ИНФОРМАТИКА

2017 **июль-сентябрь** **№ 3**

УДК 519.872

В.И. Клименок

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТАНДЕМНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ НА СТАНЦИЯХ

Исследуется стационарное поведение тандемной системы, состоящей из конечного числа многолинейных станций без буферов. В систему поступает марковский поток запросов, каждый из которых должен получить обслуживание на всех станциях тандема. Кроме транзитных запросов, на каждую станцию тандема поступает дополнительный марковский поток запросов, которые должны обслужиться на этой и всех последующих станциях тандема. Времена обслуживания запросов на станциях распределены по экспоненциальному закону с параметрами, зависящими от номера станции. Приводятся алгориты для вычисления стационарного распределения тандема и вероятностей потерь, ассоциированных с тандемом.

Введение

Теория тандемных (многофазных) систем массового обслуживания представляет собой связывающее звено между теорией массового обслуживания и теорией сетей массового обслуживания. Такие системы могут рассматриваться как простейшие случаи сетей массового обслуживания с линейной топологией. Тандемные системы являются популярной темой для исследований [1–3].

Большинство работ, посвященных тандемным системам, ограничиваются рассмотрением двухфазных тандемов со стационарным пуассоновским входящим потоком. В настоящей статье рассматривается тандемная система, состоящая из произвольного конечного числа фаз (станций), представленных многолинейными системами без буферов. В эту систему поступает марковский поток запросов (общепринятая в мировой литературе аббревиатура MAP (Markovian Arrival Process)). Предположение, что процесс поступления запросов определяется как MAP, позволяет учесть коррелированный нестационарный характер информационных потоков в современных телекоммуникационных сетях [4, 5].

Запрос, поступающий в рассматриваемую систему, должен получить последовательное обслуживание на всех станциях тандема. Кроме транзитных запросов, на каждую станцию тандема поступает дополнительный MAP-поток запросов, которые должны обслужиться на этой и всех последующих станциях тандема. В силу отсутствия мест для ожидания на станциях запросы из основного и дополнительных потоков могут быть потеряны на каждой из них. Качество обслуживания в системе определяется в основном вероятностью успешного обслуживания произвольного запроса на всех станциях. Вместе с тем для оценки эффективности тандема, а также для обнаружения и предотвращения так называемых узких мест в тандемной сети используются вероятности потерь на различных участках и подсистемах тандема.

В качестве релевантных работ стоит отметить [6, 7]. В этих работах рассматриваются системы с рекуррентными входящими потоками $GI/M/1/1 \to (\cdot/M/1/1)^{n-1}$. Поскольку интервалы между поступлениями запросов в рекуррентном потоке являются независимыми случайными величинами, распределеными по произвольному закону, то этот поток можно рассматривать как более общий, чем MAP. Вместе с тем и MAP можно считать более общим потоком по сравнению с рекуррентным, поскольку в нем времена между моментами поступления запросов могут быть зависимыми. Кроме того, в отличие от [6, 7], где все станции представлены однолинейными системами, будем считать, что станции могут состоять из произвольного и, вообще говоря, разного числа приборов.

1. Описание модели

Рассматривается тандемная система массового обслуживания, состоящая из $R,\ R>1$, станций. В терминах обозначений Кендалла эта система может быть описана как

$$MAP_1/M/N_1/0 \to \cdot, MAP_2/M/N_2/0 \to \cdots \to \cdot, MAP_R/M/N_R/0.$$

Станция номер r представлена системой из N_r приборов без буфера. Приборы, принадлежащие одной и той же станции, независимые и идентичные. Время обслуживания любого запроса на приборе r-й станции распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_r.

На вход первой станции поступает MAP-поток запросов. Поступление запросов в MAP-потоке присходит под управлением неприводимой цепи Маркова $\nu_t,\ t\geq 0$, с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0,\ 1,\dots,W\}$. Время пребывания цепи в состоянии ν распределено по экспоненциальному закону с параметром λ_ν. По истечении этого времени процесс ν_t с вероятностью $p^{(0)}_{\nu,\nu'}$ переходит в некоторое другое состояние ν' без генерации запроса и с вероятностью $p^{(1)}_{\nu,\nu'}$ – с генерацией запроса, $\nu,\nu'\in\{0,\dots,W\}$.

Поведение MAP-потока полностью характеризуется квадратными матрицами $D_0,\ D_1$ порядка $W+1$, элементы которых определяются следующим образом:

$$(D_1)_{\nu,\nu'}=\lambda_\nu p^{(1)}_{\nu,\nu'}, \nu,\nu'\in\{0,\dots,W\},$$

$$(D_0)_{\nu,\nu}=-\lambda_\nu,\qquad \nu\in\{0,\dots,W\},\qquad (D_0)_{\nu,\nu'}=\lambda_\nu p^{(0)}_{\nu,\nu'},\qquad \nu,\nu'\in\{0,\dots,W\},\nu\neq\nu'.$$

При этом матрица $D=D_0+D_1$ является инфинитезимальным генератором цепи Маркова $\nu_t, t\geq 0$.

Интенсивность λ поступления запросов в MAP определяется как

$$\lambda=\boldsymbol{\theta}D_1\boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{\theta}$ – вектор-строка стационарного распределения цепи Маркова $\nu_t, t\geq 0$. Вектор $\boldsymbol{\theta}$ является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{\theta}D(1)=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{e}=1.$$

Здесь и далее $\boldsymbol{e}$ – вектор-столбец, состоящий из единиц; $\boldsymbol{0}$ – вектор-строка, состоящая из нулей.

Более подробное описание MAP-потока и его свойств можно найти в [8].

Возвращаясь к рассматриваемой системе, обозначим MAP-поток, входящий на первую станцию тандема, как MAP_1. Пространство состояний управляющего процесса этого потока определим как $\{0,\ 1,\dots,W_1\}$. Каждый из запросов должен последовательно обслужиться на всех станциях тандема. Кроме потока запросов, поступающих на r-ю, $r>1$, станцию из $(r-1)$-й станции, на нее поступает дополнительный MAP-поток запросов, который обозначим как MAP_r. Пространство состояний управляющего процесса данного потока определим как $\{0,\ 1,\dots,W_r\}$. Запросы из MAP-потока идентичны запросам, поступающим из $(r-1)$-й станции, и должны обслужиться на r-й, $(r+1)$-й, ..., R-й станциях.

Обозначим матрицы, задающие MAP_1, как $D_0,\ D_1$, а аналогичные матрицы, задающие MAP_r, как $H_0^{(r)},\ H_1^{(r)}$. Интенсивность поступления запросов в MAP_1 обозначим как $\tilde{\lambda}_1$, интенсивность поступления запросов в $MAP_r,\ r>1,$ – как h_r.

Если запрос, поступающий на r-ю станцию тандема, застает все приборы занятыми, то он покидает тандем навсегда.

Целью настоящей работы является изучение выходящих потоков со станций тандема, расчет стационарного распределения тандема и его фрагментов и вероятностей потерь на отдельных станциях системы.

2. Проблема расчета стационарного распределения в тандеме. Выходящие потоки из станций тандема

Процесс изменения состояний системы описывается в терминах неприводимой многомерной цепи Маркова с непрерывным временем

$$\xi_t = \{n_t^{(R)}, n_t^{(R-1)}, \dots, n_t^{(1)}, \nu_t^{(R)}, \nu_t^{(R-1)}, \dots, \nu_t^{(1)}, \}, t \geq 0,$$

где $n_t^{(r)}$ – число занятых приборов на r-й станции;

$\nu_t^{(r)}$ – состояние управляющего процесса MAP_r-потока в момент времени t, $n_t^{(r)} = \overline{0, N_r}$, $\nu_t^{(r)} = \overline{0, W_r}$, $r = \overline{1, R}$.

Пространство состояний цепи Маркова ξ_t задается как

$$S = \{\{0,1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{0,1, \dots, N_R\} \times \{0,1, \dots, W_1\} \times \dots \times \{0,1, \dots, W_R\}\}.$$

Вектор-строка $\boldsymbol{p}$ стационарных вероятностей состояний цепи имеет размерность $\prod_{r=1}^{R} (N_r + 1)(W_r + 1)$ и вычисляется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{p}Q = 0, \ \boldsymbol{pe} = 1, \tag{1}$$

где матрица Q является инфинитезимальным генератором цепи Маркова $\xi_t, t \geq 0$. Построение данной матрицы может быть выполнено с помощью стандартной методики, используемой в теории сетей массового обслуживания, и является не слишком трудной задачей. Однако такая работа в случае более или менее большого значения R является достаточно трудоемкой. Вследствие этого представляется интересным найти способ для расчета стационарных распределений состояний тандема в целом или его частей (фрагментов) либо маргинальных стационарных распределений состояний любой станции, не записывая явное выражение для генератора Q. Стоит отметить, что функционирование фрагмента тандема, состоящего из любого количества станций и расположенного в начале тандема, не зависит от состояний остальных станций. Таким образом, интуитивно ясно, что какая-либо декомпозиция может быть применена для расчета стационарного распределения тандема и его фрагментов без полного построения генератора.

В настоящем исследовании разрабатывается простой, точный и удобный метод вычисления маргинальных стационарных распределений вероятностей фрагментов тандема, а также всего тандема и соответствующих вероятностей потерь. Метод основан на анализе выходящих и входящих потоков на станциях тандема, в результате которого доказано, что такие потоки принадлежат классу MAP-потоков. Соответствующие результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема 1. *Выходящий поток из r-й станции тандема, $r = \overline{1, R}$, принадлежит классу MAP-потоков. Этот MAP-поток задается матрицами $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$, которые вычисляются по следующим рекуррентным формулам:*

$$D_0^{(r)} = -\mu_r diag\{0,1,\dots,N_r\} \otimes I_{K_r} +$$

$$+\begin{pmatrix} D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & D^{(r-1)} \oplus H^{(r)} \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$D_1^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (N_r-1)\mu_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & N_r\mu_r & 0 \end{pmatrix} \otimes I_{K_r}, r = \overline{1,R}, \quad (3)$$

с начальными условиями

$$D_0^{(0)} = D_0,\ D_1^{(0)} = D_1, \qquad H_0^{(1)} = H_1^{(1)} = 0.$$

Здесь $\oplus$ – знак кронекеровой суммы матриц [9], $D^{(r)} = D_0^{(r)} + D_1^{(r)}$, $H^{(r)} = H_0^{(r)} + H_1^{(r)}$; величины K_r вычисляются следующим образом: $K_r = \prod_{r'=1}^{r-1} (N_{r'}+1) \prod_{r'=1}^{r} (W_{r'}+1)$, $r = \overline{2,R}$; I_{K_r} – тождественная матрица порядка K_r.

Доказательство. Пусть $r = 1$. Очевидно, что процесс $\{n_t^{(1)}, \nu_t^{(1)}\}, t \geq 1$, описывающий функционирование первой станции тандема, является цепью Маркова. Перенумеруем состояния этой цепи в лексикографическом порядке: $(0,0), (0,1), \dots, (0,W), (1,0), (1,1), \dots, (1,W), \dots, (N_1,0), (N_1,1), \dots, (N_1,W)$. Легко видеть, что интенсивности переходов цепи, которые не сопровождаются окончанием обслуживания на первой станции и генерацией запроса, переходящего на вторую станцию, определяются матрицей $D_0^{(1)}$, заданной формулой (2). Интенсивности переходов, которые сопровождаются окончанием обслуживания на первой станции и генерацией запроса, переходящего на вторую станцию, определяются матрицей $D_0^{(1)}$, заданной формулой (3). Согласно определению MAP это означает, что выходящий поток из первой станции (транзитный поток на вторую станцию) есть MAP, определенный матрицами $D_0^{(1)}$ и $D_1^{(1)}$, которые вычисляются по формулам (2), (3).

Кроме транзитного потока, на вторую станцию поступает дополнительный MAP_2-поток новых запросов, который определяется матрицами $H_0^{(2)}$ и $H_1^{(2)}$. Тогда суммарный поток запросов, поступающих на вторую станцию, является суперпозицией транзитного и дополнительного потоков новых запросов и определяется матрицами $\widetilde{D}_0^{(2)} = D_0^{(1)} \oplus H_0^{(2)}$ и $\widetilde{D}_1^{(2)} = D_1^{(1)} \oplus H_1^{(2)}$.

Пусть теперь $r = 2$. Используя те же рассуждения, что и в случае $r = 1$, приходим к выводу, что выходящий поток из второй станции есть MAP, определенный матрицами $D_0^{(2)}$ и $D_1^{(2)}$, которые заданы формулами (2), (3). Дальнейшее доказательство при $r > 2$ проводится по индукции.

Следствие 1. *Входящий на r-ю станцию тандема поток принадлежит классу MAP-потоков. Этот MAP-поток задается матрицами*

$$\widetilde{D}_0^{(r)} = D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)}, \quad \widetilde{D}_1^{(r)} = D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)}, r = \overline{1,R}. \quad (4)$$

Замечание 1. Положив в формуле (4) $r = 1$, получим естественные соотношения

$$\tilde{D}_k^{(1)} = D_k^{(0)} = D_k, \qquad k = 0,1.$$

Замечание 2. В дальнейшем будем обозначать суммарный входящий MAP-поток на r-ю станцию как $MAP^{(r)}, r = \overline{1,R}$. Заметим, что обозначение $MAP^{(1)}$ означает то же, что и ранее введенное обозначение MAP_1. Оба этих обозначения используются для входящего потока на первую станцию.

Используя результаты теоремы 1, можно рассчитать маргинальное стационарное распределение r-й станции тандема как стационарное распределение системы массового обслуживания $MAP^{(r)}/M/N_r/0,\ r = \overline{1,R}$. Хотя такое стационарное распределение определяется как решение системы линейных алгебраических уравнений, при больших значениях числа приборов N_r и размерности управляющего процесса входного потока $MAP^{(r)}$ решить эту систему стандартными методами не представляется возможным. Для удобства читателя в следующем разделе будут коротко описаны адаптированные алгоритмы вычисления стационарного распределения такого типа систем. Для краткости опустим индекс r в обозначении матриц, описывающих MAP-поток, а также в обозначениях интенсивностей обслуживания.

3. Стационарное распределение системы $MAP/M/N/0$

Функционирование системы $MAP/M/N/0$ описывается цепью Маркова $\eta_t = \{n_t, \nu_t\}$, где n_t – число занятых приборов, а $\nu_t, \nu_t \in \{0, \dots, W\}$ – состояние управляющего процесса MAP в момент времени t.

Перенумеруем состояния цепи в лексикографическом порядке. Тогда инфинитезимальный генератор этой цепи определяется как

$$A = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu I & D_0 - \mu I & D_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu I & D_0 - 2\mu I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_0 - (N-1)\mu I & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu I & D - N\mu I \end{pmatrix}.$$

Пусть $\boldsymbol{q}$ является вектором-строкой стационарного распределения вероятностей состояний цепи. Этот вектор определяется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{q}A = 0, \qquad \boldsymbol{q}\boldsymbol{e} = 1.$$

В случае большой размерности данной системы для ее решения целесообразно использовать специальные алгоритмы. Наиболее известные из них описаны ниже.

Представим вектор $\boldsymbol{q}$ как $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_N)$, где векторы $\boldsymbol{q}_i, i = 0, \dots, N$, имеют порядок $W + 1$.

Алгоритм 1. Векторы $\boldsymbol{q}_i, i = 0, \dots, \mathrm{N}$, вычисляются как

$$\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_0 F_i, \qquad i = 0, \dots, N,$$

где матрицы F_i вычисляются рекуррентно по формулам

$$F_0 = I,\ \ F_i = \frac{1}{i\mu}[F_{i-1}((i-1)\mu I - D_0) - (1 - \delta_{i,1})F_{i-2}D_1], \qquad i = 1, \dots, N,$$

а вектор q_0 является единственным решением системы

$$\boldsymbol{q}_0(F_{N-1}D_1 + F_N(D - N\mu I)) = 0,\ \ \boldsymbol{q}\sum_{i=0}^{N} F_i\boldsymbol{e} = 1.$$

Здесь $\delta_{i,1}$ – дельта Кронекера.

Более подробную информацию об алгоритме 1 можно найти в [10].

Видно, что рекурсия для F_i включает в себя операцию вычитания. Значит, в случае, когда значение N является большим, описанный алгоритм может быть численно неустойчивым. В такой ситуации может быть применен алгоритм, основанный на вероятностном смысле матрицы A [11]. Этот алгоритм основан на применении техники сенсорных цепей Маркова [12] и описывается следующим образом.

Алгоритм 2. Векторы стационарного распределения $\boldsymbol{q}_i,\ i = 0, \dots, N$, определяются как

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0\Phi_l, \qquad l = 1, \dots, N,$$

где матрицы Φ_l вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\Phi_0 = I,\ \ \Phi_i = \Phi_{i-1}D_1(i\mu I - D_0 - (1 - \delta_{i,N})D_1G_i)^{-1},\ \ i = 1, \dots, N,$$

а матрицы $G_i, i = \overline{0, N-1}$, вычисляются с помощью обратной рекурсии

$$G_i = (i+1)\mu[(i+1)\mu I - D_0 - D_1G_{i+1}]^{-1},\ \ i = N-2, N-3, \dots,\ \ 0,$$

при начальном условии

$$G_{N-1} = N\mu(N\mu I - D)^{-1}.$$

Вектор $\boldsymbol{q}_0$ является единственным решением системы линейных алгебраических уравнений:

$$\boldsymbol{q}_0(D_0 + D_1G_0) = 0, \quad \boldsymbol{q}_0\textstyle\sum_{i=0}^{N} \Phi_i\boldsymbol{e} = 1.$$

Обратим внимание, что операции вычитания не присутствуют в данном алгоритме, а все обратные матрицы существуют и неотрицательны. Таким образом, алгоритм является численно устойчивым.

4. Расчет стационарного распределения тандема и его фрагментов

В данном разделе приведен метод расчета стационарного распределения тандема и его фрагментов на основе результатов исследования выходящих потоков, представленных в теореме 1.

Пусть $\langle r, r+1, \dots, r'\rangle$ обозначает фрагмент тандема, состоящий из r-й, $(r+1)$-й,..., r'-й станций, $1 \le r \le r' \le R$.

Теорема 2. *Стационарное распределение фрагмента $\langle r, r+1, \dots, r'\rangle$ рассматриваемого тандема может быть рассчитано как стационарное распределение тандема $MAP^{(r)}/M/N_r/N_r \to \cdot/M/N_{r+1}/N_{r+1} \to \dots \to \cdot/M/N_{r'}/N_{r'}$, где $MAP^{(r)}$ определяется по формулам (2)–(4).*

Следствие 2. *Вектор $\boldsymbol{p}^{(r)}$ маргинального стационарного распределения r-й станции тандема вычисляется как стационарное распределение системы массового обслуживания $MAP^{(r)}/M/N_r/N_r$, $r = 1, 2, \dots, R$.*

Теорема 3. *Совместное стационарное распределение $\boldsymbol{p}^{(1,\dots,r)}$ вероятностей состояний первых r станций тандема может быть рассчитано как стационарное распределение управляющего процесса выходящего $MAP^{(r)}$-потока из r-й станции, т. е. имеет место формула*

$$\boldsymbol{p}^{(1,\dots,r)} = \boldsymbol{\theta}^{(r)},$$

где вектор $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ – единственное решение системы

$$\boldsymbol{\theta}^{(r)}(D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = 0,\ \ \boldsymbol{\theta}^{(r)}\boldsymbol{e} = 1,\ \ r = \overline{1,R},$$

а матрицы $D_0^{(r)}, D_1^{(r)}$ вычисляются по рекуррентным формулам (2), (3).

Очевидно, что вектор $\boldsymbol{p}$ стационарного распределения всего тандема совпадает с вектором $\boldsymbol{p}^{(1,\dots,R)}$.

Следствие 3. *Вектор* $\mathbf{p}$ *стационарного распределения тандема вычисляется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений*

$$\boldsymbol{p}\left(D_0^{(R)} + D_1^{(R)}\right) = 0,\ \ \boldsymbol{pe} = 1. \tag{5}$$

Как следует из системы (5), матрица $D_0^{(R)} + D_1^{(R)}$ совпадает с инфинитезимальным генератором Q цепи Маркова $\xi_t = \{n_t^{(R)}, n_t^{(R-1)}, \dots, n_t^{(1)}, \nu_t^{(R)}, \nu_t^{(R-1)}, \dots, \nu_t^{(1)},\}$, $t \geq 0$, описывающей функционирование тандема, т. е. $Q = D_0^{(R)} + D_1^{(R)}$. Таким образом, используя результаты анализа выходящих потоков со станций тандема, была построена матрица Q без трудоемкой работы, требующейся при прямом подходе к построению этой матрицы.

5. Вероятности потерь

Рассчитав стационарные распределения тандема и его фрагментов, можно найти ряд важных стационарных характеристик производительности системы. Важнейшими из них являются вероятности потерь на станциях тандема.

Теорема 4. *Вероятность потери* $P_{loss}^{(r)}$ *произвольного запроса на* r*-й станции тандема определяется как*

$$P_{loss}^{(r)} = \frac{\tilde{\lambda}_r - \lambda_r}{\tilde{\lambda}_r},\ \ r = 1, 2, \dots, R. \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\lambda}_r$ – интенсивность суммарного MAP-потока, поступающего на r-ю станцию, вычисляется по формуле

$$\tilde{\lambda}_r = \boldsymbol{\theta}^{(r)}\widetilde{D}_1^{(r)}\boldsymbol{e},$$

где вектор $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ – единственное решение системы

$$\boldsymbol{\theta}^{(r)}\left(\widetilde{D}_0^{(r)} + \widetilde{D}_1^{(r)}\right) = 0,\ \ \boldsymbol{\theta}^{(r)}\boldsymbol{e} = 1;$$

λ_r – интенсивность выходящего потока с r-й станции – вычисляется по формуле

$$\lambda_r = \boldsymbol{\theta}^{(r)} D_1^{(r)}\boldsymbol{e},$$

где вектор $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ – единственное решение системы

$$\boldsymbol{\theta}(D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{\theta}^{(r)}\boldsymbol{e} = 1.$$

Доказательство. Согласно эргодической теореме для цепей Маркова [13] вероятность потери запроса на отдельной станции тандема может быть вычислена как отношение разности интенсивности входящего и выходящего потоков на этой станции к ин-тенсивности входящего потока. Отсюда непосредственно следует доказательство теоремы.

Теорема 5. *Вероятность потери на r-й станции тандема произвольного запроса, поступившего с $(r-1)$-й станции, вычисляется как*

$$P^{(r)}_{loss/1} = \frac{\boldsymbol{\theta}^{(r)}(D_1^{(r-1)} \otimes I_{W_r+1})\boldsymbol{e}}{\lambda_{r-1}}, r = 1, 2, \dots, R, \tag{7}$$

где $D_1^{(0)} = D_1$, λ_0 – интенсивность входяшего потока в тандем.

Вероятность потери на r-й станции тандема произвольного запроса из дополнительного потока находится по формуле

$$P^{(r)}_{loss/2} = \frac{\boldsymbol{\theta}^{(r)}(I_{K_r(N_r+1)} \otimes H_1^{(r)})\boldsymbol{e}}{h_r}, r = 2, \dots, R. \tag{8}$$

Доказательство. Числитель правой части (7) есть интенсивность потока запросов, поступающих на r-ю станцию из $(r-1)$-й станции и застающих все приборы r-й станции занятыми, а знаменатель – интенсивность потока всех запросов, поступающих на r-ю станцию из $(r-1)$-й станции. По известным эргодическим соображениям отношение этих двух интенсивностей определяет искомую вероятность $P^{(r)}_{loss/1}$. Аналогичные рассуждения приводят к формуле (8) для вероятности $P^{(r)}_{loss/2}$.

Используя теорему 5, можно получить альтернативное выражение для вероятности суммарных потерь $P^{(r)}_{loss}$ на r-й станции, ранее определенной формулой (6). Альтернативная формула приведена в следующем утверждении.

Следствие 4. *Вероятность того, что произвольный запрос из суммарного потока на r-ю станцию принадлежит выходящему потоку из $(r-1)$-й станци и будет потерян из-за отсутствия свободных приборов на r-й станции, вычисляется как*

$$P^{(r)}_{loss,1} = P^{(r)}_{loss/1}\frac{\lambda_{r-1}}{\tilde{\lambda}_r},\ r = \overline{1,R}. \tag{9}$$

Вероятность того, что произвольный запрос из суммарного потока на r-ю станцию принадлежит дополнительному потоку и будет потерян из-за отсутствия свободных приборов на станции, вычисляется следующим образом:

$$P^{(r)}_{loss,2} = P^{(r)}_{loss/2}\frac{h_r}{\tilde{\lambda}_r},\ r = \overline{2,R}. \tag{10}$$

Вероятность $P^{(r)}_{loss}$ потери произвольного запроса на r-й станции может быть вычислена как

$$P^{(r)}_{loss} = P^{(r)}_{loss,1} + P^{(r)}_{loss,2}, r = \overline{1,R}, \tag{11}$$

где $P^{(1)}_{loss,2} = 0$.

Доказательство. Формулы (9)–(11) выводятся из очевидных вероятностных соображений.

Следствие 5. *В случае $R = 2$ вероятность того, что запрос из входящего потока на первую станцию не будет потерян в системе, определяется как*

$$P_{succ} = (1 - P^{(1)}_{loss/1})(1 - P^{(2)}_{loss/1}). \tag{12}$$

Заключение

Полученные в статье результаты дают простой элегантный способ для построения инфинитезимального генератора цепи Маркова, описывающей функционирование тандема и его фрагментов. Однако этот способ не приводит к уменьшению размера системы линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решить для вычисления стационарного распределения состояний целого тандема. Система (5) имеет тот же ранг K_R, что и система (1). Если даже такие алгоритмы, как численно устойчивый алгоритм 2 (см. разд. 3), который эффективно использует разреженную структуру генератора, не дают возможности решить систему (5), могут быть использованы своего рода эвристики. Например, когда рекуррентно вычисляются матрицы $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$, определяющие MAP-поток на r-ю станцию, и порядок этих матриц становится слишком большим для некоторого $r \in \{1, \dots, R-1\}$, то можно попытаться аппроксимировать такой MAP MAP-потоком с той же интенсивностью, некоторым количеством совпадающих моментов длин интервалов между поступлениями запросов (по крайней мере, с тем же коэффициентом вариации) и тем же коэффициентом корреляции, но с гораздо меньшей размерностью пространства состояний управляющего процесса [14–16]. После этого можно продолжать рекуррентную процедуру расчета матриц $D_0^{(r')}$ и $D_1^{(r')}, r' > r$, исходя из матриц, которые определяют аппроксимирующий MAP.

Список литературы

1. Balsamo, S. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction / S. Balsamo, V.D.N. Persone, P. Inverardi // Performance Evaluation. – 2003. – Vol. 51. – P. 269–288.

2. Gnedenko, B.W. Handbuch der Bedienungstheorie / B.W. Gnedenko, D. Konig. – Berlin : Akademie Verlag, 1983.

3. Perros, H.G. A bibliography of papers on queueing networks with finite capacity queues / H.G. Perros // Performance Evaluation. – 1989. – Vol. 10. – P. 255–260.

4. Heyman, D.P. Modelling multiple IP traffic streams with rate limits / D.P. Heyman, D. Lucantoni // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 2003. – Vol. 11. – P. 948–958.

5. Klemm, A. Modelling IP traffic using the batch Markovian arrival process / A. Klemm, C. Lindermann, M. Lohmann // Performance Evaluation. – 2003. – Vol. 54. – P. 149–173.

6. Bromberg, M.A. Multi-phase systems with losses with exponential servicing / M.A. Bromberg // Automation and Remote Control. – 1979. – Vol. 40. – P. 27–31.

7. Bromberg, M.A. Service by a cascaded network of instruments / M.A. Bromberg, V.A. Kokotushkin, V.A. Naumov // Automation and Remote Control. – 1977. – Vol. 38. – P. 60–64.

8. Lucantoni, D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process / D.M. Lucantoni // Communications in Statistics-Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.

9. Graham, A. Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications / A. Graham. – Cichester : Ellis Horwood, 1981.

10. Klimenok, V.I. Calculation of characteristics of a multiserver queue with rejections and burst-like traffic / V.I. Klimenok // Automatic Control and Computer Sciences. – 1999. – Vol. 33, no. 6. – P. 35–43.

11. Lack of invariant property of Erlang loss model in case of the MAP input / V. Klimenok [et al.] // Queueing Systems. – 2005. – Vol. 49. – P. 187–213.

12. Kemeni, J.G. Denumerable Markov Chains / J.G. Kemeni, J.L. Snell, A.W. Knapp. – N. Y. : Van Nostrand, 1966.

13. Skorokhod, A. Probability theory and random processes / A. Skorokhod. – Kiev : High School, 1980.

14. Alfa, A.S. On approximating higher order MAPs with MAPs of order two / A.S. Alfa, J.E. Diamond // Queueing Systems. – 2000. – Vol. 34. – P. 269–288.

15. Heindl, A. Correlation bounds for second order MAPs with application to queueing network decomposition / A. Heindl, K. Mitchell, A. van de Liefvoort // Performance Evaluation. – 2006. – Vol. 63. – P. 553–577.

16. Heindl, A. Output models of $MAP/PH/1(/K)$ queues for an efficient network decomposition / A. Heindl, M. Telek // Performance Evaluation. – 2002. – Vol. 49. – P. 321–339.

Поступила 04.07.2017

Белорусский государственный университет,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: klimenok@bsu.by

V.I. Klimenok

STATIONARY DISTRIBUTION OF A TANDEM QUEUE WITH ADDITIONAL FLOWS ON THE STATIONS OF THE TANDEM

A tandem queueing system consisting of a finite number of multi-server stations without buffers is analized. The input flow at the first station is a MAP (Markovian arrival process). The customers from this flow aim to be served at all stations of the tandem. For any station, besides transit customers proceeding from the previous station, an additional MAP flow of new customers arrives at this station directly. Customers from this flow aim to be served at this station and all subsequent stations of the tandem. The service times of customer at the stations are exponentially distributed with the service rate depending of number of the station. The algorithms for calculation of stationary distributions and the loss probabilities associated with the tandem are given.