2'\tau_2''\tau_1^2+$ $+\tau_1'''\tau_1\tau_2^2+\tau_2'''\tau_2\tau_1^2-4\tau_1'\tau_2''\tau_1\tau_2-4\tau_2'\tau_1''\tau_1\tau_2$

Выбираем $r=16$. Соответствующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений будут иметь достаточно громоздкий вид, поэтому воспроизведем их частично:

$$ac_1\chi_1'\chi_1^2=\alpha_{17,1}\left(-2\chi_1(\chi_1')^2+\chi_1^2\chi_1''\right),\ hc_1\tau_1'\tau_1^2=-\alpha_{17,1}\left(-2\tau_1(\tau_1')^2+\tau_1^2\tau_1''\right); \tag{61}$$

$$ac_1\chi_2'\chi_2^2=\alpha_{18,2}\left(-2\chi_2(\chi_2')^2+\chi_2^2\chi_2''\right),\ hc_1\tau_2'\tau_2^2=-\alpha_{18,2}\left(-2\tau_2(\tau_2')^2+\tau_2^2\tau_2''\right). \tag{62}$$

Общими решениями последних уравнений будут функции

$$\begin{gathered}\chi_1(x)=-\frac{1}{\dfrac{c_2\alpha_{17,1}}{ac_1}\exp\left\{\dfrac{ac_1}{\alpha_{17,1}}x\right\}+c_3},\quad \chi_2(x)=-\frac{1}{\dfrac{c_4\alpha_{18,2}}{ac_1}\exp\left\{\dfrac{ac_1}{\alpha_{18,2}}x\right\}+c_5},\\ \tau_1(t)=\frac{1}{\dfrac{c_6\alpha_{17,1}}{hc_1}\exp\left\{-\dfrac{hc_1}{\alpha_{17,1}}t\right\}-c_7},\quad \tau_2(t)=\frac{1}{\dfrac{c_8\alpha_{18,2}}{hc_1}\exp\left\{-\dfrac{hc_1}{\alpha_{18,2}}t\right\}-c_9},\end{gathered} \tag{63}$$

где $\alpha_{17,1},\alpha_{18,2},c_i-$ произвольные постоянные.

Для обеспечения совместимости всей системы обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно потребовать выполнения следующих условий:

$$\alpha_{18,2}=-\alpha_{17,1},\ c_3=c_5=c_7=c_9=0,\ c_2=c_4=c_6=c_8=1,\ ch^3=ba^3. \tag{64}$$

Тогда функции (63) примут вид

$$\begin{gathered}\chi_1(x)=-\frac{ac_1}{\alpha_{17,1}}\exp\left\{-\frac{ac_1}{\alpha_{17,1}}x\right\},\ \chi_2(x)=\frac{ac_1}{\alpha_{17,1}}\exp\left\{\frac{ac_1}{\alpha_{17,1}}x\right\},\\ \tau_1(t)=\frac{hc_1}{\alpha_{17,1}}\exp\left\{\frac{hc_1}{\alpha_{17,1}}t\right\},\ \tau_2(t)=-\frac{hc_1}{\alpha_{17,1}}\exp\left\{-\frac{hc_1}{\alpha_{17,1}}t\right\}.\end{gathered} \tag{65}$$

Окончательное решение уравнения (19):

$$u(x,t)=-\frac{\alpha^2}{ah}\frac{1}{\exp\left\{-\dfrac{a}{\alpha}x+\dfrac{h}{\alpha}t\right\}+\exp\left\{\dfrac{a}{\alpha}x-\dfrac{h}{\alpha}t\right\}}, \tag{66}$$

где $\alpha-$ произвольная постоянная.

Заключение

В результате проведенных исследований предложен алгоритм применения обобщенного метода Фурье разделения переменных для построения аналитических решений нелинейных уравнений в частных производных. Его применение позволило получить ряд новых решений уравнения третьего порядка с квадратичной нелинейностью. Установлено, что при определенном сочетании параметров ($ch^3=a^3b$) уравнение (19) допускает решение специального вида (66).

Список литературы

1. Курант, Р. Методы математической физики : в 2 т. / Р. Курант, Д. Гильберт ; пер. с англ. Т.Д. Вентцель под ред. О.А. Олейник. – М. : Мир, 1964. – Т. 2 : Уравнения с частными производными. – 830 с.

2. Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.

3. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1969. – 724 с.

4. Корзюк, В.И. Уравнения математической физики / В.И. Корзюк. – Минск : БГУ, 2011. – 459 с.

5. Курант, Р. Методы математической физики. Т. 2 / Р. Курант, Д. Гильберт ; пер. с нем. Ю. Рабиновича и З. Либина. – Л. : Гостехиздат, 1945. – 630 с.

6. Курант, Р. Методы математической физики. Т. 1 / Р. Курант, Д. Гильберт. – М. : Физматлит, 1933. – 538 с.

7. Скоробогатько, В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными / В.Я. Скоробогатько. – Киев : Наукова думка, 1980. – 239 с.

8. Martin, M.H. A generalization of the method of separation of variables / M.H. Martin // J. Ration. Mech. and Anal. – 1953. – JS. 2. – P. 315–327.

9. Арнольд, В.И. О функциях трех переменных / В.И. Арнольд // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 4. – С. 679–681.

10. Колмогоров, А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 5. – С. 953–956.

11. Арнольд, В.И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных / В.И. Арнольд // Математическое просвещение : сб. статей. – 1958. – Вып. 3. – С. 41–61.

12. Гельбаум, Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гельбаум, Д. Олмнстел ; пер. с англ. ; под ред. и с предисловием П.Л. Ульянова. – 2-е изд. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 256 с.

13. Андрушкевич, И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1998. – Т. 3, № 4. – С. 4–17.

14. Андрушкевич, И.Е. Методы разделения переменных в волновых уравнениях / И.Е. Андрушкевич. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 240 с.

15. Андрушкевич, И.Е. Дальнейшее развитие обобщенного метода Фурье разделения переменных / И.Е. Андрушкевич, В.А. Жизневский // Вестник Витебского гос. ун-та им. П.М. Машерова. – 2010. – № 4(58). – С. 21–25.

16. Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М. : Физматлит, 2002. – 432 с.

Поступила 27.09.2017

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: racursj@yandex.ru

I.E. Andrushkevich

A METHOD FOR THE ANALITICAL SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES AND THE ALGORITM FOR SOLVING THE THIRD-ORDER SPECIAL EQUATION

The article considers the problem of the exact analytical solutions finding nonlinear equations of mathematical physics to simulate dynamic systems and nonlinear physical processes. The algorithm of the generalized Fourier method of variables separation for building solutions of nonlinear equations is offered. These equations include linear parts and nonlinear quadratic differential forms consisting of the sum of products of function powers and derivatives. The offered algorithm generates a series of new solutions of third-order partial differential model equations with quadratic nonlinearity.