ИНФОРМАТИКА

2017 **апрель-июнь** **№ 2**

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И РЕЧИ

УДК 004

В.В. Старовойтов

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ В АНАЛИЗЕ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Описываются новые свойства сингулярных чисел, вычисляемых для матриц цифровых изображений. Показано, что перестановка строк или столбцов матрицы и ее поворот на 90° не меняют множества сингулярных чисел, однако изменение значения одного элемента или перестановка местами двух элементов матрицы могут привести к изменению всего множества сингулярных чисел. Приводятся примеры повышения резкости и контраста изображений путем модификации множества сингулярных чисел.

Введение

Сингулярное разложение матриц (SVD, от англ. Singular Value Decomposition) – это аналог спектрального разложения сигналов, который применим к произвольным матрицам, т. е. двухмерным сигналам. Впервые это преобразование предложил Е. Бельтрами в 1873 г. Пусть A – вещественная матрица размерности $m \times k$. Сингулярное разложение A будем обозначать через SVD(A) и описывать в виде равенства

$$A = USV^T. \tag{1}$$

Матрица S всегда диагональная, ее коэффициенты – неотрицательные вещественные числа $\sigma_1, ..., \sigma_n$, расположенные на главной диагонали матрицы, называются сингулярными числами. Столбцы матрицы V называются правыми сингулярными векторами и всегда ортогональны друг другу. Столбцы матрицы U называются левыми сингулярными векторами и также ортогональны друг другу. Матрицы U и V являются унитарными, т. е сумма квадратов значений каждого столбца матриц равняется единице. Их можно использовать в качестве нового базиса системы координат для представления данных, записанных в матрице A.

Геометрическим аналогом A является представление m вариантов данных в виде массива из k признаков каждый, т. е. в k-мерном признаковом пространстве, или в виде m векторов размерности k. Сингулярное разложение позволяет представить их в новой ортогональной системе координат (повернутой относительно исходной), а сингулярные числа показывают значимость новых осей.

Сингулярное разложение в общем случае не является единственным [1], однако множество сингулярных чисел σ_j уникально для каждой матрицы A. Если все сингулярные числа различны, то левые и правые сингулярные векторы определены однозначно с точностью до знаков.

Алгоритмы сингулярного разложения матриц имеют вычислительную сложность порядка $O(n^3)$, где $n = m \times k$ – число элементов матрицы [2], и реализованы во многих пакетах. Обычно диагональные элементы матрицы S (после сингулярного разложения A) отсортированы и первые r чисел положительны: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$, а остальные равны нулю. Квадраты сингулярных чисел σ_i SVD-разложения матрицы A совпадают с собственными числами λ_i матрицы AA^T [3].

Ряд свойств сингулярных чисел описан в научной литературе, например в книге [5]. Одно из них формулируется следующим образом: множества сингулярных чисел матрицы A и ее транспонированного варианта A^T совпадают. Данное свойство сформулировано в качестве упражнения, но в книге оно не доказано. Приведем краткое доказательство. Поскольку $S = S^T$, то $\mathrm{SVD}(A^T) = \mathrm{SVD}((USV^T)^T) = \mathrm{SVD}(VS^TU^T) = V_2SU_2^T$.

Целью настоящей работы является установление новых свойств сингулярных чисел, вычисляемых для матриц цифровых изображений, т. е. над полем вещественных чисел.

1. Сингулярное разложение в обработке и анализе изображений

Сингулярное разложение матриц имеет множество различных приложений в цифровой обработке сигналов [4]. На сингулярных числах базируются две популярные нормы: $\|A\|_1$, равная максимальному сингулярному числу σ_1, и $\|A\|_2$ (она же норма Фробениуса), равная корню квадратному из суммы квадратов расстояний от множества точек в многомерном пространстве до прямой, проходящей через вектор v_1 (первый вектор в SVD-разложении (1)). Проекция данных в виде точек a_{ij} на указанную прямую максимально сохраняет их геометрические свойства в одномерном представлении. Простейший вариант применения этого свойства – преобразование цветного изображения в полутоновое путем проекции трех цветов на ось, описываемую вектором v_1.

Одним из важных приложений сингулярного разложения матриц является метод главных компонент, использующийся для снижения размерности анализируемых данных в распознавании образов [3].

В работе [6] описана роль сингулярных чисел в снижении аддитивного электронного шума в сенсорных регистрирующих системах. Показано, что снизить уровень шума можно посредством сохранения самых больших сингулярных чисел, обнуления остальных и восстановления исходных данных с урезанной матрицей S. Применительно к цифровым изображениям, если сумма первых k сингулярных чисел составляет примерно 90 % от суммы всех сингулярных чисел, то изображение, восстановленное на базе этих k чисел, визуально мало отличимо от исходного.

Еще одно приложение связано с внесением в изображения водяных знаков для защиты авторских прав [7]. SVD-представление используется для кодирования и сжатия изображений с минимизацией потери информации [8].

Сингулярное разложение подобно дискретному преобразованию Фурье : бóльшие сингулярные числа соответствуют низкочастотным компонентам, меньшие – высокочастотным [9]. Значения сингулярных чисел существенно зависят от изменений значений элементов матрицы A. В статье [9] показано, что если взять базис U и V после разложения одного изображения и заменить матрицу сингулярных чисел S на матрицу S^* от другого, более темного (светлого) изображения, то восстановленное изображение $A = US^*V^T$ будет темнее (светлее) исходного A.

Признаки, вычисленные на базе 10 меньших сингулярных чисел, которые получены после сингулярного разложения небольших фрагментов изображения (32×32 пиксела), позволяют классифицировать и сегментировать области с разной текстурой [10]. Периодически появляются публикации об исследованиях по распознаванию людей по их фотографиям с помощью сингулярного разложения матриц (например, [11]). В последнее время часто публикуются результаты исследований об использовании функций оценки качества изображений на базе сингулярных чисел [12, 13].

Несмотря на разнообразие применений сингулярного разложения к цифровым изображениям, свойства этого преобразования и его инвариантность к изменению элементов матрицы яркости ни в одной научной публикации не рассматривались.

2. Свойства сингулярного разложения матриц

Цифровое изображение представимо в виде матрицы вещественных неотрицательных чисел. Рассмотрим более подробно свойства сингулярного разложения подобных матриц. Важно отметить, что разложение такого типа всегда существует, однако оно в общем случае не является единственным [1, 2]. Тем не менее множество сингулярных чисел σ_j уникально для каждой матрицы A. Неединственность матриц U и V означает, что они могут отличаться направлением базисных ортонормированных векторов.

Свойство 1. *Множества сингулярных чисел матрицы A и ее повернутого на угол, кратный 90°, варианта A^{90} совпадают.*

Докажем, что поворот матрицы A на 90° не изменяет множества сингулярных чисел, а значит, и последующие повороты этой матрицы также не будут их изменять.

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

тогда

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & \cdots & a_{m,3} \\ & \cdots & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad A^{90} = \begin{bmatrix} a_{m,1} & a_{m-1,1} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{m,2} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{1,2} \\ a_{m,3} & a_{m-1,3} & \cdots & a_{1,3} \\ & \cdots & & \\ a_{m,n} & a_{m-1,n} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix},$$

$$(A^{90})^T = \begin{bmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \\ & & \cdots & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \end{bmatrix}.$$

Левые сингулярные векторы матрицы A – это множество ортонормированных собственных векторов $\overline{V}$ матрицы AA^T, для которых справедливо

$$AA^T\overline{V} - \lambda\overline{V} = 0, \tag{2}$$

где λ – массив собственных чисел матрицы AA^T; $\overline{V}$ – собственный вектор. Запишем матрицу

$$AA^T = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \cdots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{m,i}^2 \end{bmatrix}.$$

Подставляем AA^T в уравнение (2). Это матричное уравнение имеет решение относительно λ, если определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \cdots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Матрицы AA^T и A^TA имеют одинаковые собственные числа. Запишем матрицу

$$(A^{90})^T A^{90} = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{m,i}^2 & \sum_i^n a_{m,i}a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} \\ \sum_i^n a_{m-1,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{m-1,i}^2 & \dots & \sum_i^n a_{m-1,i}a_{1,i} \\ & & \dots & \\ \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}^2 \end{bmatrix}.$$

Подставив ее в уравнение (2), получим равенство

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_2 & \sum_i^n a_{m,i}a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} \\ \sum_i^n a_{m-1,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{m-1,i}^2 - \lambda_2 & \dots & \sum_i^n a_{m-1,i}a_{1,i} \\ & & \dots & \\ \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{m-1,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Два определителя в уравнениях (3) и (4) отличаются только расположением элементов $a_{ij}a_{km}$ в строках. Известно [14], что при транспонировании значение определителя не меняется, а при перестановке строк или столбцов меняется только знак. Поскольку данные определители должны быть равны нулю, знак значения не имеет. Определитель из уравнения (4) полностью совпадет с первым, если выполнить следующие преобразования:

– транспонировать его матрицу;

– переставить строки: первую с последней, вторую с предпоследней и т. д.;

– переставить столбцы: первый с последним, второй с предпоследним и т. д.

Следовательно, массивы собственных значений λ и λ_2 матриц AA^T и $A^{90}(A^{90})^{\mathrm{T}}$ будут равны и вычисленные из них сингулярные числа матриц A и A^{90} также будут равны.

Свойство 2. *Увеличение (уменьшение) всех значений матрицы A на константу $k \neq 0$ нелинейно изменяет все сингулярные числа, изменяются также матрицы U и V.*

Доказывается методом от противного на примере путем сравнения сингулярных разложений матриц B, $B + 1$, $B + 2$, где B получена с помощью генератора случайных чисел

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}8147 & 0{,}9134 & 0{,}2785 \\ 0{,}9058 & 0{,}6324 & 0{,}5469 \\ 0{,}1270 & 0{,}0975 & 0{,}9575 \end{bmatrix}.$$

Приведем для сравнения сингулярные числа разложений указанных матриц: (1,8168; 0,8389; 0,1815), (4,7765; 0,8576; 0,1861), (7,7691; 0,8588; 0,1871). Матрицы U и V изменяются, что отражает поворот ортонормированного базиса вокруг начала координат в результате разложения матриц с новыми значениями. Отметим, что величина энтропии этих матриц не меняется.

Свойство 3. *Умножение матрицы на константу $k \neq 0$ изменяет в k раз значения сингулярных чисел, не меняя матрицы U и V.*

Данное свойство сформулировано в качестве упражнения в книге [5], но не доказано. Доказательство следует из уравнения (3). Если каждый элемент a_{ij} изменить в k раз, параметр λ

изменится в k^2 раз, соответственно сингулярные числа изменятся в k раз. Отметим, что величина энтропии при этом не меняется.

Пример 1. Умножение описанной выше матрицы B на константу $k = 2$ дает вдвое большие сингулярные числа 3,6336; 1,6778; 0,3630.

Свойство 3 позволяет оценить контраст цифрового изображения по матрице его яркостей, анализируя величины сингулярных чисел. Однако при изменении контраста по формуле $B = k * (A - \mathrm{mean}(A)) + \mathrm{mean}$, где mean – среднее значение матрицы A, свойство 3 не выполняется. При сингулярном разложении матрицы B сингулярные числа изменяются нелинейно. При этом элементы матриц U и V также изменяются.

Свойство 4. *Изменение одного элемента матрицы A может нелинейно изменить все сингулярные числа и матрицы U и V.*

Доказывается на примере. Изменим один элемент описанной выше матрицы B, например к элементу $b(1, 2) = 0{,}9134$ добавим 0,0001. В результате разложения измененной матрицы сингулярные числа изменились (табл. 1), матрицы U и V также изменились.

Таблица 1

Сингулярные числа разложения тестовой матрицы B (верхняя строка) и ее же, но с измененным элементом b (1, 2)

1,81679421943457	0,838914845947905	0,181515318269179
1,81684222270122	0,838933926645382	0,181571377823723

Следует отметить, что степень изменений зависит от размера матрицы B и диапазона ее значений. При изменении значения яркости одного пиксела реального изображения множество сингулярных чисел изменяется не всегда.

Свойство 5. *Перестановка двух элементов матрицы A может изменить все множество сингулярных чисел.*

Доказывается на примере. В изображении cameraman (рис. 1) два пиксела с яркостью 255 и 0 (координаты (508, 206) и (113, 194)) поменяли местами. Даже перестановка элементов одной строки изменяет все сингулярные числа.

Энтропия изображения не меняется, и визуально оно практически не изменилось, но изменились все сингулярные числа (табл. 2 и 3).

Суммы всех сингулярных чисел для обоих разложений также не равны: $\mathrm{Sum}_1 = 214982{,}141612736$ и $\mathrm{Sum}_2 = 215298{,}827898402$.

Рис. 1. Изображение cameraman с двумя переставленными пикселами

Таблица 2

12 первых сингулярных чисел разложения матрицы исходного изображения cameraman

63868,99960191940	14491,08971443710	10956,15919194170	6199,58836933066
5854,60599135936	4825,14545486589	4590,23130201936	3611,48738094200
3347,31861162271	3143,49896319294	3052,62875129008	2959,22013529848

Таблица 3

12 первых сингулярных чисел разложения матрицы изображения cameraman
с двумя переставленными пикселами

63869,06819898620	14491,72848258010	10954,12989064590	6199,80046123229
5854,58171263213	4823,98311756491	4590,74385165487	3611,13206101311
3347,66955071622	3143,36384003399	3051,66029420486	2959,37769718645

Свойство 6. *От перестановки строк или столбцов матрицы A массив ее сингулярных чисел не изменяется.*

Рассмотрим матрицы A и B, где B равна A, но переставлены местами (без ограничения общности) первая и вторая строки:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \cdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & & \cdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Транспонируем матрицы A и B:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{m,2} \\ & & \cdots & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{1,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{2,2} & a_{1,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{m,2} \\ & & \cdots & & \\ a_{2,n} & a_{1,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Запишем матрицы AA^T и BB^T (строки с номерами от 3 до m совпадают):

$$AA^T = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \cdots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \cdots & \sum_i^n a_{m,i}^2 \end{bmatrix},$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ & & \dots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления собственных чисел из уравнений $AA^T\bar{V}_1 = \lambda_1\bar{V}_1$, $BB^T\bar{V}_2 = \lambda_2\bar{V}_2$ соответствующие определители приравниваются нулю:

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_1 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda_1 & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ & & \dots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

$$\begin{vmatrix} \sum_i^n a_{2,i}^2 - \lambda_2 & \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}^2 - \lambda_2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ & & \dots & & \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{3,i} & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 - \lambda_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Для наглядности записи заменим элементы первого определителя символами b_{ij} с последовательно изменяющимися индексами i, j:

$$\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \dots & b_{2,m} \\ & & \dots & & \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,m} \end{vmatrix} = B1.$$

Во втором определителе запишем символы b_{ij} на соответствующие им позиции:

$$\begin{vmatrix} b_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,3} & \dots & b_{2,m} \\ b_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,3} & \dots & b_{1,m} \\ & & \dots & & \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} & \dots & b_{m,m} \end{vmatrix} = B2.$$

Любой определитель равен сумме произведений элементов строки $b_{i,j}$ на их алгебраические дополнения $B_{i,j}$ [15]. Разложим первый определитель по первой строке, второй – по второй:

$$|B1| = b_{1,1}B_{1,j} + b_{1,2}B_{2,j} + b_{1,3}B_{3,j} + \ldots + b_{1,m}B_{m,j},$$

$$|B2| = b_{1,2}B_{2,j} + b_{1,1}B_{1,j} + b_{1,3}B_{3,j} + \ldots + b_{1,m}B_{m,j}.$$

Данные суммы отличаются только перестановкой двух первых членов. Это означает, что оба определителя равны и уравнения (5) и (6) имеют одинаковые решения. Следовательно, перестановка двух строк в матрице A не изменяет сингулярные числа матрицы A. Как следствие можно переставлять местами любое число строк и столбцов матрицы, при этом множество сингулярных чисел матрицы не изменится.

Согласно свойству 2 можно повернуть матрицу (столбцы становятся строками, что не меняет сингулярные числа матрицы) и повторить перестановку строк, затем повернуть матрицу обратно. В итоге множество сингулярных чисел также не изменится.

Пример 2. В матрице значений яркости изображения cameraman размером 512×512 произвольное число строк менялось местами (рис. 2). При этом множество сингулярных чисел не изменилось (табл. 2 и 4).

Рис. 2. Изображение cameraman после перестановки местами 33 строк

Таблица 4

12 первых сингулярных чисел разложения матрицы изображения cameraman с переставленными строками

63868,99960191940	14491,08971443710	10956,15919194170	6199,58836933066
5854,60599135936	4825,14545486589	4590,23130201936	3611,48738094200
3347,31861162271	3143,49896319294	3052,62875129008	2959,22013529848

Свойство 7. *Если все элементы матрицы A имеют равные значения k, ее первое сингулярное число равно* $k\sqrt{mn}$*, где m – число строк, n – число столбцов матрицы, а остальные сингулярные числа равны нулю.*

Пусть матрица A имеет все нулевые значения. Тогда матрица AA^T имеет определитель, состоящий из одних нулей. Соответственно все собственные числа матрицы AA^T равны нулю. Как следствие сингулярные числа матрицы A также равны нулю.

Пусть все элементы матрицы A равны единице и ее размер равен $m \times n$ и $m \leq n$, тогда матрица AA^T имеет размер $m \times m$ и все ее элементы равны n. Если $m > n$, то матрица AA^T имеет размер $n \times n$ и все ее элементы равны m. Для вычисления собственных чисел матрицы AA^T определитель, полученный из уравнения (2), должен быть равен нулю. Рассмотрим определитель размера $m \times m$:

$$\begin{vmatrix} n-\lambda & n & n & \ldots & n \\ n & n-\lambda & n & \ldots & n \\ & & \ldots & & \\ n & n & n & \ldots & n-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разделив все элементы этого определителя на n, получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ & & \ldots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1-x \end{vmatrix} = 0,$$

где $x = \lambda/n$. Из каждой строки вычтем последнюю, значение определителя при этом не меняется [15]:

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \ldots & x \\ 0 & -x & 0 & \ldots & x \\ & & \ldots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим данный определитель путем разложения по последней строке:

$$(1-x)x^{m-1} + (m-1)x^{m-1} = 0.$$

Это уравнение имеет корни $x=0$ и $x=m$, что дает два варианта собственных чисел $\lambda=0$ и $\lambda=mn$. Сингулярные числа исходной матрицы равны корню квадратному из этих чисел, т. е. 0 и $\sqrt{mn}$.

Если все элементы матрицы A равны k, то все сингулярные числа в соответствии со свойством 3 увеличиваются (уменьшаются) в k раз.

Свойство 8. *Увеличение размера матрицы изображения в k раз посредством интерполяции методом ближайшего соседа увеличивает все положительные сингулярные числа в k раз, но энтропия при этом не меняется.*

Энтропия новой матрицы не меняется, поскольку не меняется гистограмма изображения.

Без ограничения общности приведем доказательство свойства для $k = 2$. Пусть дана матрица A размером $m \times n$ и матрица B – увеличенный в два раза вариант A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ & & \ldots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n} \\ a_{1,1} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & a_{m,n} \\ a_{m,1} & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Для вычисления собственных чисел λ матрицы AA^T используем уравнение (3), а для вычисления собственных чисел матрицы BB^T получаем уравнение, в котором размер определителя равен $2m \times 2m$:

$$B=\begin{bmatrix} 2\sum_i^n a_{1,i}^2-\lambda_2 & 2\sum_i^n a_{1,i}^2 & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \dots & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ 2\sum_i^n a_{1,i}^2 & 2\sum_i^n a_{1,i}^2-\lambda_2 & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \dots & 2\sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}^2-\lambda_2 & 2\sum_i^n a_{2,i}^2 & \dots & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{2,i}^2 & 2\sum_i^n a_{2,i}^2-\lambda_2 & \dots & 2\sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & 2\sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 2\sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \dots & 2\sum_i^n a_{m,i}^2-\lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Сделаем замену $x = \lambda/2$. Вычтем из первой строки вторую, из третьей четвертую и т. д. Затем переставим четные строки в нижнюю половину определителя (при этом меняется только его знак), получим

$$B=\begin{bmatrix} -x & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \\ \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}^2-x & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}^2-x & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & \dots & \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{m,i}^2-x \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Если x=0, значит λ=0 и сингулярные числа также равны нулю. Если $x\neq 0$, все строки верхней половины определителя разделим на x. Вычтем из второго столбца первый, из четвертого третий и т. д.:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ \sum_i^n a_{1,i}^2 & -x & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & 0 \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & 0 & \sum_i^n a_{2,i}^2 & -x & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & 0 & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x \end{bmatrix}=0. \tag{9}$$

Выполним разложение определителя по первой строке (размер определителей уменьшится на 1):

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ -x & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \dots & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & 0 \\ 0 & \sum_i^n a_{1,i}^2 & -x & \dots & \dots & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \dots & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x \end{vmatrix} + \qquad (10)$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ \sum_i^n a_{1,i}^2 & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & 0 \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & -x & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

Полученные определители отличаются только первыми столбцами. Не нарушая равенство, можно поэлементно сложить их первые столбцы, сохраняя остальные [15]. Полученный определитель имеет размер $(2m–1) \times (2m–1)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ \sum_i^n a_{1,i}^2 - \frac{x}{2} & \sum_i^n a_{1,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{1,i}a_{m,i} & 0 \\ \sum_i^n a_{2,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{2,i}^2 & -x & \dots & \sum_i^n a_{2,i}a_{m,i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i^n a_{m,i}a_{1,i} & \sum_i^n a_{m,i}a_{2,i} & 0 & \dots & \sum_i^n a_{m,i}^2 & -x \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Повторяем разложение по первой строке и сложение первых столбцов еще m–1 раз. В итоге матричное уравнение имеет размер и вид уравнения (3), но вместо λ стоит $x/2$. Таким образом, множество ненулевых собственных чисел полученного матричного уравнения полностью совпадает с множеством ненулевых собственных чисел уравнения (3), умноженных на четыре, и как следствие ненулевые сингулярные числа матрицы B в два раза больше сингулярных чисел матрицы A.

Пример 3. Рассмотрим матрицы A и B, где B получена путем увеличения A в два раза методом «ближайшего соседа»:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 9 & 8 & 10\\ 7 & 0 & 8 & 9\\ 7 & 8 & 7 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}4 & 4 & 9 & 9 & 8 & 8 & 10 & 10\\ 4 & 4 & 9 & 9 & 8 & 8 & 10 & 10\\ 7 & 7 & 0 & 0 & 8 & 8 & 9 & 9\\ 7 & 7 & 0 & 0 & 8 & 8 & 9 & 9\\ 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 4 & 4\\ 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 4 & 4\end{bmatrix}.$$

Сингулярные числа матрицы A равны 23,7343; 7,1496; 4,3090, а числа матрицы B в два раза больше: первые три равны 47,4686; 14,2991; 8,6180, остальные – нули.

Если матрица B увеличена другим методом, например бикубической интерполяции, и равна

$$\begin{bmatrix}4 & 5 & 8 & 10 & 8 & 8 & 10 & 10\\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 10 & 10\\ 6 & 5 & 2 & 2 & 6 & 9 & 9 & 10\\ 7 & 5 & 2 & 2 & 6 & 8 & 8 & 8\\ 7 & 7 & 6 & 6 & 7 & 7 & 6 & 5\\ 7 & 7 & 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4\end{bmatrix},$$

то сингулярные числа увеличиваются нелинейно. В данном примере они равны 46,9967; 9,9776; 6,6824; 0,8175; 0,5276; 0,3943, а соотношение первых трех чисел с сингулярными числами матрицы A равно 1,9801; 1,3956; 1,5508.

Свойство 9. *Увеличение сингулярных чисел матрицы яркостей подчеркивает мелкие детали, повышает резкость и контраст изображения.*

Продемонстрируем это свойство на примерах. Уменьшение значений сингулярных чисел на константу и восстановление по формуле (1) делают изображение темнее, увеличение повышает резкость (рис. 3). Нелинейное увеличение чисел повышает контраст (рис. 4). Исходное изображение темнеет после умножения сингулярных чисел на 0,8 (сжимается диапазон, снижается контраст).

Рис. 3. Результат изменения изображения: слева – исходное изображение, справа – оно же после увеличения сингулярных чисел на c=0,005σ_1, где σ_1 – первое сингулярное число

Рис. 4. Результат линейного и нелинейного изменения яркости изображения: слева – исходное изображение; справа – изображение после экспоненциального увеличения сингулярных чисел (повышен контраст)

Заключение

В работе описаны новые свойства сингулярных чисел, получаемых в результате сингулярного разложения матриц, которое все чаще используется при обработке, анализе, кодировании цифровых изображений и внесении в них водяных знаков. Показано, что, с одной стороны, изменение значения одного элемента или перестановка двух элементов матрицы яркости меняют все компоненты сингулярного разложения, а с другой стороны, перестановка любого количества строк или столбцов не изменяет множества сингулярных чисел. Поворот матрицы на угол, кратный 90°, также не изменяет множества сингулярных чисел, а множества левых и правых сингулярных векторов инвариантны с точностью до знака. Доказано, что значения сингулярных чисел зависят от размера изображения.

Описанные свойства следует учитывать при обработке и анализе цифровых изображений с использованием сингулярного разложения матриц их яркости. Сингулярные векторы матрицы изображения определяют уникальный многомерный базис, а сингулярные числа уточняют детальное представление изображения в этом базисе. Приведены примеры повышения резкости и контраста изображений путем модификации сингулярных чисел.

Работа частично выполнена в рамках проекта БРФФИ Ф16СРБГ-004.

Список литературы

1. Golub, G. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix / G. Golub, W. Kahan // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. Series B: Numerical Analysis.– 1965. – Vol 2, no. 2. – P. 205–224.

2. Demmel, J. Accurate singular values of bidiagonal matrices / J. Demmel, W. Kahan // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. – 1990. – Vol. 11, no. 5. – P. 873–912.

3. Gerbrands, J.J. On the relationships between SVD, KLT and PCA / J.J. Gerbrands // Pattern Recognition. – 1981. – Vol. 14, no. 1–6. – P. 375–381.

4. Moonen, M. SVD and signal processing: algorithms, applications and architectures / M. Moonen, B. De Moor. – Elsevier Science, 1995. – 485 p.

5. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

6. Jha, S.K. Denoising by singular value decomposition and its application to electronic nose data processing / S.K. Jha, R.D.S. Yadava // IEEE Sensors Journal. – 2011. – Vol. 11, no. 1. – P. 35–44.

7. Liu, R. An SVD-based watermarking scheme for protecting rightful ownership / R. Liu, T. Tan // IEEE transactions on multimedia. – 2002. – Vol. 4, no. 1. – P. 121–128.

8. Andrews, H. Singular value decomposition (SVD) image coding / H. Andrews, C. Patterson // IEEE transactions on Communications. – 1976. – Vol. 24, no. 4. – P. 425–432.

9. Narwaria, M. SVD-based quality metric for image and video using machine learning / M. Narwaria, W. Lin // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. Part B. – 2012. – Vol. 42, no. 2. – P. 347–364.

10. Targhi, A.T. Clustering of singular value decomposition of image data with applications to texture classification / A.T. Targhi, A. Shademan // Proc. of Intern. Conf. on Visual Communications and Image Processing. – Lugano, Switzerland, 2003. – Vol. 5150. – P. 972–979.

11. Zhang, D. A new face recognition method based on svd perturbation for single example image per person / D. Zhang, S. Chen, Z.-H. Zhou // Applied Mathematics and Computation. – 2005. – Vol. 163, no. 2. – P. 95–907.

12. No-reference image blur index based on singular value curve / Q. Sang [et al.] // Journal of Visual Communication and Image Representation. – 2014. – Vol. 25, no. 7. – P. 1625–1630.

13. Singular value decomposition based sample diversity and adaptive weighted fusion for face recognition / G. Zhang [et al.] // Digital Signal Processing. – 2017. – Vol. 62, no. 3. – P. 150–156.

14. Карчевский, Е.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии / Е.М. Карчевский, М.М. Карчевский. – Казань : Казанский гос. ун-т, 2014. – 352 с.

15. Белоусов, И.В. Матрицы и определители : учеб. пособие по линейной алгебре. – 2-е изд. – Кишинев : Изд-во Ин-та прикладной физики АН Республики Молдова, 2006. – 101 с.

Поступила 18.04.2017

Объединенный институт проблем
информатики НАН Беларуси,
Минск, Сурганова, 6
e-mail: valerys@newman.bas-net.by

V.V. Starovoitov

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION IN DIGITAL IMAGE ANALYSIS

The paper describes new properties of the singular matrix decomposition. It is shown that permutation of rows or columns of the matrix or matrix rotation by 90 degrees does not change the set of its singular numbers. However, variation the value of at least one matrix element or permutation of any two matrix elements leads to a modification of the whole set of the singular numbers. Examples of image sharpening and contrast enhancement by modification of the singular numbers are given.