

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 621.382.3

В.Э. Маркевич

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ МЕТОДА НАВЕДЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО
БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ОСНОВЕ
МНОГОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Рассматривается аналитический синтез метода наведения для терминальной задачи управления сверхзвуковыми беспилотными летательными аппаратами на основе синергетического подхода к проектированию систем управления нелинейными многомерными динамическими объектами. Метод основан на введении в пространстве состояний синтезируемых систем оптимальных инвариантных многообразий – аттракторов, на которых наилучшим образом согласуются общие естественные (энергетические, механические, баллистические и др.) свойства объекта и частные требования конкретной технологической задачи. При этом обеспечиваются желаемые динамические характеристики и гарантируется асимптотическая устойчивость движения системы оптимальный регулятор – объект управления.

Приводятся аналитические выражения, описывающие алгоритм управления положением вектора скорости сверхзвукового беспилотного летательного аппарата, результаты математического моделирования и сравнительного анализа предлагаемого алгоритма управления с модифицированным методом пропорциональной навигации.

Введение

В настоящее время существуют методы аналитического конструирования систем при их оптимизации по одному постулируемому критерию качества в методе Летова – Калмана [1] или корректируемому критерию в методе А.А. Красовского [2]. Эти методы весьма эффективны при синтезе линейных систем управления. Вместе с тем при использовании нелинейных векторных моделей объекта высокой размерности процедура отыскания закона оптимального управления усложняется настолько, что в ряде важных для практики случаев делает крайне затруднительными или практически невозможными как выполнение самой процедуры синтеза, так и получение в замкнутой аналитической форме закона управления (приемлемого для практического использования и реализации алгоритма). Как правило, закон управления получается чрезмерно сложным, громоздким и затратным по ресурсам при практической (программной или аппаратной) реализации, а также при последующем статистическом анализе для различных условий функционирования [3–6]. В указанных и подобных этому практически важных случаях нормой является использование следующих эвристических приемов [7–12], позволяющих в некоторой весьма ограниченной степени решить упомянутые проблемы, что сопровождается безусловным ухудшением качества работы регулятора:

- феноменологического подхода к описанию динамики движения объекта, или динамического процесса, т. е. описания внешних экспериментально наблюдаемых свойств (признаков) процесса или явления без учета внутренней динамики и функциональных связей;
- существенного упрощения полной модели состояний исследуемого объекта за счет исключения из рассмотрения отдельных функциональных связей;
- линеаризации изначально нелинейной модели, исследования режима «малых» отклонений и исключения из рассмотрения режимов «больших» отклонений;
- принудительного разделения каналов управления, понижения порядка динамической системы за счет исключения взаимных перекрестных связей и т. д.

Все это приводит к прогнозируемому уже на этапе разработки ухудшению качества функционирования проектируемой системы управления при попадании в области работы (траектории движения), не предусмотренные линеаризованной редуцированной моделью объекта с искусственно разделенными каналами отработки управляющих воздействий.

Противоречие между степенью адекватности модели исследуемого объекта (процесса) и сложностью процедуры аналитического синтеза (формализации алгоритма функционирования) до недавнего времени являлось одним из основных факторов, сдерживающих получение

универсальных (в рамках рассматриваемой нелинейной многомерной модели) законов управления. Это касается как задач со свободными граничными условиями в конце траектории (неопределенным временем управления), так и задач терминального управления (с фиксированными граничными условиями в конце траектории).

Научным коллективом одной из кафедр Таганрогского радиотехнического университета, возглавляемого профессором А.А. Колесниковым, в 1989–2011 гг. был разработан новый подход к аналитическому конструированию оптимальных регуляторов для нелинейных многомерных многосвязных систем высокой размерности. Данный подход отличается тем, что для аналитического конструирования используется не совокупность частных критериев качества, по каждому из которых синтезируемая система оптимальна в строго ограниченной области пространства состояний, а единый обобщенный оптимизирующий функционал [7–12], который может быть в той или иной мере только сходен с частным критерием качества в соответствующей нечетко определенной области пространства состояний. Указанный функционал может постепенно и без скачков (асимптотически) приближаться к конкретному критерию качества, обеспечивая заданные характеристики переходных процессов в замкнутой системе, что позволяет синтезировать в замкнутой аналитической форме законы управления (регуляторы) объектов, описываемых нелинейными системами уравнений высокой размерности с учетом функциональных связей. Рассматриваемый подход, обладая значительной эвристической силой, имеет высокую степень адаптации к практическим инженерным задачам, позволяя разработчику на стадии проектирования системы осуществлять выбор оптимизирующего функционала с последующей коррекцией его структуры или параметров для получения желаемых динамических свойств (например, по результатам моделирования) замкнутой системы. Это связано с тем, что проблема многокритериальной оптимизации, как правило, не может быть решена полностью формальными методами векторной оптимизации [7–9].

Особенно сильно преимущества указанного подхода проявляются при синтезе систем управления объектами, работающими в режимах с большими отклонениями при наличии функциональных ограничений, когда их движение описывается нелинейными математическими моделями. Здесь структура оптимального управления заранее вообще неизвестна, однако путем выбора указанного выше функционала эта задача оказывается разрешимой для большинства распространенных классов нелинейных объектов.

Перейдем к краткому изложению основ рассматриваемого метода конструирования унифицированных обобщенных оптимизирующих функционалов. Так как данные функционалы выступают в роли вспомогательного средства для получения конкретных частных критериев качества во всем диапазоне условий работы объекта, будем называть эти функциональные зависимости сопровождающими оптимизирующими функционалами (СОФ).

1. Краткие сведения о выборе СОФ в задаче аналитического конструирования нелинейных регуляторов

Для полного отражения требований к показателям качества системы в режиме малых и больших отклонений желательно, чтобы СОФ имел переменную в пространстве состояний структуру. В работах [7–12] предлагается использовать сопровождающий функционал вида

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} F(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})) dt, \quad (1)$$

где $F(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}))$ – непрерывно дифференцируемая по своим аргументам положительно определенная функция; $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ – агрегированная макропеременная, представляющая собой некоторую произвольную (скалярную или векторную) дифференцируемую или кусочно-непрерывную функцию вектора фазовых координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)^T$.

Выберем подынтегральную функцию $F(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \dot{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x}))$ в (1) в виде следующей квадратичной формы:

$$F(\boldsymbol{\psi}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi})^T \mathbf{M}(t) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi}) + \dot{\boldsymbol{\psi}}(t)^T \mathbf{C}(t) \dot{\boldsymbol{\psi}}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{M}(t), \mathbf{C}(t)$ – некоторые известные квадратные матрицы (переменные в общем случае коэффициенты дифференциальных уравнений), размерность которых совпадает с размерностью вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\psi})$ и $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)$.

В скалярной форме функция (2) примет вид

$$F(\boldsymbol{\psi}, \dot{\boldsymbol{\psi}}) = m^2(t) \varphi^2(\boldsymbol{\psi}) + c^2(t) \dot{\boldsymbol{\psi}}^2(t), \quad (3)$$

где m, c – некоторые известные постоянные коэффициенты.

Тогда функционал (1) можно записать как

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} (m^2(t) \varphi^2(\boldsymbol{\psi}) + c^2(t) \dot{\boldsymbol{\psi}}^2(t)) dt. \quad (4)$$

В подынтегральном выражении функции $\varphi(\boldsymbol{\psi})$ и $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ должны удовлетворять следующим условиям: однозначности, непрерывности и дифференцируемости при всех значениях макропеременной $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$, равенству нулю функции в начале координат $\varphi(0) = 0$, а также условию $\varphi(\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{\psi} > 0$ для $\forall \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \neq 0$. Иначе говоря, должно выполняться условие $\text{sign}(\varphi(\boldsymbol{\psi})) = \text{sign}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}))$ при равенстве нулю функции $\varphi(\boldsymbol{\psi})$ на многообразии $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = 0$.

Определим полную производную функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ как

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_k} \dot{x}_k(t) \quad (5)$$

и, подставив вместо $\dot{x}_k(t)$ правые части исходной системы дифференциальных уравнений объекта

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i \in (1, N-1), \quad \dot{x}_N(t) = f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) + u(t), \quad (6)$$

получим

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_k} f_k(x_1, x_2, \dots, x_N) + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_N} u(t). \quad (7)$$

В дальнейшем без снижения общности будем полагать, что параметры функциональных уравнений являются постоянными величинами: $m(t) = \text{const}$ и $c(t) = \text{const}$.

На основе известного в вариационном исчислении свойства инвариантности к замене переменных функционал (4) может быть записан в форме

$$J_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \left(m^2 \varphi^2(\boldsymbol{\psi}) + c^2 \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})}{\partial x_N} u(t) \right)^2 \right) dt. \quad (8)$$

Очевидно, что обобщенный функционал (8) характеризует некоторые свойства как исходного объекта (6), так и его системы управления. Это означает, что в рассматриваемом методе оптимизирующий функционал не строго постулируется заранее, как это предполагается в стандартных линейных квадратично-гауссовских задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [1–6], а формируется динамически путем выбора соответствующих функций $\varphi(\boldsymbol{\psi})$ и $\boldsymbol{\psi}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ с привлечением уравнений объекта (6). Такой подход позволяет в определенной степени учесть свойства объекта управления, так как внешнее «навязывание» постулируемого критерия и игнорирование свойств объекта на этапе выбора критерия качества может привести к неприемлемому для нелинейного объекта протеканию переходных процессов.

Следующее отличие предлагаемого в [7–12] подхода заключается в использовании при формировании функционала (4) обобщенных макропеременных $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$, являющихся некоторыми агрегатами (функциями) координат состояния. В этой связи задача синтеза регуляторов на основе сопровождающего функционала (8) с применением агрегированных макропеременных называется (по аналогии с АКОР) задачей аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР). Агрегированные макропеременные $\psi(\mathbf{x})$ могут выбираться из разных соображений, связанных с желаемыми переходными и установившимися режимами движения объекта управления.

Используя скалярную функцию $\psi(\mathbf{x})$, сформулируем задачу АКАР: требуется найти закон управления $u(\psi) = u(\mathbf{x})$, который обеспечивал бы перевод изображающей точки из произвольного начального состояния \mathbf{x}_0 (для некоторой допустимой области) в окрестность многообразия $\psi(\mathbf{x}) = 0$ пространства фазовых координат (x_1, x_2, \dots, x_N) и дальнейшее ее движение вдоль этого многообразия к началу координат пространства состояний.

Уравнение экстремалей, доставляющих минимум функционалу (4), включает разновидности устойчивых и неустойчивых траекторий и имеет вид

$$m^2 \varphi^2(\psi) = c^2 \dot{\psi}^2(t). \quad (9)$$

Часть устойчивых экстремалей, удовлетворяющих (9), можно записать как дифференциальное уравнение

$$T \dot{\psi}(t) + \varphi(\psi) = 0, T = \frac{c}{m}. \quad (10)$$

Из полученного уравнения с учетом (7) в силу исходных уравнений объекта (6) получаем основное функциональное уравнение в методе АКАР:

$$T \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_N} u(\mathbf{x}) + T \sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) + \varphi(\psi) = 0. \quad (11)$$

Запишем выражение (11) следующим образом:

$$u(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_N} \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}) + \frac{\varphi(\psi)}{T} \right). \quad (12)$$

Здесь определяется множество допустимых законов управления $u(\mathbf{x})$, обеспечивающих перевод изображающей точки (ИТ) из произвольного начального состояния в окрестность многообразия $\psi(\mathbf{x}) = 0$. Законы управления (12) будут удерживать ИТ в этой окрестности при ее дальнейшем движении вдоль $\psi(\mathbf{x}) = 0$. Такое движение будет уже описываться системой дифференциальных уравнений (СДУ) размерности $N - 1$:

$$\dot{x}_{i\psi}(t) = f_i(x_{1\psi}, x_{2\psi}, \dots, x_{N-1\psi}), \quad i \in (1, N-1). \quad (13)$$

Для получения уравнений (13) следует из конечного уравнения $\psi(\mathbf{x}) = 0$ найти координату $x_N(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ и подставить ее в первые $N - 1$ уравнений (6).

Для нелинейных объектов высокой размерности используется совокупность последовательно вводимых инвариантных притягивающих многообразий (аттракторов). Вводя в рассмотрение промежуточные (фиктивные) управления на основе исходных многообразий, можно обеспечить последовательное понижение размерности (редукцию) исходной системы уравнений до заданного вида, обеспечивающего требуемую динамику регулирования. Оценим пара-

метры переходных процессов из общего решения функционального уравнения (10) при $\psi = \varphi(\Psi)$, являющегося в данном случае однородным дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом:

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(0, \mathbf{x}_0) \exp\left(-\int_0^t \frac{dt}{T}\right) = \psi(0, \mathbf{x}_0) \exp\left(-\frac{t}{T}\right). \quad (14)$$

Время сходимости функции от начального $\psi(0, \mathbf{x}_0)$ к конечному значению $\psi(t_k, \mathbf{x}_k) = 0,05\psi(0, \mathbf{x}_0)$ составит

$$t_\psi = T \ln\left(\frac{\psi_0(\mathbf{x}_0)}{\psi_k(\mathbf{x}_k)}\right) \approx 3T. \quad (15)$$

Оценка (15) приближенно определяет время попадания ИТ в окрестность многообразия $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0$. Время движения ИТ к началу координат пространства состояний определяется решением уравнений (13). При нелинейных функциональных связях вида (10) (в том числе для векторных функциональных уравнений) оценка динамических характеристик выполняется методами математического (статистического) моделирования.

Данный подход к синтезу многокритериальных систем можно интерпретировать как построение такого управления, которое сначала переводит ИТ из произвольного начального состояния на некоторое, заранее выбранное, единственное многообразие $\psi(\mathbf{x}) = 0$, являющееся аттрактором, а затем обеспечивает устойчивое движение с соответствующей динамикой вдоль этого многообразия к началу координат пространства состояний. Иначе говоря, выполняется двухэтапная процедура движения ИТ: сначала происходит движение к выбранному многообразию, а затем к началу координат пространства состояний.

Указанный подход можно обобщить путем введения последовательной или параллельной совокупности притягивающих многообразий $\psi_j(\mathbf{x}) = 0, j \in (1, J), j < N$, понижающейся размерности в фазовом пространстве синтезируемых систем.

При этом для системы уравнений объекта

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i \in (1, p), \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, x_2, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j \in (p+1, N-1), \\ \dot{x}_N(t) &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) + u(t) \end{aligned} \quad (16)$$

агрегированные макропеременные первого этапа управления могут быть выбраны в виде

$$\psi_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \beta_{1k} x_k + \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) = 0. \quad (17)$$

Согласно (12) управление первого этапа, оптимальное по критерию

$$J_\Sigma = \int_0^\infty (m^2 \varphi_1^2(\psi_1) + c^2 \dot{\psi}_1^2(t)) dt, \quad (18)$$

будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{\beta_N} \sum_{i=1}^p \left(\beta_{1i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right) f_i(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{\beta_{1N}} \sum_{i=p+1}^{N-1} \left(\beta_{1i} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \right) (f_j(\mathbf{x}) + a_{j+1}x_{j+1}) - \frac{1}{\beta_{1N}T} \varphi(\psi_1(\mathbf{x})) - f_N(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (19)$$

Управление (19) переводит ИТ на многообразиие $\psi_1(\mathbf{x}) = 0$, движение вдоль которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f_i(x_1, \dots, x_N), \quad i \in (1, p), \\ \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j \in (p+1, N-2), \\ \dot{x}_{N-1}(t) &= f_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}) - \frac{a_N}{\beta_{1N}} \sum_{k=1}^{N-1} \beta_{1k} x_k - \frac{a_n}{\beta_{1N}} \varphi_1(x_1, \dots, x_{N-1}).\end{aligned}\quad (20)$$

Обозначив $\beta_{1N}u_2(t) = a_N\varphi_1(x_1, \dots, x_{N-1})$, назовем $u_2(t)$ промежуточным (фиктивным) управлением, которое переводит ИТ на второе притягивающее многообразие:

$$\psi_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N-1} \beta_{2k} x_k + \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{N-2}) = 0. \quad (21)$$

Выполняя последовательное введение многообразий меньшей размерности $\psi_j(\mathbf{x})$, $j \in (1, N-1)$, можно понизить порядок системы до заданной величины.

Процедура синтеза в соответствии с предложенным методом состоит в формировании закона управления $u_1(\mathbf{x})$ (19). При этом основной задачей является определение функции $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ и ее $N-1$ производных $\partial\varphi_1/\partial x_j$. Функция $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$ может быть найдена в результате последовательного определения вспомогательных функций $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_{N-m})$, входящих в соответствующие промежуточные управления $u_l(x_1, x_2, \dots, x_{N-l+1})$. Конкретно эта задача решается в обратной последовательности: сначала выбирается функция $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_{N-m})$ исходя из условий асимптотической устойчивости и требования к качеству движения на заключительном m -м этапе, затем находится функция $\varphi_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{N-m+1})$ и т. д. вплоть до функции, позволяющей завершить процедуру синтеза закона управления $u_l(x_1, x_2, \dots, x_{N-l+1})$.

Более подробно с теоретическими и прикладными аспектами синтеза оптимальных регуляторов многомерных нелинейных динамических систем методом АКАР можно ознакомиться в литературе [7–12].

2. Математическая модель исследуемого динамического объекта

Взаимное положение беспилотного летательного аппарата (БПЛА) и цели в некоторой неподвижной системе координат (СК) $OXYZ$ может быть задано тремя координатами: дальностью и двумя углами θ_2, φ_2 , определяющими наклон линии визирования (ЛВ) «ракета – цель». Изменение этих координат может быть описано с помощью кинематических уравнений относительно пространственного движения. Обычно кинематические уравнения составляются в измерительной СК $OX_2Y_2Z_2$, в которой осуществляется слежение бортового измерителя радиолокационной головки самонаведения (РГС) за целью. Возможно также измерение координат в неподвижной СК $OXYZ$ с последующим пересчетом в измерительную СК (ИСК). При отсутствии ошибок сопровождения цели или их малых значений ось OX_2 совпадает с ЛВ «БПЛА – цель». При движении БПЛА с ускорением \mathbf{W}_p и цели с ускорением \mathbf{W}_y происходит изменение вектора дальнос-

ти \mathbf{D} и вращение ИСК с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. В векторной форме относительное движение БПЛА (материальной точки) и цели определяется уравнением

$$\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{W}_y - \mathbf{W}_p, \quad (22)$$

где $\mathbf{W}_y = (W_{xy} \ W_{yy} \ W_{zy})^T$, $\mathbf{W}_p = (W_{xp} \ W_{yp} \ W_{zp})^T$ – вектор линейных ускорений цели и БПЛА в СК, связанной с ЛВ «БПЛА – цель».

Применяя правила дифференцирования векторов, запишем скалярные кинематические уравнения относительного движения БПЛА и цели:

$$\begin{aligned} \ddot{D} - D(\omega_{y2}^2 + \omega_{z2}^2) &= W_{xy} - W_{xp}, \quad D\dot{\omega}_{z2} + \dot{D}\omega_{z2} + D\omega_{x2}\omega_{y2} = W_{yy} - W_{yp}, \\ -D\dot{\omega}_{y2} - \dot{D}\omega_{y2} + D\omega_{x2}\omega_{z2} &= W_{zy} - W_{zp}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\boldsymbol{\omega}_2 = (\omega_{x2} \ \omega_{y2} \ \omega_{z2})^T$ – компоненты вектора угловой скорости вращения (УСВ) ЛВ «БПЛА – цель» в системе координат, связанной с ЛВ.

В случае использования информации от бортового измерителя БПЛА полученные уравнения можно дополнить кинематическими соотношениями, связывающими относительные угловые координаты и угловые скорости вращения цели в ИСК и скоростной СК (ССК).

Кинематические соотношения, определяющие связь между углами и проекциями УСВ произвольной СК на оси данной СК, имеют в общем случае вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{y2} \sin(\gamma_2) + \omega_{z2} \cos(\gamma_2), \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{1}{\cos(\theta_2)} (\omega_{y2} \cos(\gamma_2) - \omega_{z2} \sin(\gamma_2)), \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega_{x2} - \operatorname{tg}(\theta_2) (\omega_{y2} \cos(\gamma_2) - \omega_{z2} \sin(\gamma_2)), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Theta_2 = (\theta_2, \varphi_2, \gamma_2)$ – углы ориентации ЛВ «БПЛА – цель» в декартовой СК, связанной с точкой расположения радиолокационной станции наведения (РЛСН) БПЛА.

При отсутствии управления положением бортового измерителя по крену и равенстве $\gamma_2 = 0$ компоненту вектора УСВ ω_{x2} удобно выразить через составляющие вектора ω_{y2} и ω_{z2} с использованием упрощенных кинематических соотношений:

$$\omega_{x2} = \dot{\varphi}_2 \sin \theta_2, \quad \omega_{y2} = \dot{\varphi}_2 \cos \theta_2, \quad \omega_{z2} = \dot{\theta}_2. \quad (25)$$

Отсюда следует, что

$$\omega_{x2} = \omega_{y2} \operatorname{tg} \theta_2. \quad (26)$$

Подставляя выражения (25) и (26) в (23), а также формализуя динамические свойства объекта управления путем введения дифференциального уравнения первого порядка, получим систему дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение цели относительно БПЛА:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \quad \dot{D} = V, \\ \dot{V} &= (W_{xy} - W_{xp}) + D(\omega_{y2}^2 + \omega_{z2}^2), \\ \dot{\omega}_{z2} &= \frac{(W_{yy} - W_{yp}) - 2V\omega_{z2}}{D} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{y2} &= \frac{-(W_{zц} - W_{zp}) - 2V\omega_{y2}}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2), \\ \dot{W}_{y2} &= \alpha_p (U_y - W_{y2}), \quad \dot{W}_{z2} = \alpha_p (U_z - W_{z2}),\end{aligned}\quad (27)$$

где $\alpha_p = \frac{1}{T_p}$ – коэффициент, определяющий инерционные свойства неизменной части объекта управления; T_p – постоянная времени звена, аппроксимирующего динамические свойства БПЛА; U_y, U_z – сигналы управления на выходе оптимального регулятора.

Влияние силы тяжести на величину УСВ ЛВ учитывать не будем, полагая, что ее влияние полностью компенсировано системой стабилизации БПЛА с использованием известных алгоритмов [1–6].

В целях упрощения процедуры синтеза исключим из выражения (27) соотношения для относительной дальности D и скорости сближения V :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \quad \dot{\omega}_{z2} = \frac{W_{yp}^* - 2V\omega_{z2}}{D} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \\ \dot{\omega}_{y2} &= \frac{-W_{zp}^* - 2V\omega_{y2}}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2), \quad \dot{W}_{y2} = \alpha_p (U_y - W_{y2}), \quad \dot{W}_{z2} = \alpha_p (U_z - W_{z2}),\end{aligned}\quad (28)$$

где $W_{yp}^* = (\hat{W}_{yц} - W_{yp})$, $W_{zp}^* = (\hat{W}_{zц} - W_{zp})$ – относительные управляющие ускорения БПЛА; $\hat{W}_{yц}$, $\hat{W}_{zц}$ – оценки нормальных ускорений цели, полученные в фильтре оценивания параметров движения цели. Полученные уравнения являются исходными для синтеза оптимального регулятора методом АКАР. Дальнейший учет оценок абсолютных нормальных ускорений БПЛА можно выполнить через указанную выше подстановку.

При управлении положением антенны бортового измерительного устройства, например антенны бортовой РГС, по крену систему уравнений (27) следует дополнить кинематическими соотношениями для относительных угловых координат (УК) цели в СК бортовой РГС.

Задача синтеза оптимального регулятора для системы (28) заключается в том, чтобы найти аналитические выражения (законы управления) $U_y = f_y(\theta_2, \varphi_2, \omega_{y2}, \omega_{z2}, W_{y2}, W_{z2})$ и $U_z = f_z(\theta_2, \varphi_2, \omega_{y2}, \omega_{z2}, W_{y2}, W_{z2})$, обеспечивающие минимальную величину УСВ «БПЛА – цель» ω_{y2}, ω_{z2} в процессе наведения, а также равенство их нулю в точке встречи БПЛА и цели.

Минимизация абсолютной величины УСВ «БПЛА – цель» эквивалентна минимизации мгновенного промаха и нормальных ускорений БПЛА в точке встречи. Это следует из соотношения для оценки мгновенного промаха в ССК:

$$\mathbf{h} = (h_x \ h_y \ h_z)^T = \frac{D}{|\dot{\mathbf{D}}|} [\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{D}], \quad \boldsymbol{\omega}_2 = M_e(\Theta_2) \frac{[\mathbf{D} \times \dot{\mathbf{D}}]}{\mathbf{D}^T \mathbf{D}}, \quad \mathbf{D} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|, \quad \dot{\mathbf{D}} = |\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_0|, \quad (29)$$

где $\mathbf{h} = (h_x \ h_y \ h_z)^T$ – компоненты вектора мгновенного промаха \mathbf{h} ; \mathbf{r}_0 – радиус-вектор цели относительно точки наблюдения (РЛСН); \mathbf{r}_1 – радиус-вектор БПЛА относительно точки наблюдения (РЛСН); $M_e(\Theta)$ – матрица полного поворота Эйлера – Крылова текущей СК относительно базовой СК на углы $\Theta = (\theta, \varphi, \gamma)^T$ (матрица направляющих косинусов).

Выражение для оценки нормальных ускорений БПЛА в проекциях на оси ИСК имеет вид

$$\mathbf{W}_0 = \dot{\mathbf{V}} + [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{V}], \quad \mathbf{W}_2 = M_e(\boldsymbol{\Theta}_2) M_e(\boldsymbol{\Theta}_0)^T \mathbf{W}_0, \quad (30)$$

где $\mathbf{V} = (V \ 0 \ 0)^T$ – вектор скорости БПЛА в ССК; V – модуль вектора скорости БПЛА; $\boldsymbol{\omega}_0 = (\omega_{x0} \ \omega_{y0} \ \omega_{z0})^T$ – вектор УСВ ССК; $\boldsymbol{\Theta}_0 = (\theta_0, \varphi_0, \gamma_0)$ – углы ориентации вектора скорости БПЛА в декартовой СК; $\mathbf{W}_0 = (W_{x0} \ W_{y0} \ W_{z0})^T$ – вектор нормальных ускорений БПЛА в ССК; $\mathbf{W}_2 = (W_{x2} \ W_{y2} \ W_{z2})^T$ – вектор нормальных ускорений БПЛА в СК ЛВ «БПЛА – цель».

Будем полагать, что нормальные ускорения объекта управления ограничены величиной располагаемых нормальных ускорений, которые в общем случае зависят от реализуемой траектории наведения, времени полета БПЛА, ошибок измерения координат цели, тяги двигателя БПЛА и поэтому могут иметь нестационарный и случайный характер.

Закон ограничения нормальных ускорений БПЛА запишем следующим образом:

$$\bar{W}_{yp} = k_w W_{\max}(t) \operatorname{th} \left(\frac{W_{yp}}{W_{\max}(t)} \right), \quad \bar{W}_{zp} = k_w W_{\max}(t) \operatorname{th} \left(\frac{W_{zp}}{W_{\max}(t)} \right), \quad k_w = (1,05 \dots 1,15), \quad (31)$$

где $W_{\max}(t)$ – известные располагаемые ускорения БПЛА в процессе наведения на цель; $\bar{W}_{yp}, \bar{W}_{zp}$ – ограниченные нормальные ускорения БПЛА. Ограничения на угловое положение БПЛА относительно линии визирования цели (углы упреждения) в данной задаче не накладываются.

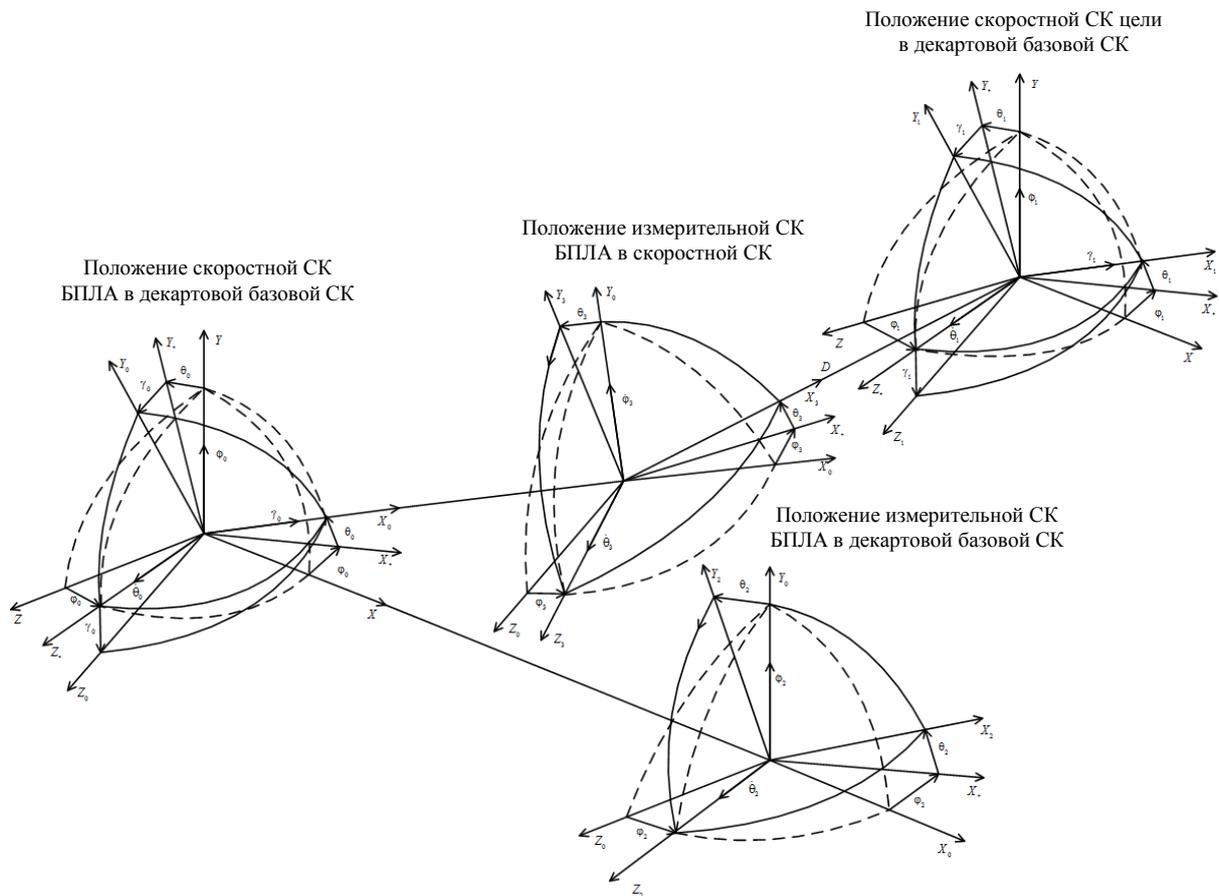


Рис. 1. Взаимосвязь СК, используемых для синтеза закона управления и моделирования процесса наведения БПЛА на маневрирующую цель

На рис. 1 показано взаимное расположение СК, используемых при моделировании абсолютного и относительного движения БПЛА и цели, а также при аналитическом синтезе закона управления:

– ССК БПЛА повернута на скоростные углы тангажа, рыскания и крена $\Theta_0 = (\theta_0, \varphi_0, \gamma_0)^T$ относительно базовой декартовой (неподвижной земной) СК;

– ССК цели повернута на скоростные углы тангажа, рыскания и крена $\Theta_1 = (\theta_1, \varphi_1, \gamma_1)^T$ относительно базовой декартовой (неподвижной земной) СК;

– абсолютная ИСК БПЛА повернута на углы $\Theta_2 = (\theta_2, \varphi_2, 0)^T$ относительно базовой декартовой (неподвижной земной) СК;

– относительная ИСК БПЛА связана с координатными осями бортовой РГС, ориентированной при отсутствии ошибок сопровождения в направлении на цель и характеризуемой углами поворота ЛВ «БПЛА – цель» $\Theta_3 = (\theta_3, \varphi_3, 0)^T$ в ССК (для аналитического конструирования не используется).

Рассмотрим процедуру аналитического синтеза оптимального регулятора для терминальной задачи наведения БПЛА на движущуюся цель и прикладные аспекты применения СОФ для построения частных критериев качества функционирования нелинейных многомерных объектов управления, отражающих заданные инженерные требования к динамическим свойствам синтезируемой системы управления в различных режимах работы.

3. Аналитический синтез оптимального регулятора в задаче наведения сверхзвукового БПЛА на маневрирующую цель

В уравнения возмущенного движения объекта (БПЛА) (28) входят независимые сигналы управления U_y, U_z , число которых меньше числа переменных состояний динамической системы. Ставится задача перевода объекта из произвольного состояния $\mathbf{x}_0(t_0) = (\theta_2 \ \varphi_2 \ \omega_{z2} \ \omega_{y2} \ W_{y2} \ W_{z2})^T$ в момент времени $t = t_0$ в некоторой допустимой области пространства $\mathbf{x} \in X$ в конечное состояние $\mathbf{x}_k(t_k) = (\theta_2(t_k) \ \varphi_2(t_k) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ фазового пространства за время $t_k < T_f(t)$ при выполнении условия $\tau(t) = \frac{D(t)}{\dot{D}(t)} = 0$, где $T_f(t)$ – максимально допустимое (нефиксированное в общем случае) время перевода объекта в конечное состояние.

При этом необходимо обеспечить минимум оптимизирующего функционала

$$J_0 = \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^1 (\dot{\psi}_k^2(t) T_k^2(t) + \psi_k^2(t)) \right) dt, \quad (32)$$

а также асимптотическую устойчивость движения БПЛА на траектории. Будем полагать каналы управления идентичными: $T_0(t) = T_1(t) = T_\psi(t)$. Тогда уравнения экстремалей, доставляющих минимум функционалу (32), будут следующими:

$$T_\psi(t) \dot{\psi}_0(t) + \psi_0(t) = 0, \quad T_\psi(t) \dot{\psi}_1(t) + \psi_1(t) = 0, \quad (33)$$

где $T_\psi(t)$ – время, определяющее попадание ИГ на пространственную линию пересечения инвариантных многообразий $\psi_0(t) \cap \psi_1(t)$ или $\psi_0(t) + \psi_1(t) = 0$.

Введем кинематические инварианты, которые наиболее полно соответствуют терминальной задаче с неопределенным временем – задаче минимизации нормальных ускорений в процессе наведения и в точке встречи БПЛА с целью:

$$\omega_{y2} = 0, \omega_{z2} = 0. \quad (34)$$

На первом этапе синтеза введем полуопределенные макропеременные вида

$$\Psi_1(t) = W_{zp} + f_y(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2), \Psi_2(t) = W_{zp} + f_z(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2) \quad (35)$$

и подставим их в функциональные уравнения (33). В результате получим

$$\begin{pmatrix} \alpha_p (U_z - W_{zp}) + \left(\frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} \right) \\ \alpha_p (U_y - W_{yp}) + \left(\frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_p (W_{zp} + f_z(\mathbf{x})) \\ \alpha_p (W_{yp} + f_y(\mathbf{x})) \end{pmatrix} = 0. \quad (36)$$

Выражая соответствующие сигналы управления, имеем

$$\begin{pmatrix} U_z \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{zp} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_p} \right) - \frac{h_z(\mathbf{x})}{\alpha_p} + \frac{\alpha_0}{\alpha_p} (W_{yp}^* + f_z(\mathbf{x})) \\ W_{yp} \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_p} \right) + \frac{h_y(\mathbf{x})}{\alpha_p} + \frac{\alpha_0}{\alpha_p} (W_{zp}^* + f_y(\mathbf{x})) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$h_z(\mathbf{x}) = \dot{\omega}_{y2} \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \dot{\omega}_{z2} \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \dot{\varphi}_2 \frac{\partial f_z(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2},$$

$$h_y(\mathbf{x}) = \dot{\omega}_{y2} \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{y2}} + \dot{\omega}_{z2} \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \omega_{z2}} + \dot{\theta}_2 \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \theta_2} + \dot{\varphi}_2 \frac{\partial f_y(\mathbf{x})}{\partial \varphi_2} + \alpha_0 (W_{zp}^* + f_y(\mathbf{x})).$$

Запишем редуцированную систему уравнений, подставив вместо W_{yp}^* , W_{zp}^* значения, полученные из условия $\Psi_1(\mathbf{x}) = 0, \Psi_2(\mathbf{x}) = 0$:

$$W_{yp}^* = -f_z(\mathbf{x}), W_{zp}^* = -f_y(\mathbf{x}). \quad (38)$$

В результате

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= \omega_{z2}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_{y2}}{\cos(\theta_2)}, \\ \dot{\omega}_{z2} &= \frac{-2V\omega_{z2} - f_z(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2)}{D} - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2), \\ \dot{\omega}_{y2} &= \frac{-2V\omega_{y2} + f_y(\omega_{y2}, \omega_{z2}, \theta_2, \varphi_2)}{D} + \omega_{y2}\omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Выбирая должным образом функции $f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})$, которые для редуцированной системы имеют смысл эквивалентных внутренних управлений, можно задать требуемые динамические свойства синтезированной системы исходя из первоначально заданных кинематических инвариантов и критериев качества. Продолжим процедуру синтеза и выберем в качестве опорной (эталонной) системы уравнений соотношения вида

$$\dot{\theta}_{\psi 2} = \omega_{z\psi 2}, \quad \dot{\phi}_{\psi 2} = \frac{\omega_{y\psi 2}}{\cos(\theta_{\psi 2})},$$

$$\dot{\omega}_{z\psi 2} = -\mu_z(t)(\omega_{z\psi 2} + \alpha_z \omega_{z\psi 2}^3), \quad (40)$$

$$\dot{\omega}_{y\psi 2} = -\mu_y(t)(\omega_{y\psi 2} + \alpha_y \omega_{y\psi 2}^3),$$

$$\mu_y(t) = \frac{k_{\alpha y}}{\tau(t)}, \quad \mu_z(t) = \frac{k_{\alpha z}}{\tau(t)}, \quad \tau(t) = \frac{\dot{D}(t)}{D(t)} = \frac{V(t)}{D(t)},$$

где α_y, α_z – переменные в общем случае коэффициенты при кубических слагаемых по соответствующей координате; $\mu_y(t), \mu_z(t)$ – коэффициенты сходимости уравнений для $\omega_{y\psi 2}(t), \omega_{z\psi 2}(t)$. При известных оценках $W(t) = \ddot{D}(t)$ уравнения для $\tau(t)$ можно уточнить, представив

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \tau(t)\dot{\mu}_0(t) = k_\alpha \left(\frac{1}{\tau(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\tau(t)} \right) \right). \quad (41)$$

Тогда общее выражение для каждого из коэффициентов сходимости примет вид

$$\mu_z(t) = k_\alpha \left(\frac{V(t)}{D(t)} + \frac{D(t)}{V(t)} \left(\frac{W(t)V(t) - V^2(t)}{D^2(t)} \right) \right). \quad (42)$$

Замкнутая система (40) асимптотически устойчива при выполнении условий $(\alpha_y, \alpha_z) > 0$, $(\mu_y(t), \mu_z(t)) > 0$ и будет иметь аperiodический характер переходных процессов при малых отклонениях от притягивающих многообразий Ψ_1 и Ψ_2 .

Выбор приведенного типа уравнений обусловлен необходимостью снижения времени перехода ИТ на устойчивые траектории (инвариантные многообразия) при больших значениях УСВ ЛВ.

Приравнивая правые части уравнений (39) и (40), получим выражения для неопределенных функций $f_y(\mathbf{x}), f_z(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f_y(\mathbf{x}) &= D(\mu_z(\omega_{z2} + \alpha_z \omega_{z2}^2) - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2)) - 2V\omega_{z2}, \\ f_z(\mathbf{x}) &= -D(\mu_y(\omega_{y2} + \alpha_y \omega_{y2}^2) - \omega_{y2}^2 \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2)) + 2V\omega_{y2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя (43) в (37), получим выражения для двухканального управления:

$$U(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{\alpha_\psi}{\alpha_\rho}\right) (W_{yp} \quad W_{zp})^T - \frac{\Gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{v} + \alpha_\psi \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha})}{\alpha_\rho},$$

$$\Gamma_{11} = D\omega_{y2}^2 (\operatorname{tg}^2(\theta_2) + 1),$$

$$\Gamma_{13} = D\mu_z (3\alpha_z \omega_{z2}^2 + 1) - 2V,$$

$$\Gamma_{14} = -2D\omega_{y2} \operatorname{tg}(\theta_2),$$

$$\Gamma_{21} = D\omega_{y2} \omega_{z2} (\operatorname{tg}^2(\theta_2) + 1), \quad (44)$$

$$\Gamma_{23} = -2D\omega_{y2} \operatorname{tg}(\theta_2),$$

$$\Gamma_{24} = 2V - D(\mu_y (3\alpha_y \omega_{y2}^2 + 1) + \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2)),$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{22} = 0,$$

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} D(\mu_z (\omega_{z2} + \alpha_z \omega_{z2}^2) - \omega_{y2}^2 \operatorname{tg}(\theta_2)) - 2V\omega_{z2} \\ D(\mu_y (\omega_{y2} + \alpha_y \omega_{y2}^2) - \omega_{y2} \omega_{z2} \operatorname{tg}(\theta_2)) + 2V\omega_{y2} \end{pmatrix},$$

где $\Gamma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha})$ – матричная функция векторного аргумента размером 2×3 ; $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha})$ – векторная функция векторного аргумента размерностью 2×1 ; $\alpha_\psi = T_\psi(t)$ – коэффициент сходимости для функциональных уравнений; $\mathbf{x} = (D \dot{\theta}_2 \varphi_2 \omega_{z2} \omega_{y2})^T$, $\mathbf{v} = (\dot{D} \ddot{D} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 \dot{\omega}_{z2} \dot{\omega}_{y2})^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_y \mu_z)^T$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_y \alpha_z)^T$ – вектор фазовых координат, вектор первых производных фазовых координат, а также векторы переменных коэффициентов для функциональных уравнений соответственно.

Полученный метод наведения учитывает взаимные перекрестные связи между каналами управления, нелинейный и многомерный характер изменения координат, а также динамические свойства объекта управления (запаздывание в контуре наведения). Желаемая динамика переходных процессов в рамках применяемых инвариантных многообразий задается выбором векторных коэффициентов $\alpha_\psi(t)$, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\mu}(t)$. В случае, когда время переходных процессов значительно меньше интервала монотонно изменяющихся параметров, нестационарным характером коэффициентов функционального уравнения в первом приближении (на этапе предварительной оценки характеристик) можно пренебречь.

Переменные, входящие в векторы $\mathbf{x} = (D \dot{\theta}_2 \varphi_2 \omega_{z2} \omega_{y2})^T$ и $\mathbf{v} = (\dot{D} \ddot{D} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi}_2 \dot{\omega}_{z2} \dot{\omega}_{y2})^T$, оцениваются с использованием линейного или расширенного фильтра Калмана – Бьюси, реализованного на основе кинематических уравнений (уравнений динамики) вида (27) или аналогичных уравнений, позволяющих оценить необходимые переменные состояния (фазовые координаты).

4. Математическое моделирование процесса наведения БПЛА на маневрирующую аэродинамическую цель

Математическое моделирование выполнялось в среде инженерного и научного моделирования MATHCAD 15, представляющего собой систему компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированных на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением. Для моделирования использова-

лись три системы кинематических уравнений: уравнения динамики относительного перемещения БПЛА и цели (27), а также уравнения абсолютного перемещения относительно РЛСН:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_j &= \omega_{zj}, \quad \dot{\beta}_j = \frac{\omega_{yj}}{\cos(\varepsilon_j)}, \quad \dot{\rho}_j = V_j, \\ \dot{v}_j &= W_{yj} + \rho_j (\omega_{yj}^2 + \omega_{zj}^2), \\ \dot{\omega}_{zj} &= \frac{W_{yj} - 2V_j \omega_{zj}}{\rho_j} - \omega_{yj}^2 \operatorname{tg}(\varepsilon_j), \quad \dot{\omega}_{yj} = \frac{-W_{zj} - 2V_j \omega_{yj}}{\rho_j} + \omega_{yj} \omega_{zj} \operatorname{tg}(\varepsilon_j), \\ \dot{W}_{yj} &= \alpha_{yj} (w_{yj} - W_{yj}), \quad \dot{W}_{zj} = \alpha_{zj} (w_{zj} - W_{zj}),\end{aligned}\tag{45}$$

где $\varepsilon_j, \beta_j, \rho_j$ – угол места, азимут и радиальная дальность БПЛА (цели) относительно наземной радиолокационной станции (РЛС); V_j – радиальная скорость БПЛА (цели); ω_{yj}, ω_{zj} – УСВ вращения ЛВ «РЛС – БПЛА» («РЛС – цель») в проекциях на оси измерительной СК, продольная ось которой связана с соответствующей ЛВ; W_{yj}, W_{zj} – нормальные ускорения БПЛА (цели) в проекциях на оси измерительной СК; w_{yj}, w_{zj} – нормальные ускорения БПЛА (цели) на входе фильтра, моделирующего запаздывание в контуре управления БПЛА (динамику маневра цели); $j \in (0, 1)$ – подстрочный индекс переменных состояний: 0 – БПЛА, 1 – цель.

Для моделирования задавались следующие параметры движения цели:

- начальные декартовы координаты цели и пусковой установки БПЛА относительно наземной РЛС;
- начальные производные декартовых координат цели относительно наземной РЛС и закон изменения продольного ускорения БПЛА;
- величина и время действия нормальных ускорений цели при совершении маневра уклонения от БПЛА;
- переменные и постоянные коэффициенты, определяющие характеристики закона управления БПЛА.

Для сравнительного анализа и предварительной оценки эффективности разработанных алгоритмов использовался модифицированный метод пропорциональной навигации, синтезированный по комбинированному линейному критерию минимума среднеквадратического отклонения (СКО) угловой скорости вращения ω_{y2}, ω_{z2} и нормальных ускорений [3–5]:

$$I = M \left\{ \mathbf{y}(t_k)^T \mathbf{S}(t_k) \mathbf{y}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} U_y^2(t) dt \right\},\tag{46}$$

где $\mathbf{y} = (\omega_{z2} \ W_{y2})^T$ – вектор переменных состояний, используемый в одномерной задаче синтеза оптимального управления; $\mathbf{S}(t_k)$ – матрица весовых (штрафных) коэффициентов для фазовых координат в конечный момент времени; $M(x)$ – операция вычисления математического ожидания величины x .

Для описания динамики использовалась линеаризованная система кинематических уравнений относительного движения БПЛА без учета перекрестных связей между каналами управления:

$$\dot{\omega}_{z2} = \frac{(W_{yч} - U_y) - 2V\omega_{z2}}{D}, \quad \dot{W}_{yч} = \alpha_u (\xi_y - W_{yч}), \quad (47)$$

где α_u – величина, пропорциональная полосе пропускания формирующего фильтра нормальных ускорений цели; ξ_y – отсчеты нормального белого шума с нулевым средним и известной дисперсией на входе формирующего фильтра нормальных ускорений цели.

Результатом аналитического синтеза является соотношение для расчета нормальных ускорений БПЛА при наведении на маневрирующую цель согласно системе уравнений (47), удовлетворяющих критерию (46):

$$U_y = K_N \left(\omega_{z2} |V| + \frac{\exp(-\alpha_u \tau(t)) + \alpha_u (\tau(t) - 1) W_{yч}}{\alpha_u^2 \tau(t)} \right), \quad (48)$$

где $\tau(t)$ – текущая оценка времени, оставшегося до встречи БПЛА с целью; $K_N = 3$ – постоянный навигационный коэффициент.

При использовании разложения экспоненциальной функции в степенной ряд из трех слагаемых выражение (48) упрощается. В этом случае точность вычислений требуемого ускорения БПЛА будет увеличиваться по мере сближения с целью:

$$U_y = (K_N \omega_{z2} |V| + 0,5 (K_N - \alpha_u \tau(t)) W_{yч}). \quad (49)$$

Как показывают результаты моделирования, дополнительное повышение точности наведения БПЛА на цель можно получить, используя вместо фиксированного навигационного коэффициента переменный коэффициент вида

$$K_N(t) = k_0 + k_1 \left(1 - \frac{\tau(t)}{\tau_0} \right), \quad (50)$$

где τ_0 – время, оставшееся до встречи с целью, зафиксированное в момент старта БПЛА; $k_0 = (2...3)$, $k_1 = (3...4)$. Статистический характер переменных при сравнительном анализе методов наведения учитывался путем введения аддитивного узкополосного нормального шума для дальности, радиальной скорости, углов визирования цели и угловых скоростей вращения ЛВ. Сигналы компенсации продольного ускорения БПЛА не вводились. Весовая компонента нормального ускорения при моделировании не учитывалась. Использовался переменный навигационный коэффициент $K_N(t)$ в уравнении (49). Для моделирования в качестве исходных данных использовались:

– радиус-вектор начальных координат БПЛА $\mathbf{r}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$ (точка старта относительно наземной РЛС);

– радиус-вектор начальных координат цели $\mathbf{r}_1 = (x_1 \ y_1 \ z_1)^T$ и его первых производных $\mathbf{v}_1 = (\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{z}_1)^T$;

– нормальные ускорения маневрирующей цели $\mathbf{W}_1 = (W_{x1} \ W_{y1} \ W_{z1})^T$ в ИСК;

– вектор СКО флуктуаций аддитивного узкополосного шума измеренных относительных координат цели (дальности, скорости, углов и угловых скоростей),

$$\sigma_v = (\sigma_{D_2} \ \sigma_{V_2} \ \sigma_{\theta_2} \ \sigma_{\varphi_2} \ \sigma_{\omega_z} \ \sigma_{\omega_y})^T ;$$

– шаг интегрирования $\delta t = 0,01$ с и время моделирования $t_{\phi} = 30$ с.

На рис. 2 и 3 представлены результаты математического моделирования процесса наведения БПЛА на маневрирующую цель с использованием классического модифицированного метода пропорциональной навигации (МПН) и вновь разработанного метода наведения.

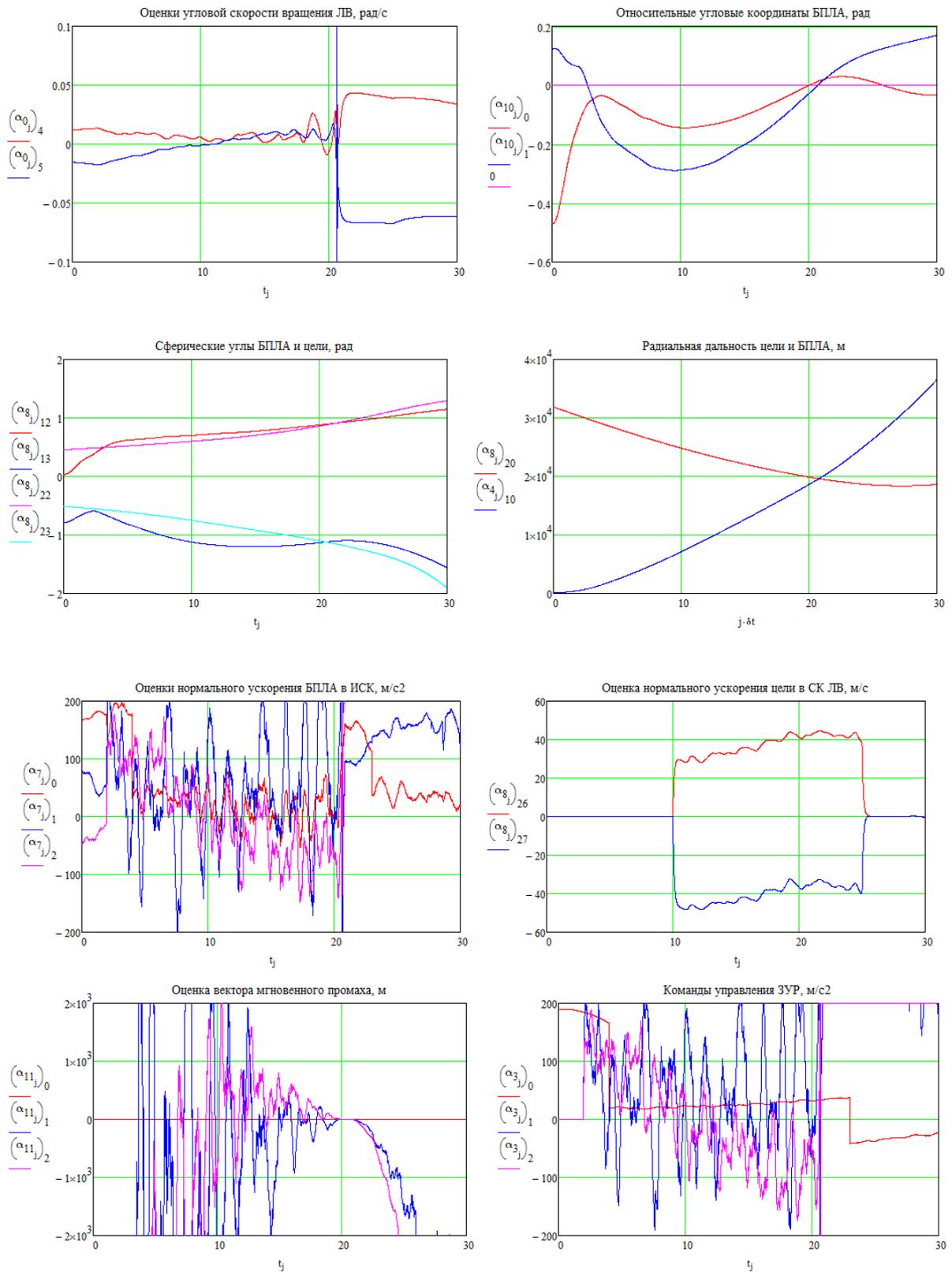


Рис. 2. Зависимости параметров, характеризующих количественные показатели процесса наведения БПЛА для классического модифицированного МПН

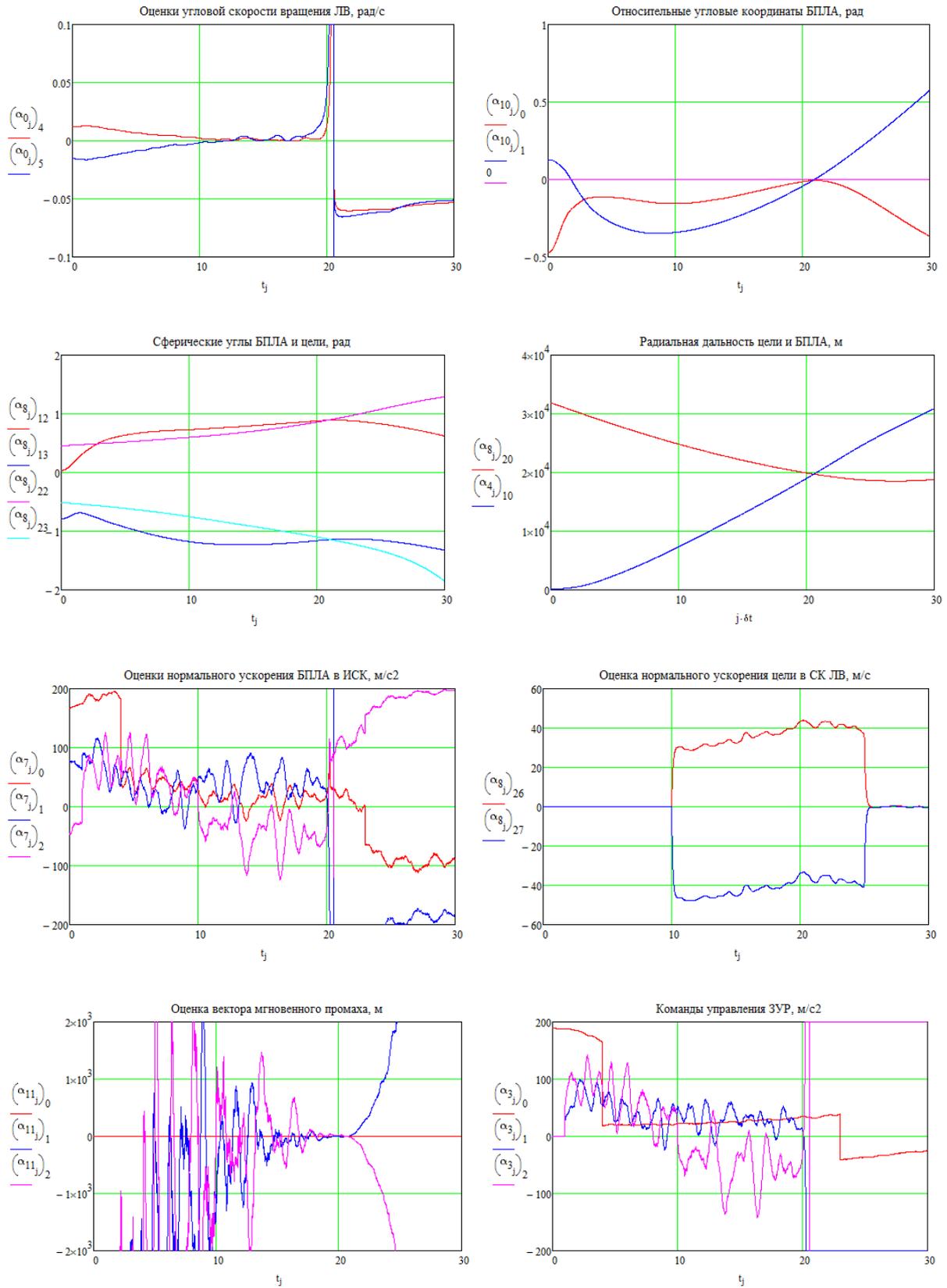


Рис. 3. Зависимости параметров, характеризующих количественные показатели процесса наведения БПЛА для вновь разработанного метода наведения

Для моделирования были выбраны значения $\mathbf{r}_1 = (25000 \ 14000 \ 14000)^T$, $\mathbf{v}_1 = (1000 \ 0 \ 0)^T$, $\mathbf{W}_1 = (0 \ \pm 50 \ \pm 25)^T$, $\mathbf{r}_0 = (100 \ 5 \ 100)^T$, $\sigma_v = (5,0 \ 2,0 \ 0,05 \ 0,05 \ 0,005 \ 0,005)^T$.

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы:

- величины мгновенных промахов БПЛА в точке встречи с целью для сравниваемых методов наведения заметно отличаются друг от друга (мгновенный промах для вновь разработанного метода наведения на 30–50 % меньше, чем для модифицированного МПН);

- для вновь разработанного МПН среднее значение и СКО промаха составляют $m_1 = (m_{hy} \ m_{hz})^T = (2,1 \ 3,9)^T$, $\sigma_1 = (\sigma_{hy} \ \sigma_{hz})^T = (4,5 \ 2,6)^T$ соответственно;

- для модифицированного МПН оценки точности наведения (среднее значение и СКО промаха) составляют $m_2 = (4,7 \ 5,2)^T$, $\sigma_2 = (5,8 \ 7,4)^T$ соответственно;

- величина флукуационных перегрузок в процессе наведения для классического МПН существенно выше и достигает уровня ограничения 200 м/с² (для вновь разработанного метода наведения – не более 100–120 м/с²), что влечет за собой снижение контурного коэффициента усиления и, как следствие, увеличение флукуационной ошибки наведения, переход в нелинейный режим работы и рост мгновенного промаха;

- в классическом модифицированном МПН за 3–5 с до точки встречи наблюдается рост низкочастотных квазигармонических колебаний УСВ ЛВ, что свидетельствует о снижении запасов устойчивости по фазе контура наведения и обусловлено отсутствием учета запаздывания (экстраполяции) координат и параметров относительного движения в регуляторе объекта управления при больших угловых перемещениях цели относительно БПЛА на малых дальностях (непосредственно перед точкой встречи).

Заключение

Выполнен аналитический синтез оптимального метода управления применительно к терминальной задаче наведения нелинейного многомерного многосвязного объекта (сверхзвукового БПЛА) на скоростную маневрирующую цель.

Основываясь на результатах статистического моделирования, показаны преимущества метода синтеза АКАР применительно к задаче выбора оптимального закона наведения управляемого объекта на движущуюся цель при наличии узкополосных шумов оценивания. Данный метод синтеза можно рекомендовать для выбора структуры оптимальных регуляторов применительно к нелинейным многомерным и многосвязным нестационарным объектам управления (технологическим процессам) различной природы.

Направлениями дальнейших исследований в области проектирования систем управления с использованием метода АКАР можно считать:

- учет технических ограничений, накладываемых на углы упреждения БПЛА относительно цели в процессе наведения и связанных с конечными размерами сектора сопровождения;

- проектирование систем стабилизации БПЛА, позволяющих в ряде случаев расширить диапазон располагаемых нормальных ускорений без изменения конструкции за счет управления по крену;

- разработку систем стабилизации статически неустойчивых БПЛА с нестационарным и случайным характером смены режимов устойчивости на различных этапах наведения;

- учет в сигналах управления стохастического характера пеленгационных характеристик радиопрозрачных обтекателей бортовых РГС в интересах компенсации паразитных обратных связей, приводящих к снижению точности наведения;

- разработку комбинированных систем управления с комплексированием наземных и бортовых радиолокационных и инерциальных измерительных систем;

- разработку комбинированных систем управления БПЛА с использованием информации от пространственно разнесенных активных, пассивных и полуактивных РЛС;
- разработку оптимальных пространственно распределенных (сетевых, роевых) самоорганизующихся систем координированного управления множественными однотипными БПЛА, в том числе миниатюрными, с использованием принципов построения и алгоритмов функционирования нейрокompьютерных сетевых структур [13–15].

Список литературы

1. Механика полета. Инженерный справочник / С.А. Горбатенко [и др.]. – М. : Машиностроение, 1969. – 420 с.
2. Летов, А.М. Динамика полета и управление / А.М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 478 с.
3. Красовский, А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А.А. Красовский. – М. : Наука, 1973. – 587 с.
4. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 639 с.
5. Максимов, М.В. Авиационные системы радиоуправления / М.В. Максимов, Г.И. Горгонов, В.С. Чернов. – М. : ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1984. – 364 с.
6. Кун, А.А. Основы построения систем управления ракетами / А.А. Кун, В.Ф. Лукьянов, С.А. Шабан. – Минск : ВА РБ, 2001. – 427 с.
7. Palumbo, Neil F. Modern homing missile guidance theory and techniques / Neil F. Palumbo, Ross A. Blauwkamp, Justin M. Lloyd // Johns Hopkins APL Technical digest ; USA. – 2010. – Vol. 29, no. 1.
8. Колесников, А.А. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами / А.А. Колесников, А.Г. Гельфгат. – М. : Энергоатомиздат, 1993. – 304 с.
9. Колесников, А.А. Синергетическая теория управления. Инварианты, оптимизация, синтез / А.А. Колесников. – М. : Энергоатомиздат ; Таганрог : Изд-во ТРТУ, 1994. – 344 с.
10. Современная прикладная теория управления. Оптимизационный подход в теории управления. Ч. 1 / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 400 с.
11. Современная прикладная теория управления. Синергетический подход в теории управления. Ч. 2 / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 559 с.
12. Современная прикладная теория управления. Новые классы регуляторов технических систем. Ч. 3 / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог : Изд-во ТРТУ, 2000. – 656 с.
13. Heppner, F. A. Stochastic nonlinear model for coordinated bird flocks / F. Heppner, U. Grenander. – The Ubiquity of Chaos, 1990. – P. 233–238.
14. Clerc, M. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space / M. Clerc, J. Kennedy // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2002. – No. 6(1). – P. 58–73.
15. Mendes, R. The fully informed particle swarm: Simpler, maybe better / R. Mendes, J. Kennedy, J. Neves // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. – 2004. – No. 8(3). – P. 204–210.

Поступила 09.03.2017

V.E. Markevich

**ANALYTICAL SYNTHESIS OF THE METHOD OF TARGETING
A SUPERSONIC UNMANNED AERIAL VEHICLE BASED
ON MULTI-DIMENSIONAL NONLINEAR DYNAMIC MODEL**

A method of analytical synthesis of an optimal controller for the terminal control task of supersonic unmanned aerial vehicles based on synergetic approach to the design of control systems for nonlinear multidimensional dynamic objects is considered.

The article provides analytical expressions describing the algorithm for control the velocity vector position of a supersonic UAV, the simulation results and the comparative analysis of the proposed control algorithm with the modified method of proportional navigation.