*УДК 519.86*

**С.И. Доценко**

# ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАСХОДОВ ПРИ РАЗВОЗКЕ ПО КОЛЬЦЕВОМУ МАРШРУТУ КАК КООПЕРАТИВНАЯ ИГРА

*Рассматривается практическая задача распределения выгоды между участниками кооперативной перевозки товаров транспортным средством. Для моделирования используется аппарат теории кооперативных игр. Обсуждаются некоторые понятия кооперативной теории игр. Рассматриваются такие подходы распределения вектора стоимости и вектора получаемой в результате кооперации выгоды, как вектор Шепли, n-ядро кооперативной игры и нормированное n-ядро. Приводятся алгоритмы построения, и для рассматриваемой задачи находятся все указанные векторы распределения стоимости.*

## Введение

В работе рассматривается логистическая задача справедливого распределения расходов при доставке грузов нескольким потребителям на примере задачи развозки по кольцевому маршруту из Минска в пять областных центров Республики Беларусь.

На интуитивном уровне понятно, что если суммарный объем заказов не превышает грузоподъемность транспортного средства, то группе потребителей выгоднее вскладчину оплатить некоторый кольцевой маршрут, чем каждому в отдельности платить за радиальный. При получении суммарной выгоды от уменьшения длины маршрута возникает естественный вопрос, как эту выгоду справедливо разделить между потребителями. Оказывается, что математическим аппаратом такой задачи распределения расходов может служить кооперативная игра, «надстроенная» над задачей коммивояжера. К сожалению, приведенная методика применима лишь для задач с небольшим количеством потребителей, поскольку при решении задачи возникает «проклятие размерности» сразу по двум причинам. Во-первых, как известно, сама задача коммивояжера является $NP$-трудной. Во-вторых, кооперативная игра с $n$ игроками предполагает задание характеристической функции от $2^n - 1$ аргументов, а в ходе решения вспомогательных задач каждому заданому значению соответствует ограничение в задаче линейного программирования.

Задача коммивояжера является одной из ключевых задач комбинаторной оптимизации. Она формулируется следующим образом: в графе найти замкнутый маршрут минимального веса (где под весом маршрута понимается сумма весов входящих в него ребер), в который каждая вершина входит в точности один раз.

Относительно постановки задачи коммивояжера следует сделать некоторые замечания. В произвольном графе (например, в любом дереве) может не существовать замкнутого маршрута, содержащего каждую из вершин в точности один раз. Даже если такой маршрут существует, то может существовать маршрут меньшего веса, проходящий через все вершины по крайней мере один раз, а через некоторые вершины – более одного раза. Однако в полном графе при условии соблюдения неравенства треугольника для любой тройки вершин существует замкнутый маршрут с посещением каждой вершины ровно один раз, для которого не существует другого замкнутого маршрута с посещением каждой вершины по крайней мере один раз и имеющего меньший вес.

## 1. Основные сведения о кооперативных играх

Кооперативная игра задается парой $\langle N, V \rangle$, где $N$ – конечное множество игроков; $n$ – их количество; $V$ – отображение $2^N \to R$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, называемое характеристической функцией (которая ставит в соответствие каждой коалиции совместный заработок ее членов), причем $V(\varnothing) = 0$ (это, по сути, означает, что пустая коалиция никогда ничего не зарабатывает). Множество всех кооперативных игр на множестве игроков $N$, в котором различные игры отличаются различными характеристическими функциями, обозначается через $G^N$. Множество всех игроков $N$ принято называть гранд-коалицией.

Кооперативная игра называется супераддитивной, если $\left(\forall S,T \in 2^N,\ S \cap T = \varnothing\right)$ $\left(V(S)+V(T) \le V(S \cup T)\right)$, и выпуклой, если $\left(\forall S,T \in 2^N\right)\left(V(S)+V(T) \le V(S \cup T)+V(S \cap T)\right)$.

Решением кооперативной игры $\vec{x}=\left(x_1,...,x_n\right)$ называется отображение $f: G^N \to R^n$, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре $n$-мерный вектор, $i$-я компонента которого равна платежу $i$-му игроку в данной игре. Решение игры называется эффективным, если $X\left(N\right)=V\left(N\right)$, где $X(S)=\sum_{i \in S} x_i$. Эффективность решения означает, что заработок гранд-коалиции распределяется между ее членами без потерь. Решение игры называется стабильным, если для любой коалиции $S \subset N$ выполнено условие $\sum_{i \in S} x_i \ge x(S)$, что, по сути, является условием отсутствия стимула к сепаратизму. Другими словами, никакой из коалиций $S$ невыгодно выйти из гранд-коалиции, с тем чтобы получить совместный заработок и распределить его между членами $S$ так, чтобы каждый из игроков получил больше, чем его доля $x_i$ в гранд-коалиции.

Ядром игры называется множество эффективных и стабильных решений $\vec{x}$: $C(V) := \left\{\vec{x} \in R^n \mid X(N)=V(N),\ X(S) \ge V(S),\ \forall S \in 2^N\right\}$.

Рассмотрим некоторую перестановку игроков $\pi=\left(i_1,...,i_n\right)$. Пусть $\pi(i)$ – номер позиции $i$-го игрока в перестановке $\pi$; $\pi^i=\left\{j \in N \mid \pi(j) \le \pi(i)\right\}$ – множество игроков, включающее $i$ и всех, кто стоит перед ним в перестановке $\pi$. Назовем маргинальным вкладом игрока $i$ в перестановку $\pi$ величину $m_i^\pi=V\left(\pi^i\right)-V\left(\pi^i \setminus \{i\}\right)$. Очевидно, что для любой перестановки сумма маргинальных вкладов всех игроков равна $V(N)$.

Вектором Шепли (ВШ) называется решение кооперативной игры, представляющее собой вектор маргинальных вкладов игроков, усредненных по всем возможным $n!$ перестановкам. Компоненты ВШ также могут быть вычислены по формуле

$$\varnothing_i(V)=\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\left(n-1-|S|\right)!}{n!}\left(V\left(S \cup \{i\}\right)-V\left(S\right)\right). \tag{1}$$

Оказывается, что для выпуклой игры ядро всегда непусто, а ВШ является «центром масс» ядра и, следовательно, принадлежит ему. Для невыпуклой игры ядро может оказаться пустым, а ВШ может не принадлежать ядру, даже если ядро непусто. В этом случае более приемлемыми решениями оказываются $n$-ядро (nucleolus) и nucleolus per capita (в литературе русского перевода не имеет и буквально означает «$n$-ядро на душу населения»).

Понятие $n$-ядра было впервые введено в [1]. Это точечное решение кооперативной игры, которое базируется на понятиях эксцесса и лексикографического порядка.

Определение 1. Эксцесс коалиции – это значение

$$e(x,S)=V(S)-\sum_{i \in S} x_i,\ \vec{x} \in D(V),\ S \in 2^N, \tag{2}$$

где $D(V)$ – множество решений игры $\vec{x}=\left(x_1,...,x_n\right)$, удовлетворяющих условиям эффективности и индивидуальной рациональности, т. е. $\sum_{i \in N} x_i = V(N)$ и $x_i \ge V(i),\ i=\overline{1,n},$ соответственно.

Другими словами, эксцесс является мерой сожаления о том, что суммарный заработок коалиции не такой большой, как хотелось бы. Если суммарный заработок членов коалиции $S$ больше, чем $V(S)$, то эксцесс будет отрицательным.

Определение 2. Вектор $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ лексикографически меньше, чем $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, если существует некоторое $k \in \{1, ..., n\}$, такое, что $x_k < y_k$ и $x_i = y_i$ для всех $i < k$.

Определение 3. *n*-ядро кооперативной игры – это эффективное решение $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, для которого достигается лексикографический минимум на множестве векторов размерности $2^N - 1$ с упорядоченными в убывающем порядке компонентами, которые равны значениям эксцессов всех непустых коалиций $S \in 2^N \setminus \varnothing$. Оказывается, что для любой кооперативной игры существует *n*-ядро. Кроме того, если ядро игры непусто, то *n*-ядро всегда принадлежит ядру.

Понятие нормированного ядра (normalized nucleolus) было введено в [2]. Оно аналогично понятию *n*-ядра с той разницей, что понятие «эксцесс» заменяется на «эксцесс на душу населения» (epc), при этом вычисленное значение эксцесса коалиции делится на количество членов коалиции. Найденный таким образом лексикографический минимум для нормализованного ядра также носит название «nucleolus per capita» [3, с. 129]:

$$\mathrm{epc}(x, S) = \frac{V(S) - \sum_{i \in S} x_i}{|S|}, \vec{x} \in D(V), S \in 2^N. \quad (3)$$

В работе [4] было показано, что для задачи коммивояжера при условиях соблюдения неравенств треугольника и равенства расстояний в противоположных направлениях, т. е. $(\forall i, j)(d_{i,j} = d_{j,i})$, ядро всегда непусто для трех и четырех игроков соответственно.

## 2. Применение аппарата кооперативных игр в задаче развозки

В качестве примера рассмотрим задачу развозки с отправной точкой в Минске с посещением пяти центров областей Республики Беларусь, а именно Витебска, Могилева, Гомеля, Бреста и Гродно. В качестве исходных данных задачи возьмем расстояния между городами по автомагистралям, вычисленные с помощью онлайн-калькулятора расстояний на сайте avtodispetcher.ru. Расстояния между городами приведены в табл. 1.

Таблица 1

| Город | **Минск** | Витебск | Могилев | Гомель | Брест | Гродно |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Минск** | – | 288 | 198 | 298 | 353 | 278 |
| Витебск | 288 | – | 163 | 336 | 641 | 568 |
| Могилев | 198 | 163 | – | 180 | 538 | 480 |
| Гомель | 298 | 336 | 336 | – | 536 | 590 |
| Брест | 353 | 641 | 641 | 536 | – | 232 |
| Гродно | 278 | 568 | 568 | 590 | 232 | – |

Заметим, что в табл. 1 для некоторых троек городов нарушается неравенство треугольника, хотя и незначительно. Например, *d*(Гродно – Гомель) = 590 км, что больше, чем (*d*(Гродно – Минск) = 278 км)+(*d*(Минск–Гомель) = 298 км) = 576 км. Это объясняется тем, что расстояние между городами ищется по сети дорог между центрами (нулевыми отметками), а если дорога из одного города в другой проходит через третий (например, из Гомеля в Гродно – через Минск), то маршрут строится навигатором не через центр промежуточного пункта, а в объезд.

Другими тройками городов, для которых нарушается неравенство треугольника, являются Витебск – Могилев – Гомель и Витебск – Минск – Гродно.

Чтобы избежать противоречий в дальнейших расчетах, уменьшим большее расстояние до величины суммы двух меньших так, чтобы неравенство треугольника выполнялось как равенство. Новые данные представим в табл. 2, где измененные расстояния выделены жирным шрифтом.

Таблица 2

| Город | **Минск** | Витебск | Могилев | Гомель | Брест | Гродно |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Минск** | – | 288 | 198 | 298 | 353 | 278 |
| Витебск | 288 | – | 163 | 336 | 641 | **566** |
| Могилев | 198 | 163 | – | 180 | 538 | **476** |
| Гомель | 298 | 336 | 336 | – | 536 | **576** |
| Брест | 353 | 641 | 641 | 536 | – | 232 |
| Гродно | 278 | **566** | **476** | **576** | 232 | – |

В роли игроков (участников кооперативной игры) выступают города, в которые осуществляется доставка, но не отправной пункт (Минск). В качестве исходной характеристической функции (ХФ), описывающей транспортные расходы коалиции городов, возьмем оптимальное решение задачи коммивояжера для множества, включающего отправной пункт и все города данной коалиции.

Так, для одноэлементных коалиций ХФ равна удвоенному расстоянию от Минска до данного города, а для двухэлементных коалиций – сумме расстояний от отправного пункта до этих городов плюс расстояние между ними. Для нахождения ХФ коалиций, состоящих из трех-пяти городов, воспользуемся сервисом решения задачи коммивояжера, представленном на сайте math.semestr.ru и основанном на методе ветвей и границ.

Исходные значения характеристической функции: $V$(Вит)=576, $V$(Мог)=394, $V$(Гом)=596, $V$(Бр)=706, $V$(Гр)=556, $V$(Вит, Мог)=649, $V$(Вит, Гом)=992, $V$(Вит, Бр)=1282, $V$(Вит, Гр)=1132, $V$(Мог, Гом)=676, $V$(Мог, Бр)=1089, $V$(Мог, Гр)=952, $V$(Гом, Бр)=1187, $V$(Гом, Гр)=1152, $V$(Бр, Гр)=863, $V$(Вит, Мог, Гом)=929, $V$(Вит, Мог, Бр)=1342, $V$(Вит, Мог, Гро)=1205, $V$(Вит, Гом, Бр)=1513, $V$(Вит, Гом, Гро)=1478, $V$(Вит, Бр, Гро)=1439, $V$(Мог, Гом, Бр)=1267, $V$(Мог, Гом, Гро)=1232, $V$(Мог, Бр, Гро)=1246, $V$(Гом, Бр, Гр)=1344, $V$(Вит, Мог, Гом, Бр)= =1520, $V$(Вит, Мог, Гом, Гр)=1485, $V$(Вит, Мог, Бр, Гр)=1499, $V$(Вит, Гом, Бр, Гр)=1670, $V$(Мог, Гом, Бр, Гр)=1424, $V$(Вит, Мог, Гом, Бр, Гр)=1677.

По данной ХФ затрат построим так называемую ХФ экономий, вычисляемую по формуле

$$W(S)=\sum_{i\in S}V(i)-V(S), \tag{4}$$

и будем вести дальнейшие рассуждения уже относительно нее. Значение ХФ $W(S)$ коалиции равно величине экономии суммарной длины маршрута, включающего пункт отправления и все города коалиции по сравнению со случаем, когда каждый из городов коалиции использует радиальный маршрут, например $W$(Мог, Бр, Гр)=$V$(Мог)+$V$(Бр)+$V$(Гр)–$V$(Мог, Бр, Гр)=412.

Заметим, что согласно формуле (4) значение $W$ от одноэлементных коалиций равно нулю, остальные значения вычислим непосредственно: $W$(Вит, Мог)=323, $W$(Вит, Гом)=180, $W$(Вит, Бр)=0, $W$(Вит, Гр)=0, $W$(Мог, Гом)=316, $W$(Мог, Бр)=13, $W$(Мог, Гр)=0, $W$(Гом, Бр)=115, $W$(Гом, Гр)=0, $W$(Бр, Гр)=399, $W$(Вит, Мог, Гом)=639, $W$(Вит, Мог, Бр)=336, $W$(Вит, Мог, Гр)= =323, $W$(Вит, Гом, Бр)=365, $W$(Вит, Гом, Гро)=250, $W$(Вит, Бр, Гр)=399, $W$(Мог, Гом, Бр)=437, $W$(Мог, Гом, Гро)=316, $W$(Мог, Бр, Гр)=412, $W$(Гом, Бр, Гр)=514, $W$(Вит, Мог, Гом, Бр)=754, $W$(Вит, Мог, Гом, Гр)=639, $W$(Вит, Мог, Бр, Гр)=735, $W$(Вит, Гом, Бр, Гр)=764, $W$(Мог, Гом, Бр, Гр)=830, $W$(Вит, Мог, Гом, Бр, Гр)=1153.

Для данной ХФ найдем ВШ. Формулу (1) можно представить в развернутом виде:

$$\varnothing_i=\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{|S|=k,\\ i\in S}}(k-1)!(n-k)!W(S)-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{|S|=k,\\ i\notin S}}k!(n-k-1)!W(S)\right). \tag{5}$$

Для $n$=5 с учетом того, что $W(S)$=0 при $|S|$=1 (т. е. для одноэлементных коалиций значения ХФ равны нулю), формула (5) приобретает вид

$$ø_i = \frac{1}{120}\left(\left(6\sum_{\substack{|S|=2,\\ i\in S}} + 4\sum_{\substack{|S|=3,\\ i\in S}} + 6\sum_{\substack{|S|=4,\\ i\in S}} - 4\sum_{\substack{|S|=2,\\ i\notin S}} - 6\sum_{\substack{|S|=3,\\ i\notin S}}\right)\big(W(S)\big) + 24(W(N) - W(N\setminus i))\right). \quad (6)$$

Компоненты ВШ, вычисленные по формуле (6) и округленные до целых значений, имеют значения $ø = (199,\ 241,\ 249,\ 262,\ 202)$.

Непосредственная проверка по всем коалициям выполнения условия устойчивости $\sum_{i\in S} x_i \geq W(S)$ для ВШ показывает, что ядро данной игры непусто и ВШ принадлежит ядру.

Задачу нахождения *n*-ядра запишем как задачу нахождения лексикографического максимума величин переплат по всему набору коалиций $S,\ S \subseteq N, S \neq N,$ на множестве всех эффективных распределений, т. е. распределений, удовлетворяющих условию $x_i \geq 0, \sum_{i\in N} x_i = W(N)$. На практике эта задача решается как последовательность вспомогательных задач линейного программирования (ЗЛП), принцип построения которой описан ниже. Для каждой коалиции $S,\ S \subset N,\ S \neq N,\ S \neq \varphi,$ определяем величину переплаты, равную $\sum_{i\in S} x_i - W(S)$ (переплата равна величине эксцесса, взятой с обратным знаком).

Первая задача последовательности имеет вид

$$t \to \max,$$
$$\left(\sum_{i\in S} x_i - W(S) \geq t\right)\left(\forall S \subset N,\ \ S \neq N,\ \ S \neq \varphi\right),$$
$$\sum_{i\in N} x_i = W(N),\ x_i \geq 0.$$

В первой ЗЛП находится решение $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$. При этом решении величина переплаты *t*, которую гарантированно получат все коалиции (или, другими словами, минимальная из переплат), достигает максимума. В полученном решении оказывается, что найденное максимальное значение минимальной переплаты достигается одновременно для нескольких коалиций, при этом некоторые подмножества множества коалиций, для которых достигается найденная минимальная переплата, обязательно образуют так называемую дополняющую группу или, другими словами, являются взаимодополняющими. Значит, суммарная выплата по дополняющей группе коалиций оказывается постоянной и любое увеличение выплаты по одной из коалиций группы неизбежно ведет к уменьшению выплаты в какой-либо другой коалиции этой группы, что, в свою очередь, уменьшает (в лексикографическом смысле) вектор переплат по всем коалициям, упорядоченный в порядке возрастания. Поэтому найденные выплаты по всем коалициям дополняющей группы фиксируются, а в следующую вспомогательную ЗЛП вводятся соответствующие дополнительные ограничения.

Следующая ЗЛП находит решение, максимизирующее минимальную из переплат по всем коалициям, выплата по которым не была фиксирована ранее, и т. д.

Пронумеруем города в порядке, приведенном в табл. 1, т. е. 1 – Витебск, 2 – Могилев, 3 – Гомель, 4 – Брест, 5 – Гродно. Для данной кооперативной игры первая ЗЛП выглядит следующим образом:

$$t \to \max$$
$$x_1 - t \geq 0,\ x_2 - t \geq 0,\ x_3 - t \geq 0,\ x_4 - t \geq 0,\ x_5 - t \geq 0,\ t \geq 0,\ x_1 + x_2 - t \geq 323,$$
$$x_1 + x_3 - t \geq 180,\ x_1 + x_4 - t \geq 0,\ x_1 + x_5 - t \geq 0,\ x_2 + x_3 - t \geq 316,\ x_2 + x_4 - t \geq 13,$$
$$x_2 + x_5 - t \geq 0,\ x_3 + x_4 - t \geq 115,\ x_3 + x_5 - t \geq 0,\ x_4 + x_5 - t \geq 399,\ x_1 + x_2 + x_3 - t \geq 639,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 - t \geq 336,\ x_1 + x_2 + x_5 - t \geq 323,\ x_1 + x_3 + x_4 - t \geq 365,\ x_1 + x_3 + x_5 - t \geq 250,$$
$$x_1 + x_4 + x_5 - t \geq 399,\ x_2 + x_3 + x_4 - t \geq 437,\ x_2 + x_3 + x_5 - t \geq 316,\ x_2 + x_4 + x_5 - t \geq 412,$$

$x_3+x_4+x_5-t\ge 514,\ x_1+x_2+x_3+x_4-t\ge 754,\ x_1+x_2+x_3+x_5-t\ge 639,$
$x_1+x_2+x_4+x_5-t\ge 735,\ x_1+x_3+x_4+x_5-t\ge 764,\ x_2+x_3+x_4+x_5-t\ge 830,$
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1153.$

Эта и последующие ЗЛП были решены при помощи сервиса «поиск решения», являющегося надстройкой программы excel.

Решение данной задачи имеет вид (229,5, 151, 316, 399, 57,5), $t_1=57{,}5$. При подстановке найденного решения в ограничения получаем, что минимальная переплата $t_1$ имеет место для коалиций $\{5\},\{4,\ 5\},\{1,\ 2,\ 3\}$. Заметим, что коалиции $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{4,\ 5\}$ являются взаимодополняющими и увеличение выплаты в одной и них приведет к уменьшению в другой, поэтому фиксируем величины выплат по этим коалициям, удаляем соответствующие ограничения неравенства, вводим дополнительное равенство $x_1+x_2+x_3=696{,}5$ (введение этого равенства автоматически фиксирует выплату и по коалиции $\{4,\ 5\}$) и решаем полученную ЗЛП. Решение второй ЗЛП имеет вид $\left(193\frac{1}{3},\ 259\frac{1}{3},\ 243\frac{5}{6},\ 187\frac{1}{6},\ 269\frac{1}{3}\right)$, $t_2=129\frac{2}{3}$. При подстановке найденного решения в ограничения видим, что минимальная переплата $t_2$ имеет место для коалиций $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Рассмотрим тройку коалиций $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Сумма выплат по трем коалициям фиксирована и равна $2W(N)$. Следовательно, увеличение выплаты по любой из трех коалиций неизбежно приведет к ее уменьшению по какой-либо из остальных, поэтому величины выплат $x_1+x_2,\ x_1+x_3+x_4+x_5,\ x_2+x_3+x_4+x_5$ должны быть зафиксированы. Поскольку величина $x_4+x_5$ была фиксирована на предыдущем шаге, фиксированными являются суммы $x_1+x_2,\ x_1+x_3, x_2+x_3$. Значит, фиксированными являются сами значения $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Фиксируя значения $x_1=193\frac{1}{3},\ x_2=259\frac{1}{3},\ x_3=243\frac{5}{6}$ и отбрасывая ограничения, соответствующие коалициям $\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 3\},\ \{2,\ 3\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 4,\ 5\},\ \{3,\ 4,\ 5\},$ $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, перейдем к третьей задаче. Ее решение имеет вид $\left(193\frac{1}{3},\ 259\frac{1}{3},\ 243\frac{5}{6},\ 257,\ 199\frac{1}{2}\right)$, $t_3=199\frac{1}{2}$.

При подстановке найденного решения в ограничения получаем, что минимальная переплата $t_3$ имеет место для коалиций $\{5\},\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. Поскольку это пара взаимодополняющих коалиций, сумма выплат по каждой из них фиксирована; следовательно, фиксированы значения переменных $x_4, x_5$. Таким образом, уже фиксированы все переменные, поэтому решение третьей ЗЛП является *n*-ядром. Округлив значения до целых, получим nucl = (193, 259, 244, 257, 200).

Задача нахождения nucleolus per capita также решается как последовательность ЗЛП, где первая задача выглядит следующим образом:

$$t\to\max,$$
$$\left(\sum_{i\in S}x_i-W(S)\ge|S|\cdot t\right)\left(\forall S\subset N, S\ne N\right),$$
$$\sum_{i\in N}x_i=W(N),\ x_i\ge 0.$$

$t\to\max$
$x_1-t\ge 0,\ x_2-t\ge 0,\ x_3-t\ge 0,\ x_4-t\ge 0,\ x_5-t\ge 0,\ t\ge 0,\ x_1+x_2-2t\ge 323,$
$x_1+x_3-2t\ge 180,\ x_1+x_4-2t\ge 0,\ x_1+x_5-2t\ge 0,\ x_2+x_3-2t\ge 316,\ x_2+x_4-2t\ge 13,$
$x_2+x_5-2t\ge 0,\ x_3+x_4-2t\ge 115,\ x_3+x_5-2t\ge 0,\ x_4+x_5-2t\ge 399,\ x_1+x_2+x_3-3t\ge 639,$

$$x_1+x_2+x_4-3t\ge 336,\ x_1+x_2+x_5-3t\ge 323,\ x_1+x_3+x_4-3t\ge 365,\ x_1+x_3+x_5-3t\ge 250,$$
$$x_1+x_4+x_5-3t\ge 399,\ x_2+x_3+x_4-3t\ge 437,\ x_2+x_3+x_5-3t\ge 316,\ x_2+x_4+x_5-3t\ge 412,$$
$$x_3+x_4+x_5-3t\ge 514,\ x_1+x_2+x_3+x_4-4t\ge 754,\ x_1+x_2+x_3+x_5-4t\ge 639,$$
$$x_1+x_2+x_4+x_5-4t\ge 735,\ x_1+x_3+x_4+x_5-4t\ge 764,\ x_2+x_3+x_4+x_5-4t\ge 830,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1153.$$

Решение данной задачи имеет вид (231, 151, 326, 422, 23), $t_1=23$.

При подстановке найденного решения в ограничения получаем, что минимальная переплата $t_1$ имеет место для коалиций $\{5\}$, $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $\{4,\ 5\}$. Заметим, что коалиции $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{4,\ 5\}$ взаимодополняющие, поэтому заменяем неравенства, соответствующие этим коалициям, на равенства и переходим ко второй задаче. Ее решение имеет вид $\left(182\frac{1}{3},\ 248\frac{1}{3},\ 277\frac{1}{3},\ 373\frac{1}{3},\ 71\frac{2}{3}\right)$, $t_2=35\frac{1}{6}$.

При подстановке найденного решения в ограничения получаем, что минимальная переплата $t_2$ имеет место для коалиций $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Заметим, что величины выплат по коалициям $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ и $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$ составляют $W(N)-x_1$, $W(N)-x_2$, $W(N)-x_3$ соответственно. Поскольку величина $x_1+x_2+x_3$ была фиксирована при решении первой задачи, увеличение выплат по одной из трех коалиций неизбежно ведет к уменьшению выплаты по какой-либо другой. Значит, значения $x_1, x_2, x_3$ следует фиксировать. Фиксируя значения $x_1=182\frac{1}{3}$, $x_2=248\frac{1}{3}$, $x_3=277\frac{1}{3}$ и отбрасывая ограничения, соответствующие коалициям $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{1,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 5\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, перейдем к третьей задаче. Ее решение имеет вид $\left(182\frac{1}{3},\ 248\frac{1}{3},\ 277\frac{1}{3},\ 280,\ 165\right)$, $t_3=58\frac{1}{2}$.

При подстановке найденного решения в ограничения получаем, что минимальная переплата $t_3$ имеет место для коалиций $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$. Поскольку величины $x_1, x_2, x_3$ были фиксированы ранее, сумма выплат по данной паре коалиций фиксирована. Поэтому следует зафиксировать $x_4, x_5$. Значит, найденное решение третьей ЗЛП является искомым вектором nucleolus per capita.

Вычитая векторы экономии из вектора затрат городов при радиальных маршрутах (576, 394, 596, 706, 556), получим три способа распределения затрат в кольцевом маршруте, включающем все города: Sh=(377, 153, 347, 444, 354), nucl=(383, 135, 352, 449, 356), npc=(394, 146, 319, 426, 390).

Для наглядности полученные результаты представим в табл. 3.

Таблица 3

| | Витебск | Могилев | Гомель | Брест | Гродно |
|---|---|---|---|---|---|
| Sh | 377 | 153 | 347 | 444 | 354 |
| nucl | 383 | 135 | 352 | 449 | 356 |
| npc | 394 | 146 | 319 | 426 | 390 |

**Заключение**

Рассмотренный пример демонстрирует три способа распределения транспортных затрат. Каждый из способов является справедливым в определенном смысле и имеет свои преимущества и недостатки, а определить абсолютную справедливость распределения в данном случае не представляется возможным. К достоинствам распределения затрат по Шепли следует отнести простоту вычисления, к недостаткам – то, что ВШ может не принадлежать ядру, и таким образом в общем случае среди игроков, недовольных распределением, могут возникать сепаратистские тенденции, приводящие к развалу гранд-коалиции. Распределения затрат на основе nucleolus и nucleolus per capita вычисляются гораздо сложнее, зато найденный вектор распределения затрат всегда принадлежит ядру, если только ядро распределения непусто.

**Список литературы**


1. Schmeidler, D. The nucleolus of a charecteristic function game / D. Schmeidler // SIAM J. on Applied Mathematics. – 1969. – Vol. 17, no. 6. – P. 1163–1170.
2. Grotte, J.H. Computation of and observation on the nucleolus and central games / J.H. Grotte // M. Sc. Thesis. – N. Y. : Cornell university, 1970.
3. Moulin, H. Axioms of cooperative decision making / H. Moulin. – Cambridge university press, 1988.
4. Curiel, I. Cooperative game theory and applications / I. Curiel. – Springer US, 1997. – Vol. 16. – 194 p.


**Поступила 19.01.2017**

*Киевский национальный университет*
*им. Тараса Шевченко,*
*Киев, пр. Глушкова, 4Д*
*e-mail: sergei204@ukr.net*

**S.I. Dotsenko**

**ON COSTS ALLOCATION AT CIRCULAR ROUTE CONVEYING**

An applied problem of finding an optimal distribution of benefits among members of some cooperative transportation of goods is considered. The theory of cooperative games as a basic model is used and some concepts of this theory are discussed . The notions of the Shapley vector, the nucleolus and the nucleolus per capita are applied to describe optimal vectors of payoffs and value vectors. The algorithms for constructing these vectors are proposed, and all optimal value vectors for the proposed problem are found.