

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:537.876.4

В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко

**ЭКРАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПЛОСКИМ  
ОДНОСЛОЙНЫМ ЭКРАНОМ ИЗ МАТЕРИАЛОВ  
С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ**

*Разрабатывается методика решения краевой задачи проникновения плоских монохроматических электромагнитных полей через экран, выполненный из материала с пространственной дисперсией. Постановка краевой задачи основывается на использовании дифференциальной математической модели среды с пространственной дисперсией, классических граничных условий непрерывности тангенциальных составляющих полей и дополнительных граничных условий на лицевых поверхностях экрана. Строится аналитическое решение краевой задачи и численно исследуется коэффициент эффективности экранирования, характеризующий ослабление поля при прохождении через экран. Представляются графики эффективности экранирования в зависимости от частоты поля.*

**Введение**

В настоящее время актуальным является конструирование экранов для защиты от воздействия внешних электромагнитных полей, которые используются для решения проблем электромагнитной совместимости технических систем. Тонкостенные экраны и оболочки применяются для ослабления внешних полей в экранируемых областях. Для этого вычисляются коэффициенты эффективности экранирования – величины, указывающие на степень ослабления внешних электромагнитных полей различных типов экранирующей структурой. Актуальным также является исследование электромагнитных свойств композитных материалов [1], поэтому развиваются математические методы моделирования экранов из композитных материалов: изучаются однослойные и многослойные плоские экраны из анизотропных и биизотропных материалов [2, 3], из композитов с проводящими спиралями [4] и биизотропными частицами [5], из фокусирующих материалов [6]; исследуются экранирующие свойства экранов из биизотропных и киральных метаматериалов при воздействии монохроматических электромагнитных полей электрических и магнитных диполей [7, 8], пучков электромагнитных волн [9] и затухающих волн [10]. Одним из классов композитных материалов являются среды с пространственной дисперсией [11–14]. Для изучения таких сред в статье исследуются экранирующие свойства плоского экрана из материала с пространственной дисперсией. Для аналитического решения краевой задачи экранирования использована система линейно независимых базисных плоских электромагнитных полей, число которых вдвое больше, чем в обычных магнитодиэлектрических средах. Выведены дополнительные граничные условия, накладываемые на магнитное поле на плоскостях экрана, которые обеспечивают единственность решения краевой задачи. Численно исследовано электромагнитное поле, проникшее через экран при воздействии внешнего  $TE$ -поляризованного поля.

**1. Экран из материала с пространственной дисперсией**

В пространстве  $R^3$  с электрической и магнитной постоянными  $\epsilon_0, \mu_0$  размещен плоский экран  $D(0 < z < \Delta, -\infty < x, y < \infty)$  толщиной  $\Delta$ ,  $Oxyz$  – декартова система координат. Экран  $D$  ограничен плоскостями  $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$ . Слой экрана выполнен из материала с пространственной дисперсией (рис. 1). В полупространстве  $D_1(z < 0)$  возбуждается первичное монохроматическое электромагнитное поле  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $f$  – частота поля.

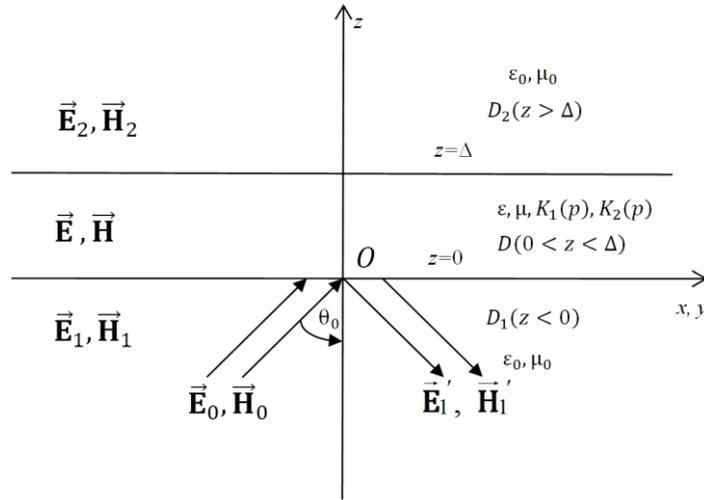


Рис. 1. Экран из материала с пространственной дисперсией под воздействием плоского электромагнитного поля

Обозначим поля:  $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1$  – отраженное поле в области  $D_1$ ;  $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1$ ,  $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$  – суммарное поле в области  $D_1$ ;  $\vec{E}_2, \vec{H}_2$  – поле, проникшее в полупространство  $D_2(z > \Delta)$ ;  $\vec{E}, \vec{H}$  – поле в слое  $D$ . Комплексные амплитуды  $\vec{E}, \vec{H}$  в среде с пространственной дисперсией подчиняются уравнениям

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega(\epsilon \vec{E} + \vec{P}), \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega(\mu \vec{H} + \vec{m}), \quad (1)$$

где электрическая и магнитная поляризации определяются объемными интегралами по пространственным переменным  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ :

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{V_1} \int_{D_{1M}} K_1(|\vec{r} - \vec{r}_0|/R_1) \vec{E}(\vec{r}_0) d\vec{r}_0; \quad (2)$$

$$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{V_2} \int_{D_{2M}} K_2(|\vec{r} - \vec{r}_0|/R_2) \vec{H}(\vec{r}_0) d\vec{r}_0.$$

Здесь  $D_{jM} = \{|\vec{r}_0 - \vec{r}| < R_j\}$  – шар радиуса  $R_j$ , описанный вокруг точки  $M(x, y, z)$ , точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D_{jM}$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$ ;  $V_j = \frac{4}{3} \pi R_j^3$ ;  $K_j(p)$  – заданные функции, определяющие характер пространственной дисперсии;  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $\mu = \mu_0 \mu_r$ ;  $\epsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные.

## 2. Дифференциальная модель среды с пространственной дисперсией

Для решения задачи проникновения электромагнитных волн через экран воспользуемся дифференциальной моделью, предложенной в статье [14]. Уравнения (1), (2), записанные для композитных материалов, состоящих из частиц, размеры которых значительно меньше длины волны, будут иметь вид

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega(\epsilon_{\Pi} \vec{E} + P \Delta \vec{E}), \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega(\mu_{\Pi} \vec{H} + m \Delta \vec{H}) \text{ в } D, \quad (3)$$

где

$$\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_0 \left( \varepsilon_r + 3 \int_0^1 K_1(p) p^2 dp \right), \quad \mu_{\Pi} = \mu_0 \left( \mu_r + 3 \int_0^1 K_2(p) p^2 dp \right),$$

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0 R_1^2 \int_0^1 K_1(p) p^4 dp, \quad m = \frac{1}{2} \mu_0 R_2^2 \int_0^1 K_2(p) p^4 dp.$$

Поля в областях  $D_1$  и  $D_2$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = -i\omega \varepsilon_0 \vec{E}_1, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_1 = i\omega \mu_0 \vec{H}_1 \quad \text{в } D_1; \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_2 = -i\omega \varepsilon_0 \vec{E}_2, \quad \operatorname{rot} \vec{E}_2 = i\omega \mu_0 \vec{H}_2 \quad \text{в } D_2. \quad (5)$$

Для формулировки краевой задачи экранирования воспользуемся классическими граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ :

$$\left( \vec{E}_{1r} - \vec{E}_r \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left( \vec{H}_{1r} - \vec{H}_r \right) \Big|_{z=0} = 0; \quad (6)$$

$$\left( \vec{E}_{2r} - \vec{E}_r \right) \Big|_{z=\Delta} = 0, \quad \left( \vec{H}_{2r} - \vec{H}_r \right) \Big|_{z=\Delta} = 0. \quad (7)$$

Так как уравнения (3) являются дифференциальными уравнениями второго порядка, необходимо ввести дополнительные граничные условия на поверхностях  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

Вторые уравнения формул (3), (4) в окрестности поверхности  $\Gamma_1$  запишем одним уравнением:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_c = i\omega \mu_c \vec{H}_c + \vec{M}, \quad (8)$$

где

$$\vec{E}_c = \vec{E}, \quad \vec{H}_c = \vec{H}, \quad \vec{M} = i\omega m \Delta \vec{H}, \quad \mu_c = \mu_{\Pi} \quad \text{при } z > 0,$$

$$\vec{E}_c = \vec{E}_1, \quad \vec{H}_c = \vec{H}_1, \quad \vec{M} = 0, \quad \mu_c = \mu_0 \quad \text{при } z < 0.$$

Из условия  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  следует  $\Delta \vec{H} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H}$ . Обозначим  $\vec{h} = i\omega m \operatorname{rot} \vec{H}$  при  $z > 0$  и  $\vec{h} = 0$  при  $z < 0$ , тогда уравнение (8) примет вид

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E}_c + \vec{h} \right) = i\omega \mu_c \vec{H}_c. \quad (9)$$

Применяя к уравнению (9) методику вывода граничных условий сопряжения на поверхности  $\Gamma_1$ , предложенную в [13, с. 185, 190], придем к граничному условию, которое связывает поля по обе стороны плоскости  $\Gamma_1$ , обозначаемые знаками  $+$ ,  $-$ :

$$\left[ \vec{n}, \left( \left( \vec{E}_c^+ + \vec{h}^+ \right) - \left( \vec{E}_c^- + \vec{h}^- \right) \right) \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad \vec{n} = \vec{e}_z,$$

или

$$\left[ \vec{n}, \left( \vec{E}_1 - \vec{E} \right) \right] \Big|_{z=0} = i\omega m \left[ \vec{n}, \operatorname{rot} \vec{H} \right] \Big|_{z=0}. \quad (10)$$

Правая часть (10) описывает поверхностные токи магнитных зарядов. В силу их отсутствия положим правую часть равной нулю.

Получим граничное условие

$$\left(\operatorname{rot} \vec{H}\right)_{\tau_{z=0}} = 0, \quad (11)$$

где  $\vec{A}_{\tau} = [\vec{e}_z, [\vec{A}, \vec{e}_z]]$ .

Аналогично для плоскости  $\Gamma_2$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{H}\right)_{\tau_{z=\Delta}} = 0. \quad (12)$$

Сформулируем краевую задачу.

*Краевая задача.* Для заданного первичного поля  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  требуется определить поля  $\vec{E}'_1, \vec{H}'_1; \vec{E}, \vec{H}; \vec{E}_2, \vec{H}_2$ , которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (3)–(5), граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей (6), (7), дополнительным граничным условиям (11), (12) и условиям излучения на бесконечность.

### 3. Аналитическое представление решения краевой задачи для *TE*-поляризованного поля

В качестве первичного плоского поля, падающего на экран  $D$ , выберем *TE*-поле  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  (вектор  $\vec{E}_0$  параллелен экрану  $D$ ). Для задания плоских электромагнитных полей воспользуемся базисными волновыми полями вида [13, с. 96]

$$\vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k) = \frac{ik_0}{\lambda} \vec{V}_1 \Phi(x, y) \exp(\mp \nu z), \quad (13)$$

$$\vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k) = \frac{1}{k} \left( \mp \frac{i\nu}{\lambda} k_0 \vec{V}_2 + \lambda \vec{e}_z \right) \Phi(x, y) \exp(\mp \nu z),$$

где  $k$  – произвольная комплексная постоянная,  $\vec{V}_1 = \frac{1}{k_0} (\alpha \vec{e}_x - \alpha \vec{e}_y)$ ,  $\vec{V}_2 = \frac{1}{k_0} (\alpha \vec{e}_x + \alpha \vec{e}_y)$ ,

$\alpha_1 = k_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0$ ,  $\alpha_2 = k_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ ,  $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} = k_0 \sin \theta_0$ ,

$\nu = \nu(k) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg \nu(k) < \frac{\pi}{2}$ ,  $\Phi(x, y) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)$ .

Поля (13) в вакууме ( $k = k_0$ ) преобразуются к виду

$$\vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_0) = \vec{W}_0^{(\mp 1)}(\vec{r}, k_0) = \frac{i}{\sin \theta_0} \vec{V}_1 \Phi \exp(\pm ik_0 z \cos \theta_0), \quad (14)$$

$$\vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_0) = \vec{W}_0^{(\mp 2)}(\vec{r}, k_0) = \left( \mp \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \vec{V}_2 + \sin \theta_0 \vec{e}_z \right) \Phi \exp(\pm ik_0 z \cos \theta_0).$$

Первичное *TE*-поляризованное электромагнитное поле определим через поля (14):

$$\vec{E}_0 = A \vec{W}_0^{(-1)}(\vec{r}, k_0), \quad \vec{H}_0 = h_0 A \vec{W}_0^{(-2)}(\vec{r}, k_0), \quad (15)$$

где  $h_0 = \frac{1}{iZ_0}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ,  $A$  – заданная амплитуда.

Через поля (14) также определим электромагнитные поля (отраженное и прошедшее через экран  $D$ ):

$$\vec{E}'_1 = x_1 \vec{W}_0^{(+1)}(\vec{r}, k_0), \quad \vec{H}'_1 = h_0 x_1 \vec{W}_0^{(+2)}(\vec{r}, k_0), \quad z < 0; \quad (16)$$

$$\vec{E}_2 = x_2 \vec{W}_0^{(-1)}(\vec{r}, k_0), \quad \vec{H}_2 = h_0 x_2 \vec{W}_0^{(-2)}(\vec{r}, k_0), \quad z > \Delta, \quad (17)$$

где  $x_1, x_2$  – амплитуды, подлежащие определению.

В работе [14] в рамках разработанной автором модели была построена полная система базисных плоских электромагнитных полей, распространяющихся в однородной среде с пространственной дисперсией. Здесь она представлена через волновые поля (13) при  $k = k_+(R_1, R_2, \omega)$  и  $k = k_-(R_1, R_2, \omega)$  [14, формулы (19)]. В результате  $TE$ -поляризованное поле в слое  $D$  аналитически запишем в виде комбинации базисных полей

$$\begin{aligned} \vec{E} &= y_1 \vec{W}^{(-1)}(\vec{r}, k_+) + y_2 \vec{W}^{(+1)}(\vec{r}, k_+) + z_1 \vec{W}^{(-1)}(\vec{r}, k_-) + z_2 \vec{W}^{(+1)}(\vec{r}, k_-), \\ \vec{H} &= y_1 \gamma_+ \vec{W}^{(-2)}(\vec{r}, k_+) + y_2 \gamma_+ \vec{W}^{(+2)}(\vec{r}, k_+) + z_1 \gamma_- \vec{W}^{(-2)}(\vec{r}, k_-) + z_2 \gamma_- \vec{W}^{(+2)}(\vec{r}, k_-), \end{aligned} \quad (18)$$

где коэффициенты  $y_1, y_2, z_1, z_2$  подлежат определению.

Заметим, что поля (15)–(17) удовлетворяют уравнениям Максвелла (4), (5), а поле (18) – уравнениям (3).

#### 4. Граничные условия на экране

Удовлетворяя граничным условиям (6), (7), (11), (12) в совокупности, определим коэффициенты  $x_j, y_j, z_j, j=1, 2$ , полей (16)–(18). Сначала удовлетворим граничным условиям (11), (12). Заметим, что для базисных полей (13) имеют место формулы [13, с. 98]:  $\text{rot} \vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}, k) = k \vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}, k)$ ,  $\text{rot} \vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}, k) = k \vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}, k)$ .

Тогда для поля (18)

$$\text{rot} \vec{H} = \gamma_+ k_+ \left( y_1 \vec{W}^{(-1)}(\vec{r}, k_+) + y_2 \vec{W}^{(+1)}(\vec{r}, k_+) \right) + \gamma_- k_- \left( z_1 \vec{W}^{(-1)}(\vec{r}, k_-) + z_2 \vec{W}^{(+1)}(\vec{r}, k_-) \right),$$

$$\begin{aligned} (\text{rot} \vec{H})_\tau &= \frac{i}{\sin \theta_0} [\gamma_+ k_+ (y_1 \exp(-v_+ z) + y_2 \exp(v_+ z)) + \\ &+ \gamma_- k_- (z_1 \exp(-v_- z) + z_2 \exp(v_- z))] \Phi \vec{V}_1, \end{aligned}$$

где  $v_+ = \sqrt{\lambda^2 - k_+^2}$ ,  $v_- = \sqrt{\lambda^2 - k_-^2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arg v_+$ ,  $v_- < \frac{\pi}{2}$ ,  $\lambda = k_0 \sin \theta_0$ .

Из условия (11) следует

$$\gamma_+ k_+ (y_1 + y_2) + \gamma_- k_- (z_1 + z_2) = 0. \quad (19)$$

Из условия (12) следует

$$\gamma_+ k_+ (y_1 e_-^- + y_2 e_+^+) + \gamma_- k_- (z_1 e_-^- + z_2 e_+^+) = 0, \quad (20)$$

где

$$e_+^- = \exp(-v_+ \Delta), \quad e_+^+ = \exp(v_+ \Delta), \quad e_-^- = \exp(-v_- \Delta), \quad e_-^+ = \exp(v_- \Delta).$$

Для удовлетворения граничным условиям (6), (7) сначала вычислим тангенциальные составляющие полей (15)–(18), а именно

$$\vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{0\tau} + E'_{1\tau} = \frac{i}{\sin \theta_0} (A \exp(ik_0 z \cos \theta_0) + x_1 \exp(-ik_0 z \cos \theta_0)) \Phi \vec{V}_1, \quad (21)$$

$$\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{0\tau} + \vec{H}'_{1\tau} = h_0 \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} (-A \exp(ik_0 z \cos \theta_0) + x_1 \exp(-ik_0 z \cos \theta_0)) \Phi \vec{V}_2;$$

$$\vec{E}_{2\tau} = \frac{ix_2}{\sin \theta_0} \Phi \exp(ik_0 z \cos \theta_0) \vec{V}_1, \quad \vec{H}_{2\tau} = -h_0 x_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_0} \Phi \exp(ik_0 z \cos \theta_0) \vec{V}_2; \quad (22)$$

$$E_\tau = \frac{i}{\sin \theta_0} (y_1 \exp(-v_+ z) + y_2 \exp(v_+ z) + z_1 \exp(-v_- z) + z_2 \exp(v_- z)) \Phi \vec{V}_1, \quad (23)$$

$$H_\tau = \frac{i}{\sin \theta_0} \left( \frac{\gamma_+ v_+}{k_+} (y_2 \exp(v_+ z) - y_1 \exp(-v_+ z)) + \frac{\gamma_- v_-}{k_-} (z_2 \exp(v_- z) - z_1 \exp(-v_- z)) \right) \Phi \vec{V}_2.$$

Подставляя выражения (21), (23) в граничные условия (6), получим уравнения

$$y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = x_1 + A; \quad (24)$$

$$q_+(y_1 - y_2) + q_-(z_1 - z_2) = x_1 - A, \quad (25)$$

где

$$q_+ = \frac{\gamma_+ v_+ Z_0}{k_+ \cos \theta_0}, \quad q_- = \frac{\gamma_- v_- Z_0}{k_- \cos \theta_0}.$$

Далее удовлетворим граничным условиям (7), подставляя выражения (23), (24) в равенства (7). Придем к системе уравнений

$$y_1 e_+^- + y_2 e_+^+ + z_1 e_-^- + z_2 e_-^+ = x_2 F_0; \quad (26)$$

$$q_+(y_2 e_+^+ - y_1 e_+^-) + q_-(z_2 e_-^+ - z_1 e_-^-) = x_2 F_0, \quad (27)$$

где

$$F_0 = \exp(ik_0 \Delta \cos \theta_0).$$

Таким образом, из граничных условий (6), (7), (11), (12) получена система алгебраических уравнений (19), (20), (24)–(27).

### 5. Вычисление амплитуд электромагнитных полей

Вычисление неизвестных амплитуд  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$  электромагнитных полей (16)–(18), определяющих решение краевой задачи экранирования, сведено к решению линейной системы уравнений (19), (20), (24)–(27). Решим систему уравнений аналитически. Разрешая уравнения (19), (20) относительно  $y_1$  и  $y_2$ , получим

$$y_1 = \alpha_{11} z_1 + \alpha_{12} z_2, \quad y_2 = \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2, \quad (28)$$

где

$$\alpha_{11} = q(e_-^- - e_+^+), \quad \alpha_{12} = q(e_-^+ - e_+^-), \quad \alpha_{21} = q(e_+^- - e_-^-), \quad \alpha_{22} = q(e_+^+ - e_-^+), \quad q = \frac{\gamma_- k_-}{2\gamma_+ k_+ \operatorname{sh}(v_+ \Delta)}.$$

Вычитая равенства (24), (25), исключим  $x_1$  и получим соотношение

$$y_1(1 - q_+) + y_2(1 + q_+) + z_1(1 - q_-) + z_2(1 + q_-) = 2A. \quad (29)$$

Аналогично, вычитая равенства (26), (27), придем к соотношению

$$y_1 e_+^-(1 + q_+) + y_2 e_+^+(1 - q_+) + z_1 e_-^-(1 + q_-) + z_2 e_-^+(1 - q_-) = 0. \quad (30)$$

Далее подставим формулы (21) в уравнения (27), (30). Получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\beta_{11} z_1 + \beta_{12} z_2 = 2A, \quad \beta_{21} z_1 + \beta_{22} z_2 = 0, \quad (31)$$

где

$$\beta_{11} = 1 - q_- + \alpha_{11}(1 - q_+) + \alpha_{21}(1 + q_+),$$

$$\beta_{12} = 1 + q_- + \alpha_{12}(1 - q_+) + \alpha_{22}(1 + q_+),$$

$$\beta_{21} = e_-^-(1 + q_-) + \alpha_{11} e_+^-(1 + q_+) + \alpha_{21} e_+^+(1 - q_+),$$

$$\beta_{22} = e_-^+(1 - q_-) + \alpha_{12} e_+^-(1 + q_+) + \alpha_{22} e_+^+(1 - q_+).$$

Разрешая систему уравнений (31), определим амплитуды  $z_1, z_2$ :

$$z_1 = 2A \frac{\beta_{22}}{d}, \quad z_2 = -2A \frac{\beta_{21}}{d}, \quad d = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}. \quad (32)$$

Далее из (28) определим амплитуды  $y_1, y_2$ :

$$y_1 = \frac{2A}{d}(\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{12}\beta_{21}), \quad y_2 = \frac{2A}{d}(\alpha_{21}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{21}). \quad (33)$$

Амплитуда отраженного поля  $x_1$  определяется из формул (24), (32), (33):

$$x_1 = y_1 + y_2 + z_1 + z_2 - A.$$

Для практического использования наибольший интерес представляет амплитуда  $x_2$  поля, прошедшего через экран  $D$ . В соответствии с формулой (26) имеем

$$x_2 = (y_1 e_+^- + y_2 e_+^+ + z_1 e_-^- + z_2 e_-^+) / F_0. \quad (34)$$

### **6. Эффективность экранирования. Вычислительный эксперимент**

На практике для оценки экранирующих свойств экранов используется эффективность экранирования

$$\mathcal{E} = \frac{|\vec{\mathbf{E}}_0|}{|\vec{\mathbf{E}}_2|} = \frac{|A|}{|x_2|}, \quad (35)$$

где  $A$  – амплитуда  $TE$ -поляризованного поля, падающего на экран;  $x_2$  – амплитуда поля, прошедшего через экран; величина  $x_2$  (34) зависит от толщины  $\Delta$ , радиусов частиц  $R_1, R_2$  и круго-

вой частоты  $\omega$  посредством величин  $e_+^-, e_+^+, e_-^-, e_-^+$  (см. (20)), коэффициенты  $y_j, z_j$  также зависят от указанных параметров (см. (32), (33)) и от волновых чисел  $k_+, k_-$ .

Коэффициент (35) означает, во сколько раз ослабевает внешнее электрическое поле (15) при прохождении через плоский экран из области  $D_1$  в область  $D_2$ . Для численного исследования экранирующих свойств экрана с пространственной дисперсией в качестве функций  $K_j(p)$  выберем

$$K_j(p) = M_j \bar{K}_j(p), \quad \bar{K}_j(p) = \frac{\exp(a_j(1-p)) - 1}{\exp(a_j) - 1}, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad j = 1, 2, \quad (36)$$

где  $a_1, a_2, M_1, M_2$  – исходные постоянные, в общем случае комплексные.

Для функций (36) положим  $a_1 = 2, a_2 = 1, M_1 = 1 + i\sigma, M_2 = 1$ . Величину  $\sigma$  будем интерпретировать как безразмерную удельную электрическую проводимость на частоте  $\omega$ , так как в соответствии с формулами (3) для комплексной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{\Pi} = \epsilon_0 \left( \epsilon'_r + i \frac{\sigma_p}{\omega \epsilon_0} \right),$$

где  $\epsilon'_r = \epsilon_r + 3 \int_0^1 \bar{K}_1(p) p^2 dp$ ,  $\sigma_p = 3\omega \epsilon_0 \sigma \int_0^1 \bar{K}_1(p) p^2 dp$  – размерная удельная электрическая проводимость, См/м.

Для первичного поля (15) положим  $A = 1$ , так как амплитуда  $A$  в силу линейности краевой задачи не влияет на эффективность экранирования (35).

В вычислительном эксперименте исследовалась эффективность экранирования  $\mathcal{E}(f)$  (35) экрана из материала с пространственной дисперсией в зависимости от частоты поля  $f$  в диапазоне частот  $10^8 \text{ Гц} \leq f \leq 3 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$  для параметра  $\sigma = \sigma_s$  ( $\sigma_1 = 10^7, \sigma_2 = 10^6, \sigma_3 = 10^5$ ), характеризующего пространственную дисперсию материала экрана.

На графиках рис. 2, б наблюдаются резкие увеличения коэффициента эффективности экранирования при отдельных значениях частоты поля. Кривая 1 ( $\sigma_1 = 10^7$ ) достигает максимума  $\mathcal{E}_{\max} = 1619$  при  $f_1 = 1,251 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ , кривая 2 ( $\sigma_2 = 10^6$ ) –  $\mathcal{E}_{\max} = 513$  при  $f_2 = 3,954 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ , а кривая 3 ( $\sigma_3 = 10^5$ ) –  $\mathcal{E}_{\max} = 163$  при  $f_3 = 12,525 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ . Отсюда следует, что уменьшение значения электрической проводимости приводит к уменьшению максимума эффективности экранирования и смещению его в сторону больших частот.

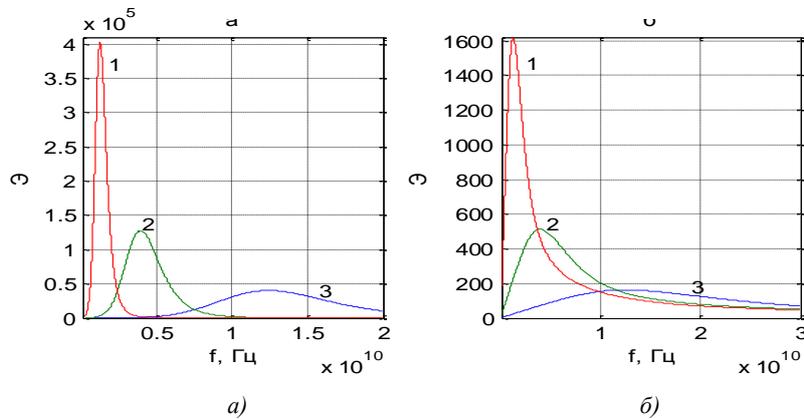


Рис. 2. Резонансные явления для эффективности экранирования плоских электромагнитных полей:

$$a) \Delta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad б) \Delta = 10^{-4} \text{ м}; \quad R_1 = 10^{-4} \text{ м}, R_2 = 10^{-4} \text{ м}, \epsilon_r = 10, \mu_r = 1, \theta_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$1 - \sigma = 10^7, 2 - \sigma = 10^6, 3 - \sigma = 10^5$$

При  $\sigma_0 = 10^8$  максимум эффективности достигается на частоте  $f_0 = 3,954 \cdot 10^8$  Гц. Анализ резонансных частот (см. рис. 2, б) показывает, что для частот, в которых достигается максимум эффективности экранирования, и соответствующих значений проводимости для экрана толщиной  $10^{-4}$  м справедливо эмпирическое соотношение

$$f_s \sqrt{\sigma_s} \approx 3,955 \cdot 10^{12} \text{ Гц}, \quad s = 0, 1, 2, 3.$$

Аналогичное эмпирическое соотношение справедливо и для экрана толщиной  $\Delta = 5 \cdot 10^{-4}$  м (рис. 2, а):  $f_s \sqrt{\sigma_s} \approx 3,936 \cdot 10^{12}$  Гц.

На рис. 3, а показано, что при увеличении угла  $\theta_0$  эффективность экранирования увеличивается, но при этом частота ( $f \approx 4 \cdot 10^8$  Гц), в которой наблюдается всплеск эффективности, практически не изменяется. Отсюда следует вывод, что увеличение угла падения  $\theta_0$  первичного электромагнитного поля на экран приводит к увеличению эффективности экранирования. Это означает, что поток электромагнитной энергии уменьшается при прохождении через экран.

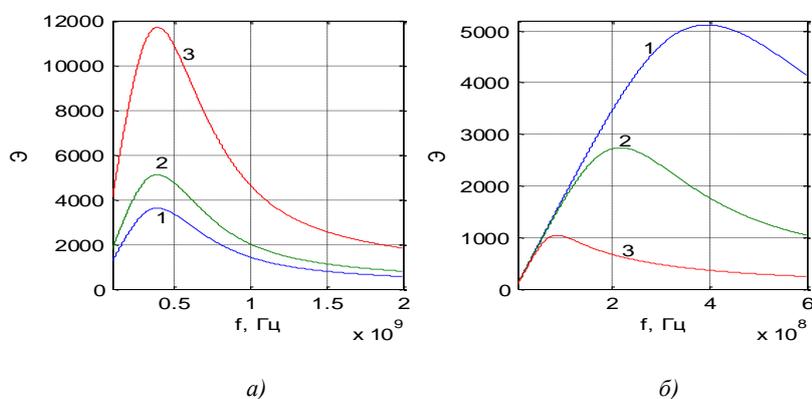


Рис. 3. Эффективность экранирования полей пленочным экраном толщиной  $\Delta = 10^{-4}$  м при различных значениях параметров: а)  $R_1 = 10^{-4}$  м,  $1 - \theta_0 = 0$ ,  $2 - \theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $3 - \theta_0 = \frac{2\pi}{5}$ ;

б)  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $1 - R_1 = 10^{-4}$  м,  $2 - R_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  м,  $3 - R_1 = 6 \cdot 10^{-4}$  м;  $R_2 = 10^{-4}$  м,  $\epsilon_r = 10$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 10^8$

На рис. 3, б видно, что при увеличении радиуса  $R_1$  частицы композита максимум эффективности уменьшается, а частоты, на которых достигаются максимумы, сдвигаются в область низких частот. В частности, при  $R_1 = 10^{-3}$  максимальное значение  $\mathcal{E}_{\max} = 635,394$  достигается на частоте  $f = 5,371 \cdot 10^7$  Гц.

### Заключение

Аналитически решена краевая задача взаимодействия с плоским экраном плоской электромагнитной  $TE$ -поляризованной волны, распространяющейся под произвольным углом к поверхности экрана. Разработаны и использованы дополнительные граничные условия на плоскостях экрана. Решение задачи представлено через комбинации классических базисных плоских электромагнитных полей, распространяющихся в специальных магнитоэлектрических средах. Аналитически вычислена амплитуда электромагнитного поля, прошедшего через экран, и поля, отраженного от экрана с пространственной дисперсией. Материальные характеристики экрана выбраны специальным образом. Численно исследован коэффициент эффективности экранирования, характеризующий ослабление первичного поля при прохождении через экран. Установлены физические закономерности.

Работа выполнена в рамках задания 1.1.09 государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2016–2020 гг.

### Список литературы

1. Виноградов, А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.
2. Иванов, О.В. Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах / О.В. Иванов. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 262 с.
3. Ерофеенко, В.Т. Дифракция плоской электромагнитной волны на плоскостойкой структуре из биизотропных материалов / В.Т. Ерофеенко, С.В. Малый // Информатика. – 2012. – № 1(33). – С. 58–65.
4. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В.Т. Ерофеенко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.
5. Ерофеенко, В.Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3(43). – С. 28–43.
6. Ерофеенко, В.Т. Двухсторонняя фокусировка электромагнитного поля точечного источника плоской линзой из метаматериала / В.Т. Ерофеенко // Информатика. – 2016. – № 1(49). – С. 14–25.
7. Ерофеенко, В.Т. Краевая задача проникновения электромагнитных полей дипольных источников через биизотропный экран / В.Т. Ерофеенко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 2. – С. 71–76.
8. Ерофеенко, В.Т. Численное исследование взаимодействия электромагнитных полей электрического и магнитного диполей с композитным экраном / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-тех. наук. – 2013. – № 4. – С. 113–120.
9. Ерофеенко, В.Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Информатика. – 2013. – № 1(37). – С. 5–17.
10. Ерофеенко, В.Т. Взаимодействие экспоненциально затухающих осциллирующих электромагнитных полей с многослойными композитными экранами / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2014. – № 1. – С. 62–67.
11. Агранович, В.М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов / В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1979. – 432 с.
12. Силин, Р.А. Обратные волны и пространственная дисперсия / Р.А. Силин, И.Р. Тимошина // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 7. – С. 725–733.
13. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.
14. Ерофеенко, В.Т. Моделирование распространения электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией / В.Т. Ерофеенко // Информатика. – 2017. – № 3(55). – С. 5–12.

Поступила 14.09.2017

Учреждение БГУ  
«НИИ прикладных проблем математики  
и информатики»,  
Минск, пр. Независимости, 4  
e-mail: [bsu\\_erofeenko@tut.by](mailto:bsu_erofeenko@tut.by)

Белорусская государственная академия связи,  
Минск, ул. Ф. Скорины, 8, корп. 2  
e-mail: [valbond1949@yandex.ru](mailto:valbond1949@yandex.ru)

---

**V.T. Erofeenko, V.F. Bondarenko****ELECTROMAGNETIC WAVES SHIELDING BY THE PLANE ONE-LAYER  
SCREEN MADE FROM MATERIALS WITH SPACE DISPERSION**

The main idea of the article is the development of the method for solving the boundary-value problem of penetrating the plane monochromatic electromagnetic fields through the screen made from the material with space dispersion. The problem is based on the use of the differential mathematical model of the medium with space dispersion, classical boundary conditions of continuity of the tangential components of the fields and complementary boundary conditions on the face surfaces of the screen. The article gives an analytical solution of the boundary-value problem and examines the ratio of screen performance by the reduction of the field while passing through the screen.