ИНФОРМАТИКА

2017 июль-сентябрь № 3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958:537.8

В.Т. Ерофеенко

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Разрабатывается математическая модель, описывающая распространение электромагнитных волн в среде с пространственной дисперсией. Моделирование основано на преобразовании интегро-дифференциальных уравнений монохроматической электродинамики для полей в среде с пространственной дисперсией к дифференциальной модели с уравнениями в частных производных второго порядка. В рамках разработанной модели аналитически строится полная система базисных плоских электромагнитных полей, распространяющихся в однородной среде с пространственной дисперсией.

Введение

Разработка математических методов моделирования процессов взаимодействия электромагнитных волн с композитными материалами является актуальным направлением исследований в математической физике [1]. Как правило, композиты представляют собой матрицы, содержащие материальные неоднородности (частицы) различных типов и отличающиеся большим разнообразием [2–4]. Это обусловливает применение различных математических подходов, адекватно описывающих электрические и магнитные свойства материалов [5–8]. Следует отметить, что существенную роль в моделях играют отношения между размерами частиц и длинами волн – в вакууме, в матрице и материале неоднородностей.

Одним из классов композитных материалов являются среды с пространственной и временной дисперсиями [9–11]. Для них электромагнитные свойства в точке зависят от значений напряженностей электрического и магнитного полей в окрестности рассматриваемой пространственно-временной точки. В этом случае электрическая и магнитная поляризации среды выражаются через интегральные операторы [1, 12]. Аналитическое решение уравнений Максвелла с интегральными членами затруднительно. Поэтому строятся упрощенные модели сред, которые позволяют исследовать уравнения и получать их аналитические решения.

В настоящей статье в случае композитов с размерами частиц, значительно меньшими длины электромагнитной волны, распространяющейся в среде, поля представлены в виде разложений Тейлора. В разрабатываемой модели использовано конечное число слагаемых рядов и опущены относительно малые члены бесконечных рядов. В результате интегро-дифференциальные уравнения Максвелла преобразованы к системе уравнений Максвелла, содержащих дифференциальные операторы второго порядка. Для полученных уравнений построены аналитические решения в виде плоских электромагнитных полей, распространяющихся в среде.

1. Интегро-дифференциальная модель среды

Рассмотрим пространство R^3 с декартовой системой координат *Oxyz*, заполненное материальной средой с пространственной дисперсией [1]. Комплексные амплитуды $\vec{E},\vec{H}$ монохроматического поля с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ в такой среде подчиняются уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E} + \vec{P}\right), \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\left(\mu\vec{H} + \vec{m}\right), \tag{1}$$

где ω – круговая частота; $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu = \mu_0\mu_r$, ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость, μ_r – относительная магнитная проницаемость матрицы; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

Электрическая и магнитная поляризации определяются объемными интегралами по пространственным переменным $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{V_1} \int\limits_{D_{1M}} K_1\left(\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| / R_1\right) \vec{E}(\vec{r}_0) d\vec{r}_0; \tag{2}$$

$$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{V_2} \int\limits_{D_{2M}} K_2\left(\left|\vec{r} - \vec{r}_0\right| / R_2\right) \vec{H}(\vec{r}_0) d\vec{r}_0, \tag{3}$$

где $D_{jM} = \left\{\vec{r}_0 \left\| \vec{r} - \vec{r}_0 \right| < R_j\right\}$ – шар радиуса R_j, описанный вокруг точки $M(x, y, z)$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D_{jM}$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $V_j = \frac{4}{3}\pi R_j^3$; $K_j(p)$ – заданные функции, определяющие характер пространственной дисперсии.

2. Дифференциальная модель среды с пространственной дисперсией

Уравнения (1)–(3), описывающие распространение электромагнитных волн в материальной среде с пространственной дисперсией, являются достаточно сложным объектом для аналитического и численного исследования. Поэтому для упрощения модели вводятся некоторые допущения, которые позволяют преобразовать интегро-дифференциальные уравнения (1)–(3) к системе дифференциальных уравнений с частными производными. Опишем методику преобразования уравнений. Итоговый результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *С точностью до величин третьего порядка малости система интегро-дифференциальных уравнений (1)–(3) эквивалентна системе дифференциальных уравнений*

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon_{\Pi} \vec{E} + P\Delta\vec{E}\right), \quad \operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\left(\mu_{\Pi} \vec{H} + m\Delta\vec{H}\right), \tag{4}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\varepsilon_{\Pi} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r + 3\int_0^1 K_1(p) p^2 dp\right)$, $\mu_{\Pi} = \mu_0\left(\mu_r + 3\int_0^1 K_2(p) p^2 dp\right)$,

$P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 R_1^2 \int_0^1 K_1(p) p^4 dp$, $m = \frac{1}{2}\mu_0 R_2^2 \int_0^1 K_2(p) p^4 dp.$

Доказательство. Компоненты вектора $\vec{E}(\vec{r}_0) = E_x(\vec{r}_0)\vec{e}_x + E_y(\vec{r}_0)\vec{e}_y + E_z(\vec{r}_0)\vec{e}_z$ разложим в ряды Тейлора в окрестности точки *M*. Для упрощения модели ограничимся слагаемыми ряда до второго порядка включительно, пренебрегая величинами третьего порядка малости. Такое допущение правомочно, когда радиусы частиц $R_j << \lambda_{\text{мат}}$ ($\lambda_{\text{мат}}$ – длина волны в матрице) [1, с. 153]:

$$\begin{gathered} E_\alpha(\vec{r}_0) \approx E_\alpha^M + \frac{\partial E_\alpha^M}{\partial x}(x_0 - x) + \frac{\partial E_\alpha^M}{\partial y}(y_0 - y) + \frac{\partial E_\alpha^M}{\partial z}(z_0 - z) + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial x^2}(x_0 - x)^2 + \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial y^2}(y_0 - y)^2 + \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial z^2}(z_0 - z)^2\right] + \\ + \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial x \partial y}(x_0 - x)(y_0 - y) + \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial x \partial z}(x_0 - x)(z_0 - z) + \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial y \partial z}(y_0 - y)(z_0 - z), \end{gathered} \tag{5}$$

где $E_\alpha^M = E_\alpha(\vec{r})$, $\alpha = x, y, z.$

Вычислим компоненты P_α электрической поляризации (2). Подставляя (5) в (2), получим

$$P_\alpha(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left(I_0^{(1)} E_\alpha^M + I_1^{(1)} \frac{\partial E_\alpha^M}{\partial x} + I_2^{(1)} \frac{\partial E_\alpha^M}{\partial y} + I_3^{(1)} \frac{\partial E_\alpha^M}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + I_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial x^2} + I_{22}^{(1)} \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial y^2} + I_{33}^{(1)} \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial z^2} + I_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial x \partial y} + I_{13}^{(1)} \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial x \partial z} + I_{23}^{(1)} \frac{\partial^2 E_\alpha^M}{\partial y \partial z} \right), \tag{6}$$

где интегралы имеют вид

$$I_0^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)\, d\vec{r}_0, \quad I_1^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(x_0 - x)\, d\vec{r}_0, \quad I_2^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(y_0 - y)\, d\vec{r}_0,$$

$$I_3^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(z_0 - z)\, d\vec{r}_0, \quad I_{11}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(x_0 - x)^2\, d\vec{r}_0,$$

$$I_{22}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(y_0 - y)^2\, d\vec{r}_0, \quad I_{33}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(z_0 - z)^2\, d\vec{r}_0, \tag{7}$$

$$I_{12}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(x_0 - x)(y_0 - y)\, d\vec{r}_0, \quad I_{13}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(x_0 - x)(z_0 - z)\, d\vec{r}_0,$$

$$I_{23}^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_{D_{jM}} K_j(p_j)(y_0 - y)(z_0 - z)\, d\vec{r}_0, \quad p_j = |\vec{r} - \vec{r}_0| / R_j, \quad j = 1, 2.$$

Для вычисления интегралов (7) введем сферическую систему координат $M r_0 \theta_0 \varphi_0$ с началом в точке M. Декартовы координаты точки M_0 выражаются через сферические координаты с помощью формул

$$x_0 = x + r_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, \quad y_0 = y + r_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \quad z_0 = z + r_0 \cos\theta_0. \tag{8}$$

Интегралы (7) вычислим в сферических координатах, подставляя (8) в (7) и полагая $p_j = r_0 / R_j$, $d\vec{r}_0 = r_0^2 \sin\theta_0 dr_0 d\theta_0 d\varphi_0$.

Получим

$$I_0^{(j)} = \frac{1}{V_j} \int\limits_0^{R_j} K_j(r_0/R_j) r_0^2 dr_0 \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 = \kappa_j = 3 \int\limits_0^1 K_j(p) p^2 dp,$$

$$I_1^{(j)} = I_2^{(j)} = I_3^{(j)} = 0, \qquad I_{12}^{(j)} = I_{13}^{(j)} = I_{23}^{(j)} = 0; \tag{9}$$

$$I_{11}^{(j)} = \frac{1}{2V_j} \int\limits_0^{R_j} K_j(r_0/R_j) r_0^4 dr_0 \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin^3\theta_0 \cos^2\varphi_0 d\theta_0 d\varphi_0 = g_j = \frac{1}{2} R_j^2 \int\limits_0^1 K_j(p) p^4 dp,$$

$$I_{22}^{(j)} = I_{33}^{(j)} = g_j.$$

Подставим значения интегралов (9) в (6), тогда компоненты электрической поляризации

$$P_\alpha = \varepsilon_0 \left(\kappa_1 E_\alpha^M + g_1 \Delta E_\alpha^M \right).$$

Вектор электрической поляризации

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \left(\kappa_1 \vec{E}(\vec{r}) + g_1 \Delta \vec{E}(\vec{r}) \right). \tag{10}$$

После аналогичных преобразований получим формулу для вектора магнитной поляризации:

$$\vec{m}(\vec{r}) = \mu_0\left(\kappa_2 \vec{H}(\vec{r}) + g_2\Delta\vec{H}(\vec{r})\right). \tag{11}$$

Подставляя выражения (10), (11) в уравнения (1), придем к требуемым дифференциальным уравнениям (4).

3. Базисные плоские электромагнитные поля

Построим систему плоских электромагнитных полей, распространяющихся в среде с пространственной дисперсией, т. е. полей $\vec{E},\vec{H},$ удовлетворяющих уравнениям (4). Плоские поля представляют собой электромагнитные поля вида

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left(A_1\vec{e}_x + B_1\vec{e}_y + C_1\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)e^{\alpha z}, \\ \vec{H} &= \left(A_2\vec{e}_x + B_2\vec{e}_y + C_2\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)e^{\alpha z}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha,A_j,B_j,C_j$ – постоянные; $\Phi(x,y) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)$.

Для аналитического описания полей (12) воспользуемся волновыми полями [12, с. 96]:

$$\vec{W}^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k) = \frac{i}{\lambda}\left(\alpha_2\vec{e}_x - \alpha_1\vec{e}_y\right)\Phi(x,y)\exp(\mp vz), \tag{13}$$

$$\vec{W}^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k) = \frac{1}{k}\left(\mp\frac{iv}{\lambda}\left(\alpha_1\vec{e}_x + \alpha_2\vec{e}_y\right) + \lambda\vec{e}_z\right)\Phi(x,y)\exp(\mp vz),$$

где α_1,α_2,k – произвольные комплексные постоянные, $\lambda = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}$, $0 \le \arg\lambda < \pi$, $v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg v < \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что для полей (13) выполнены формулы [12, с. 98]:

$$\operatorname{rot}\vec{W}^{(\mp1)} = k\vec{W}^{(\mp2)}, \qquad \operatorname{rot}\vec{W}^{(\mp2)} = k\vec{W}^{(\mp1)}, \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\vec{W}^{(\mp1)} = 0,\ \operatorname{div}\vec{W}^{(\mp2)} = 0, \quad \Delta\vec{W}^{(\mp j)} = -k^2\vec{W}^{(\mp j)},$$

так как $\Delta\vec{W} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{W} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{W}.$

Решение системы уравнений (4) вида (12) представим через волновые поля (13).

Теорема 2. *Электромагнитные поля*

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{W}_+^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2) = E_0\vec{W}^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+), \\ \vec{H} &= \vec{V}_+^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2) = E_0\gamma_+\vec{W}^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{W}_+^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2) = E_0\vec{W}^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+), \\ \vec{H} &= \vec{V}_+^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2) = E_0\gamma_+\vec{W}^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_+); \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{W}_-^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2) = E_0\vec{W}^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-), \\ \vec{H} &= \vec{V}_-^{(\mp1)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2) = E_0\gamma_-\vec{W}^{(\mp2)}(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-); \end{aligned} \tag{17}$$

$$\vec{E}=\vec{W}_{-}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2\right)=E_0\vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-\right),$$
$$\vec{H}=\vec{V}_{-}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2\right)=E_0\gamma_-\vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k_-\right), \tag{18}$$

где E_0 *– постоянная, физическая размерность* $\left[E_0\right]=\frac{\text{В}}{\text{м}},\quad \left|E_0\right|=1,$

$$\gamma_\pm=\left[\frac{1}{2m\mu_\Pi}\left(-B\pm\sqrt{B^2-4\varepsilon_\Pi\mu_\Pi mP}\right)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k_\pm=i\omega\gamma_\pm\frac{\mu_\Pi P-\varepsilon_\Pi m}{m\gamma_\pm^2+P}, \tag{19}$$

$$B=\varepsilon_\Pi m+\mu_\Pi P+\omega^2\left(\varepsilon_\Pi m-\mu_\Pi P\right)^2,$$

удовлетворяют системе уравнений (4) при условии $\operatorname{div}\vec{E}=0, \operatorname{div}\vec{H}=0.$

Доказательство. Систему уравнений (4) запишем в виде

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\delta_1\vec{E}+\delta_2\Delta\vec{E},\qquad \operatorname{rot}\vec{E}=\beta_1\vec{H}+\beta_2\Delta\vec{H}, \tag{20}$$

где

$$\delta_1=-i\omega\varepsilon_\Pi,\quad \delta_2=-i\omega P,\quad \beta_1=i\omega\mu_\Pi,\quad \beta_1=i\omega\mu_\Pi,\quad \beta_2=i\omega m. \tag{21}$$

В качестве решения системы (20) выберем поля

$$\vec{E}=E_0\vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k\right),\quad \vec{H}=E_0\gamma\vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k\right). \tag{22}$$

Для определения постоянных k,γ поля (22) подставим в уравнение (20). Учитывая соотношения (14), получим систему алгебраических уравнений для определения величин k,γ :

$$\delta_2 k^2+\gamma k-\delta_1=0; \tag{23}$$

$$\beta_2\gamma k^2+k-\beta_1\gamma=0. \tag{24}$$

Комбинируя уравнения (23), (24), исключим величину k^2, тогда

$$k=\gamma\frac{\delta_1\beta_2-\beta_1\delta_2}{\beta_2\gamma^2-\delta_2}. \tag{25}$$

Подставив (25) в (23), получим биквадратное уравнение для определения γ :

$$\beta_1\beta_2X^2-bX+\delta_1\delta_2=0,\quad \gamma=\pm\sqrt{X}, \tag{26}$$

где $b=\left(\delta_1\beta_2-\beta_1\delta_2\right)^2+\delta_1\beta_2+\beta_1\delta_2$.

Заметим, что знаки + или – на определение полей (15)–(18) не влияют, поэтому положим $\gamma=\sqrt{\text{X}},\quad 0\le\arg\gamma<\pi.$

Разрешая уравнение (26), определим

$$\text{X}=\text{X}_\mp=\frac{1}{2\beta_1\beta_2}\left(b\mp\sqrt{b^2-4\delta_1\delta_2\beta_1\beta_2}\right),\quad \gamma=\gamma_\pm=\sqrt{\text{X}_\mp}. \tag{27}$$

Из формулы (25) следует

$$k_\pm=\gamma_\pm\frac{\delta_1\beta_2-\beta_1\delta_2}{\beta_2\gamma_\pm^2-\delta_2}. \tag{28}$$

После подстановки значений (21) в (27), (28) придем к требуемым формулам (19), которые определяют поля (15), (17). Формулы (16), (18) доказываются аналогично, достаточно поля (22) заменить на поля

$$\vec{E} = E_0 \vec{W}^{(\mp 2)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k\right), \quad \vec{H} = E_0 \gamma \vec{W}^{(\mp 1)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2;k\right).$$

Из соотношений (14) следуют условия $\operatorname{div}\vec{E} = 0,\ \operatorname{div}\vec{H} = 0$ для полей (15)–(18).

4. Магнитодиэлектрическая среда с пространственной дисперсией

Рассмотрим частный случай среды с пространственной дисперсией $(K_2(p) = 0)$, в которой монохроматическое поле $\vec{E},\vec{H}$ удовлетворяет системе уравнений, соответствующей системе (1):

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E} + \vec{P}\right), \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu\vec{H}, \tag{29}$$

где магнитная проницаемость μ – произвольное комплексное число, а электрическая поляризация $\vec{P}$ определяется формулой (2).

Систему интегро-дифференциальных уравнений (29) преобразуем к системе дифференциальных уравнений с помощью замены (5).

В результате получим уравнение вида (4):

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon_{\Pi}\vec{E} + P\Delta\vec{E}\right), \quad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu\vec{H}. \tag{30}$$

Так как рассматриваются поля, которые удовлетворяют условиям $\operatorname{div}\vec{E} = 0,\ \operatorname{div}\vec{H} = 0$, то $\Delta\vec{E} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}$. Учитывая второе уравнение (30), преобразуем первое уравнение (30) к виду

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{i\omega\varepsilon_{\Pi}}{1+\omega^2\mu P}\vec{E}.$$

В результате получим уравнения Максвелла для электромагнитных полей в магнитодиэлектрической среде

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -i\,\omega\varepsilon_{\mathrm{P}}\,\vec{E}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\mu\vec{H},$$

где $\varepsilon_{\mathrm{P}} = \varepsilon_{\Pi}\Big/\left(1+\omega^2\mu\,P\right),\ \mu = \mu_0\mu_r,\ P = \varepsilon_0\,P_r.$

Показано, что в частных случаях среда с пространственной дисперсией эквивалентна специальной магнитодиэлектрической среде.

Рассмотрим подынтегральную функцию в (2) экспоненциального вида

$$K_1(p) = K\frac{\exp\left(a(1-p)\right)-1}{\exp(a)-1}, \tag{31}$$

где K, a – заданные постоянные.

Тогда

$$\varepsilon_{\text{П}} = \varepsilon + \varepsilon_0\, K \left(\frac{6}{a^3} - \frac{a^2 + 3a + 6}{a^2\left(e^a - 1\right)} \right),$$

$$P_r = \frac{1}{2} K R_1^2 \left(\frac{24}{a^5} - \frac{a^4 + 5\left(a^3 + 4a^2 + 12a + 24\right)}{5a^4\left(e^a - 1\right)} \right).$$

В результате получим

$$\varepsilon_{\text{Р}} = \frac{\varepsilon_{\text{П}}}{1 + k_0^2\, \mu_r\, P_r}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c},$$

где c – скорость света в вакууме.

Заметим, что в качестве функции (31) может быть рассмотрена комплекснозначная функция.

Заключение

В работе предложена математическая модель уравнений Максвелла монохроматической электродинамики с электрической и магнитной поляризациями, которые представлены в виде операторов Лапласа, примененных к электрическому и магнитному полям. Такая модель описывает распространение электромагнитных волн в однородных средах с пространственной дисперсией. Уравнения разрешены аналитически и построена полная система прямых и обратных плоских электромагнитных волн. Число независимых полей вдвое больше, чем в обычных средах. Поля представлены через базисные электромагнитные поля, распространяющиеся в специальных магнитодиэлектрических средах.

Работа выполнена в соответствии с заданием 1.1.09 Государственной программы научных исследований «Информатика, космос и безопасность» на 2016–2020 гг.

Список литературы

1. Виноградов, А.П. Электродинамика композитных материалов / А.П. Виноградов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 206 с.

2. Костин, М.В. К теории киральной среды на основе сферических спирально проводящих частиц / М.В. Костин, В.В. Шевченко // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43, № 8. – С. 921–926.

3. Шатров, А.Д. Модель биизотропной среды из резонансных сферических частиц с идеальной смешанной проводимостью поверхности вдоль спиральных линий / А.Д. Шатров // Радиотехника и электроника. – 2000. – Т. 45, № 10. – С. 1168–1170.

4. Проникновение электромагнитных волн через композитные экраны, содержащие идеально проводящие спирали / В.Т. Ерофеенко [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 4. – С. 740–746.

5. Виноградов, А.П. К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов / А.П. Виноградов, А.В. Дорофеенко, С. Зухди // Успехи физических наук. – 2008. – Т. 178, № 5. – С. 514–518.

6. Ерофеенко, В.Т. Электродинамическая модель расчета эффективных параметров композитов из сферических биизотропных частиц / В.Т. Ерофеенко // Информатика. – 2014. – № 1. – С. 45–58.

7. Ерофеенко, В.Т. Экранирование электромагнитных полей экранами из матричных композитов, содержащих биизотропные частицы / В.Т. Ерофеенко, В.Ф. Бондаренко // Информатика. – 2014. – № 3. – С. 28–43.

8. Ерофеенко, В.Т. Модель вычисления эффективных параметров матричного композита из биизотропных частиц с учетом многократных переотражений электромагнитного поля / В.Т. Ерофеенко // Информатика. – 2015. – № 4. – С. 17–33.

9. Агранович, В.М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов / В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1979. – 432 с.

10. Силин, Р.А. Обратные волны и пространственная дисперсия / Р. А. Силин, И. Р. Тимошина // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 7. – С. 725–733.

11. Модель взаимодействия электромагнитных и тепловых полей в средах с запаздыванием / Н.Н. Гринчик [и др.] // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82, № 1. – С. 177–183.

12. Ерофеенко, В.Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Минск : БГУ, 2010. – 304 с.

Поступила 30.05.2017

Учреждение БГУ
«НИИ прикладных проблем
математики и информатики»,
Минск, пр. Независимости, 4
e-mail: bsu_erofeenko@tut.by

V.T. Erofeenko

MODELING OF ELECTROMAGNETIC WAVES PROPAGATION IN THE MEDIUM WITH SPACE DISPERSION

A mathematical model describing the propagation of electromagnetic waves in the medium with space dispersion is being developed. Modeling is based on the transformation of integro-differential equations of monochromatic electrodynamics for the fields in the medium with space dispersion to the differential model with second degree partial differential equations. Within the developed model a full system of basic plane electromagnetic fields, extending in homogeneous medium with space dispersion, is analytically constructed.