

УДК: 519.6:537.2

Г.Ч. Шушкевич

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ ТОНКОЙ СПЛЮСНУТОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ И ПЛОСКОСТИ

Аналитическими методами исследуется решение граничной задачи электростатики для моделирования поля электрического диполя, расположенного внутри сплюснутой незамкнутой сфероидальной заземленной оболочки, в присутствии идеально проводящей плоскости. С помощью теорем сложения, связывающих сферические, эллипсоидальные и цилиндрические гармонические функции, решение поставленной граничной задачи сводится к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразуются к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследуется влияние геометрических параметров задачи на значение вторичного потенциала электростатического поля.

Введение

Универсальными методами расчета электростатических, магнитных и электромагнитных полей являются численные методы конечных разностей, конечных элементов и интегральных уравнений [1–5]. Вместе с тем актуальность разработки новых аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач математической физики не уменьшилась и в наши дни. Эти методы остаются по-прежнему основными средствами решения фундаментальных проблем, создавая основу для тестирования решения краевых задач, полученных численными методами.

Метод разделения переменных и аппарат функций комплексного переменного наиболее часто используются для аналитического решения граничных задач математической физики. Обобщением метода разделения переменных для решения граничных задач со смешанными граничными условиями является метод парных (тройных) уравнений. Этот метод применялся для решения электростатических задач для одиночных тонких незамкнутых оболочек [6–17]. При решении граничных задач математической физики для многосвязных областей успешно применялся метод теорем сложения [18]. Имеются публикации, посвященные решению задач электростатики для двух проводников, которые представляют собой различные координатные поверхности [19–23]. Совместное использование теорем сложения и парных (тройных) уравнений позволило найти аналитическое решение для двух и более проводников, представляющих собой неполные координатные поверхности [24–29].

В статье [30] рассматривается применение метода теорем сложения для моделирования электрического поля импульсного электрического разряда в присутствии металлического шара и тонкого стержня. Численное решение задачи проникновения электростатического поля через прямоугольное отверстие вовнутрь параллелепипеда с идеально тонкими стенками приведено в [31].

В настоящей статье предлагается методика аналитико-численного решения краевой задачи для уравнения Лапласа, моделирующей поле электростатического диполя в присутствии тонкой сплюснутой незамкнутой сфероидальной оболочки и плоскости, с использованием теории сферических, сфероидальных и цилиндрических функций и пакета компьютерной математики Mathcad. Исследуется поведение электростатического поля в окрестности сфероидальной оболочки во внешней области.

1. Постановка и представление решения задачи

Пусть однородное пространство R^3 разделено плоскостью Γ на два полупространства W_1 и W_2 . В полупространстве W_1 находится незамкнутая идеально тонкая оболочка S , которая расположена на поверхности сплюснутого эллипсоида вращения S_1 с центром в точке O , где a, b –

большая и малая полуоси эллипса соответственно. Область пространства, ограниченную поверхностью эллипсоида вращения S_1 , обозначим через D_0 , тогда $D_1 = W_1 \setminus (D_0 \cup S_1)$. Точку пересечения прямой L с плоскостью Γ обозначим через O_1 . Прямая L проходит через точку O и перпендикулярна плоскости Γ . Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h . Осевое сечение задачи показано на рис. 1.

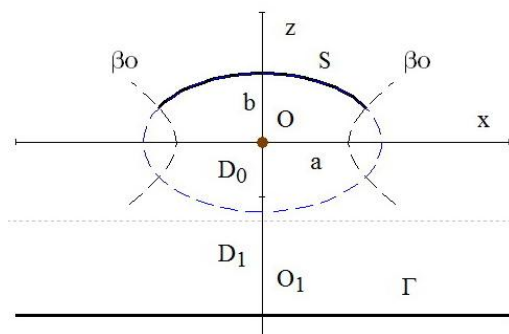


Рис. 1. Геометрия задачи

Для решения задачи с точкой O свяжем:

– сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta,$$

где $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

– сплюснутые вырожденные эллипсоидальные координаты $\{\alpha, \beta, \varphi\}$

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta,$$

где $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;

– цилиндрические координаты $\{\rho, \varphi, z\}$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

где $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

В этом случае поверхности Γ и S будут описываться следующим образом:

$$\Gamma = \{ \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z = -h \},$$

$$S = \{ \alpha = \alpha_0 = \operatorname{Arsh}(b/c), \quad 0 \leq \beta \leq \beta_0 < \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \}.$$

В точке O расположен источник электростатического поля – электростатический диполь, момент которого направлен вдоль оси Oz .

Обозначим через U_d потенциал электростатического поля диполя, через U_j – потенциал вторичного электростатического поля в области D_j , $j = 0, 1$.

Постановка задачи. Требуется найти вторичные потенциалы U_j , $j = 0, 1$, которые удовлетворяют:

– уравнению Лапласа

$$\Delta U_j = 0, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

– граничным условиям

$$(U_d(M) + U_0(M))|_{M \in S} = U_1(M)|_{M \in S} = 0, \quad (2)$$

$$U_1(M)|_{M \in \Gamma} = 0; \quad (3)$$

– условию на бесконечности

$$U_1(M) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где M – произвольная точка области D_1 .

Кроме того, потребуем выполнения условий непрерывности потенциала на поверхности эллипсоида S_1 и непрерывности поля на части поверхности эллипсоида S_1 , которая не является экраном [28]:

$$U_d + U_0 = U_1 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi; \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(U_d + U_0) = \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_0, \quad \beta_0 < \beta \leq \pi. \quad (6)$$

Потенциал диполя, момент которого направлен вдоль оси Oz , представим в виде [32]

$$U_d(r, \theta) = P \frac{\cos \theta}{r^2} = P \frac{1}{r^2} P_1(\cos \theta), \quad (7)$$

где $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [33], P – известная величина.

Решение поставленной краевой задачи будем искать в виде суперпозиции цилиндрических и эллипсоидальных гармонических функций так, чтобы автоматически выполнялось условие на бесконечности (4):

$$U_0(\alpha, \beta) = P \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{P_n(ish\alpha)}{P_n(ish\alpha_0)} P_n(\cos \beta); \quad (8)$$

$$U_1 = U_1^{(1)}(\alpha, \beta) + U_1^{(2)}(\rho, z); \quad (9)$$

$$U_1^{(1)}(\alpha, \beta) = P \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{Q_n(ish\alpha)}{Q_n(ish\alpha_0)} P_n(\cos \beta); \quad (10)$$

$$U_1^{(2)}(\rho, z) = P \int_0^{\infty} A(\lambda) J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda(z+h)} d\lambda, \quad z+h > 0, \quad (11)$$

где $P_n(z)$, $Q_n(z)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно; $J_0(x)$ – функция Бесселя первого рода [33]. Неизвестные коэффициенты a_n , b_n и функция $A(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий.

2. Выполнение граничных условий

На основании формулы [18], связывающей сферические и эллипсоидальные гармонические функции:

$$\frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \sum_{s=n}^{\infty} B_s^n(c) Q_s(ish\alpha) P_s(\cos \beta), \quad B_s^n(c) = \frac{(-1)^s (2s+1)}{n! (-ic)^{n+1}} P_s^n(0),$$

где индекс s принимает значения одинаковой четности с индексом n , потенциал диполя в эллипсоидальных координатах будет иметь представление

$$U_d(\alpha, \beta) = P \sum_{s=0}^{\infty} d_s(c) Q_s(ish\alpha) P_s(\cos \beta), \quad (12)$$

$$\text{где } d_s(c) = \begin{cases} 0, & s = 0, 2, 4, \dots; \\ \frac{(-1)^{s+1}(2s+1)}{c^2} P_s^1(0), & s = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

Величина $P_s^1(0)$ может быть вычислена по формуле [34]

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } (n-m) - \text{нечетное,} \\ \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} (n+m)!}{2^n ((n+m)/2)! ((n-m)/2)!}, & \text{если } (n-m) - \text{четное.} \end{cases}$$

Выполним граничные условия (2), (5), (6). Для этого функцию $U_1^{(2)}(\rho, z)$ представим через эллипсоидальные гармонические функции, используя формулу, связывающую цилиндрические и эллипсоидальные гармонические функции [18]:

$$J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(c\lambda) P_n(ish\alpha) P_n(\cos\beta).$$

Тогда получим

$$U_1^{(2)}(\alpha, \beta) = P \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(ish\alpha) P_n(\cos\beta), \quad (13)$$

$$\text{где } A_n = i^n (2n+1) \int_0^{\infty} A(\lambda) j_n(c\lambda) e^{-\lambda h} d\lambda. \quad (14)$$

Граничное условие (5) на основании представлений (8), (10), (12), (13) с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра $P_n(\cos\beta)$ на отрезке $[0, \pi]$ примет вид

$$a_n + d_n(c) Q_n(\xi_0) = b_n + A_n P_n(\xi_0), \quad \xi_0 = ish\alpha_0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_0(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_1^{(1)}(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_d(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial\alpha} U_1^{(2)}(\alpha, \beta)$ и выполним граничные условия (2), (5). Получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + A_n P_n(\xi_0)) P_n(\cos\beta) = 0, & 0 \leq \beta < \beta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (d_n(c) Q_n'(\xi_0) + a_n \frac{P_n'(\xi_0)}{P_n(\xi_0)} - b_n \frac{Q_n'(\xi_0)}{Q_n(\xi_0)} - A_n P_n'(\xi_0)) P_n(\cos\beta) = 0, & \beta_0 < \beta \leq \pi. \end{cases}$$

Исключим коэффициенты a_n в парных уравнениях, учитывая формулу (15) и значение вронскиана [33]

$$W[P_n(z), Q_n(z)] = -\frac{1}{z^2 - 1}.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + A_n P_n(\xi_0)) P_n(\cos\beta) = 0, & 0 \leq \beta < \beta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b_n}{P_n(\xi_0) Q_n(\xi_0)} - \frac{d_n(c)}{P_n(\xi_0)} \right) P_n(\cos\beta) = 0, & \beta_0 < \beta \leq \pi. \end{cases} \quad (16)$$

Преобразуем парные уравнения (16) к стандартному виду. Для этого введем в рассмотрение новые коэффициенты T_n по формуле

$$(2n+1)T_n = \frac{b_n}{P_n(\xi_0)Q_n(\xi_0)} - \frac{d_n(c)}{P_n(\xi_0)}, \quad n=0, 1, \dots, \quad (17)$$

и малый параметр g_n по формуле

$$g_n = 1 - (2n+1)ich\alpha_0 P_n(\xi_0)Q_n(\xi_0), \quad g_n = O(n^{-2}). \quad (18)$$

В результате парные сумматорные уравнения (16) примут вид

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (1-g_n)T_n P_n(\cos\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos\beta), & 0 \leq \beta < \beta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)T_n P_n(\cos\beta) = 0, & \beta_0 < \beta \leq \pi, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{где} \quad f_n = -ich\alpha_0 (A_n P_n(\xi_0) + d_n(c)Q_n(\xi_0)). \quad (20)$$

На основании интегральных представлений Мелера – Дирихле для полиномов Лежандра [33]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n+0,5)x dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}} = \frac{2}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin(n+0,5)x dx}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos x)}}$$

парные сумматорные уравнения (19) преобразуем сначала к двум интегральным уравнениям Абеля с нулевой правой частью, а затем – к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго порядка с вполне непрерывным оператором

$$T_n - \sum_{k=0}^{\infty} g_k Q_{nk}(\beta_0) T_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k Q_{nk}(\beta_0), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$\text{где} \quad Q_{sn}(\beta_0) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-s)\beta_0}{n-s} + \frac{\sin(n+s+1)\beta_0}{n+s+1} \right], \quad \frac{\sin(n-s)\beta_0}{n-s} \Big|_{n=s} = \beta_0.$$

Для выполнения граничного условия (3) используем формулу, связывающую эллипсоидальные и цилиндрические гармонические функции,

$$Q_n(ish\alpha)P_n(\cos\beta) = -ci^{n+1} \int_0^\infty j_n(c\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{\lambda z} d\lambda, \quad z < 0,$$

и представим функцию $U_1^{(1)}(\alpha, \beta)$ через цилиндрические гармонические функции

$$U_1^{(1)}(\rho, z) = P \int_0^\infty B(\lambda)J_0(\lambda\rho)e^{\lambda z} d\lambda, \quad (22)$$

$$\text{где} \quad B(\lambda) = -c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} j_n(c\lambda)}{Q_n(\xi_0)} b_n. \quad (23)$$

Выполним граничное условие (3) на поверхности плоскости Γ , принимая во внимание представления (11), (22), и получим

$$A(\lambda) + B(\lambda)e^{-\lambda h} = 0. \quad (24)$$

Установим связь между коэффициентами A_n , входящими в правую часть системы (21), и коэффициентами T_n . Для этого исключим в (14) функцию $A(\lambda)$ с помощью представления (24), затем в полученном выражении заменим функцию $B(\lambda)$ коэффициентами b_n , используя представление (23). Учитывая связь (17) между коэффициентами T_n и b_n , окончательно получим

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} ((2k+1)P_k(\xi_0)T_k + d_k)I_{nk}, \quad (25)$$

где $I_{nk} = c(2n+1)i^{n+k+1} \int_0^{\infty} j_n(c\lambda) j_k(c\lambda) e^{-2\lambda h} d\lambda.$

Подставим представление (25) для коэффициентов A_n в (20) и после некоторых преобразований получим бесконечную СЛАУ второго порядка с вполне непрерывным оператором

$$T_n + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{nk} - g_k Q_{nk}(\beta_0)) T_k = - \sum_{k=0}^{\infty} f_{nk}^{(1)} - f_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (26)$$

где $\alpha_{nk} = ich\alpha_0(2k+1)P_k(\xi_0) \sum_{p=0}^{\infty} P_p(\xi_0) I_{pk} Q_{np}(\beta_0), f_{nk}^{(1)} = ich\alpha_0 P_k(\xi_0) Q_{nk}(\beta_0) \sum_{p=0}^{\infty} d_p(c) P_p(\xi_0) I_{kp},$

$$f_n^{(2)} = ich\alpha_0 \sum_{k=0}^{\infty} d_k(c) Q_k(\xi_0) Q_{nk}(\beta_0).$$

Используя формулы [18]

$$J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} r^n P_n(\cos\theta), \quad Q_n(ish\alpha)P_n(\cos\beta) = \sum_{s=n}^{\infty} D_n^s r^{-s-1} P_s(\cos\theta), \quad r > c,$$

где $D_n^s = \begin{cases} 0, & \text{если } (s-n) - \text{нечетное,} \\ \frac{2^n (-ic)^{s+1} s! ((s+n)/2)!}{(s+n+1)! ((s-n)/2)!}, & \text{если } (s-n) - \text{четное,} \end{cases}$

представим потенциал вторичного электростатического поля U_1 в области D_1 через сферические гармонические функции

$$U_1(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_n r^n + \gamma_n r^{-n-1}) P_n(\cos\theta),$$

где $\chi_n = c \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{i^{k+1}}{Q_k(\xi_0)} J_{kn}, \quad \gamma_n = \sum_{p=0}^n b_p \frac{D_p^n}{Q_p(\xi_0)}, \quad J_{kn} = \int_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} j_k(c\lambda) e^{-2\lambda h} d\lambda.$

Коэффициенты b_n определяются через решение системы (26) по формуле (17).

3. Вычислительный эксперимент

С помощью системы компьютерной математики Mathcad [35] был вычислен потенциал электростатического поля $U_1(r, \theta)$ в области D_1 для некоторых параметров задачи. Сферическая функция $j_n(x)$ вычислена с помощью встроенной функции $js(n, x)$, а полиномы Лежандра $P_n(x)$ – с помощью встроенной функции $Leg(n, x)$. Присоединенные функции Лежандра первого рода $P_n(z)$ вычислены по рекуррентной формуле [33]:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_n(z) = [(2n-1)zP_{n-1}(z) - (n-1)P_{n-1}(z)]/n, \quad n = 2, 3, \dots.$$

Присоединенные функции Лежандра второго рода $Q_n(z)$ вычислены по следующему алгоритму [36]:

$$R_N = z - \sqrt{z^2 - 1}, \quad R_j = \frac{j}{(2j+1)z - (j+1)R_{j+1}}, \quad j = \overline{N-1, 1},$$

$$Q_0(z) = 0, 2 \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = zQ_0(z) - 1, \quad Q_j = R_j Q_{j-1}(z), \quad j = \overline{2, N}, \quad N = 300.$$

Результаты вычислений $Q_n(z)$ совпадают с контрольными значениями [36].

Бесконечная система (26) решена методом усечения [19]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [37, с. 150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовали встроенные функции `cond1` (число обусловленности в норме L_1), `cond2` (в норме L_2) и `conde` (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных параметров задачи порядок усечения матрицы можно взять равным 100. Это обеспечивает решение конечной системы (26) с точностью 10^{-4} , и число обусловленности в рассматриваемых нормах не будет превосходить 20. Все сходящиеся бесконечные суммы вычислены с точностью 10^{-5} .

Разработанное программное обеспечение позволяет вычислять значение вторичного потенциала $U_1(r, \theta)$ и анализировать экранирующие свойства рассматриваемой системы экранов. Приведем некоторые результаты расчетов.

На рис. 2 изображены графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для увеличивающихся значений большой полуоси эллипса a (значения даны в левом углу рисунка в метрах) при $b = 0,05$ м, $h = 0,35$ м, $r = 0,25$ м, $\beta_0 = \pi / 4$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

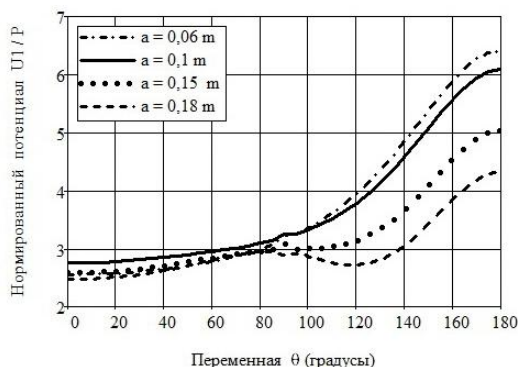


Рис. 2. Графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений a

Из приведенных вычислений следует, что для $0 \leq 90^\circ$ значение нормированного потенциала почти одинаково для изменяющихся значений большой полуоси эллипса a . С увеличением переменной θ и величины a (эллипс становится более сплюснутым) значение нормированного потенциала увеличивается.

На рис. 3 показаны графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений угла раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки β_0 в градусах при $a = 0,1$ м; $b = 0,05$ м; $h = 0,3$ м; $r = 0,15$ м; $0 \leq \theta \leq \pi$.

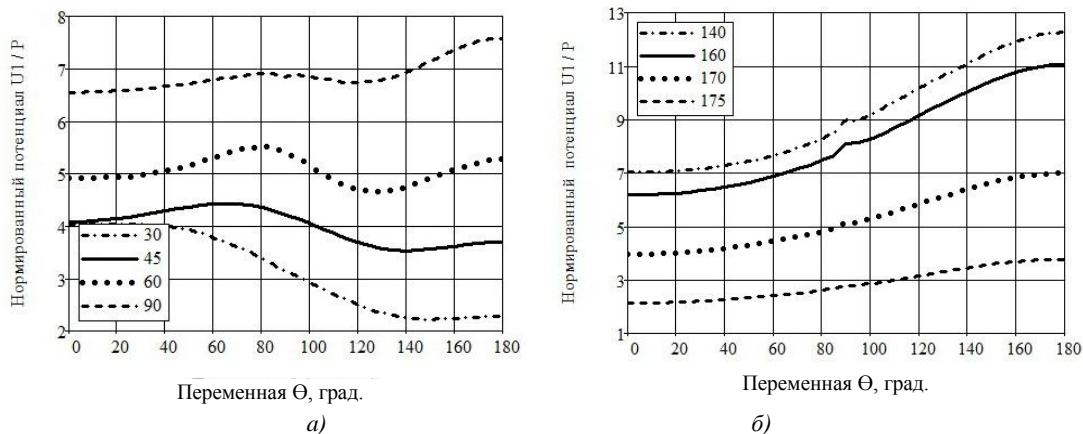


Рис. 3. Графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений угла раствора незамкнутой эллипсоидальной оболочки β_0

Из приведенных вычислений следует, что при угле раствора $\beta_0 < 60^\circ$ значение нормированного потенциала убывает для всех значений θ на фиксированном расстоянии от центра эллипса O (рис. 3, *а*), затем при увеличении угла раствора незамкнутой оболочки до $\beta_0 = 140^\circ$ увеличивается (рис. 3, *а* и *б*). При уменьшении отверстия в оболочке ($\beta_0 > 140^\circ$) значение нормированного потенциала уменьшается (рис. 3, *б*).

На рис. 4 изображены графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для возрастающих значений h при $a = 0,075$ м, $b = 0,05$ м, $r = 0,15$ м, $\beta_0 = 120^\circ$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

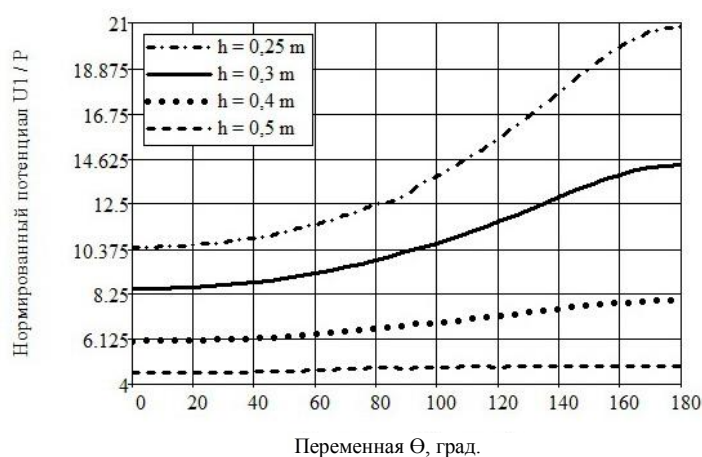


Рис. 4. Графики нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ для некоторых значений h

Из приведенных вычислений следует, что при увеличении h значение нормированного потенциала становится одинаковым для всех значений $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ на фиксированном расстоянии от точки O .

Заключение

В статье разработан аналитико-численный алгоритм решения осесимметричной задачи экранирования электростатического поля идеально тонкой незамкнутой сплюснутой эллипсоидальной оболочкой, расположенной в полупространстве с идеально проводящей плоскостью. В качестве источника поля рассмотрен электростатический диполь, расположенный внутри тонкой незамкнутой эллипсоидальной оболочки. С использованием соответствующих теорем сложения для гармонических функций решение поставленной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи на значение вторичного потенциала электростатического поля. Вычислительные эксперименты показали, что с увеличением большей полуоси эллипса a при заданном значении угла раствора β_0 значение нормированного потенциала $U_1(r, \theta) / P$ на фиксированном расстоянии r от центра эллипса при $\theta \leq 90^\circ$ незначительно изменяется, а при $\theta > 90^\circ$ — постоянно увеличивается. При увеличении угла раствора незамкнутой оболочки β_0 (отверстие незамкнутой оболочки уменьшается) значение нормированного потенциала значительно уменьшается на фиксированном расстоянии r от центра эллипса. Значение нормированного потенциала с увеличением расстояния h от центра эллипса до плоскости становится практически одинаковым для заданных параметров незамкнутой оболочки на фиксированном расстоянии от центра эллипса r .

Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при разработке и конструировании экранов в различных областях техники.

Список литературы

1. Маергойз, И.Д. Расчет электростатических полей методом интегральных уравнений второго рода / И.Д. Маергойз // *Электричество*. – 1975. – № 12. – С. 11–15.
2. Демирчан, К.С. Машинные расчеты электромагнитных полей / К.С. Демирчан, В.Л. Чечурин. – М. : Высш. шк., 1986. – 240 с.
3. Дмитриев, В.И. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 316 с.
4. Ильин, В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / В.П. Ильин. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2000. – 345 с.
5. Исаев, Ю.Н. Методы расчета электромагнитных полей. Практика использования MathCAD, COMSOL Multiphysics / Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 162 с.
6. Лебедев, Н.Н. Применение парных интегральных уравнений к электростатическим задачам для полого проводящего цилиндра конечной длины / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *ЖТФ*. – 1973. – Т. 43, № 1. – С. 44–51.
7. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на конечном конусе / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *Ж. выч. мат. и мат. физики*. – 1969. – Т. 9, № 6. – С. 1336–1346.
8. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на тонком гиперболическом сегменте / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *Ж. выч. мат. и мат. физики*. – 1967. – Т. 7, № 2. – С. 349–356.
9. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на тонком параболическом сегменте / Н.Н. Лебедев // *ДАН СССР*. – 1957. – Т. 114, № 3. – С. 513–516.
10. Лебедев, Н.Н. Распределение электричества на тонком сферическом кольце / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская // *ЖТФ*. – 1982. – Т. 52, № 12. – С. 2325–2331.
11. Кадников, С.Н. Методы расчета электростатического поля тонких оболочек и их применение в технике высоких напряжений : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.09.05 / С.Н. Кадников ; НПИ. – Новочеркасск, 1990. – 42 с.
12. Виноградов, С.С. К решению краевых задач теории потенциала для незамкнутых эллипсоидов вращения / С.С. Виноградов, Ю.А. Тучкин, В.П. Шестапов // *Доклады АН УССР. Серия А*. – 1981. – № 12. – С. 47–51.
13. Занадворов, Н.П. Электростатическая задача для полого усеченного конуса / Н.П. Занадворов // *ЖТФ*. – 1987. – Т. 57, № 4. – С. 634–638.
14. Виноградов, С.С. Расчет электростатических полей проводников в форме сферических оболочек с двумя круглыми отверстиями / С.С. Виноградов, Е.Д. Луценко // *Электричество*. – 1988. – № 2. – С. 52–55.
15. Кленов, Г.Э. О потенциале электростатического поля кольцевого электрода / Г.Э. Кленов // *Электричество*. – 1973. – № 9. – С. 85–87.
16. Шушкевич, Г.Ч. Методика решения электростатической задачи для тонкой незамкнутой сферической оболочки // *Электричество*. – 2010. – № 6. – С. 63–68.
17. Collins, W.D. On some triple series equations and their application / W.D. Collins // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1962. – Vol. 11, no. 2. – P. 122–137.
18. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.
19. Ерофеенко, В.Т. Задача электростатики для двух тороидальных проводников / В.Т. Ерофеенко // *ЖТФ*. – 1986. – Т. 56, № 8. – С. 1641–1643.
20. Ерофеенко, В.Т. Метод теорем сложения и теория усредненных граничных условий в краевых задачах электродинамики : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.03 / В.Т. Ерофеенко ; Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1993. – 29 с.
21. Chang, I.C. Potential of a charged axially symmetric conductor inside a cylindrical tube / I.C. Chang, I.D. Chang // *J. Appl. Phys.* – 1970. – Vol. 41, no. 5. – P. 1967–1970.
22. Smythe, W.R. Charged spheroid in cylinder / W.R. Smythe // *J. Math. Phys.* – 1963. – Vol. 4, no. 6. – P. 833–837.
23. Руховец, А.Н. Решение некоторых классов смешанных краевых задач методом парных уравнений : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 10.00.05 / А.Н. Руховец ; ЛПИ. – Л., 1971. – 11 с.

24. Шушкевич, Г.Ч. Расчет емкости двух тонких сферических оболочек / Г.Ч. Шушкевич // Электричество. – 1984. – № 10. – С. 62–64.
25. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической оболочки и двух дисков / Г.Ч. Шушкевич // Электричество. – 1999. – № 6. – С. 28–34.
26. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкого сферического сегмента и диска / Г.Ч. Шушкевич // ЖТФ. – 1984. – Т. 54, № 9. – С. 1801–1803.
27. Шушкевич, Г.Ч. Электростатическое поле тонкой незамкнутой сферической и сфероидальной оболочек / Г.Ч. Шушкевич // Электричество. – 1997. – № 3. – С. 59–64.
28. Шушкевич, Г.Ч. Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г.Ч. Шушкевич. – Saarbruchen : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.
29. Sampath, C. Some electrostatic problems of two equal coaxial circular strips / C. Sampath, D. Jain // J. Math. and Phys. Sci. – 1991. – Vol. 25, no. 3. – P. 217–230.
30. Ерофеенко, В.Т. Моделирование поля канала импульсного электрического разряда в присутствии сферического экрана и тонкого проводящего стержня / В.Т. Ерофеенко, Д.В. Комнатный, Е.В. Лозовская // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2012. – № 3. – С. 85–92.
31. Ерофеенко, В.Т. Расчет электростатических полей в корпусе с отверстием методом граничных элементов / В.Т. Ерофеенко, Д.В. Комнатный // Информатика. – 2011. – № 2(30). – С. 48–55.
32. Аполлонский, С.М. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках // С.М. Аполлонский, В.Т. Ерофеенко. – Минск : Университетское, 1988. – 246 с.
33. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
34. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
35. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 2 / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2012. – 256 с.
36. Агеев, М.И. Библиотека алгоритмов 0516–100б (справ. пособие). Вып. 2 / М.И. Агеев, В.П. Алик, Ю.И. Марков. – М. : Сов. радио, 1976. – 136 с.
37. Петров, Ю.П. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю.П. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 160 с.

Поступила 26.03.2017

*Гродненский государственный
университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22
e-mail: g_shu@tut.by*

G.Ch. Shushkevich

SIMULATION OF THE ELECTROSTATIC DIPOLE FIELD IN THE PRESENCE OF A THIN UNCLOSED OBLATE ELLIPSOIDAL SHELL AND PLANE

An analytical solution of axially symmetric problem for determining the field of an electrostatic dipole located inside a thin unclosed oblate ellipsoidal shell in the presence of a grounded plane is constructed. Using the addition theorems connecting spherical, ellipsoidal and cylindrical harmonic functions, the solution of the boundary problem is reduced to the solution of dual series equations by the Legendre polynomials that are transformed to an infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a completely continuous operator. The influence of the geometrical parameters of the problem on the value of the secondary potential of the electrostatic field is numerically investigated, the corresponding graphs are given.