

УДК 004.942:519.711.2:62.50

В.В. Ткаченко

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КОРНЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ МНОГОСВЯЗНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

*В рамках общей теории корневых траекторий рассматривается машинно ориентированный метод исследования систем управления с варьируемыми параметрами, которые входят в коэффициенты характеристического уравнения системы в виде сомножителей с произвольными показателями степени. Возможности метода демонстрируются на примере построения проекций областей устойчивости в плоскости варьируемых параметров двухканальной импульсной системы с перекрестными связями.*

### Введение

Система уравнений, описывающая многомерную систему управления с линейными стационарными звеньями или систему многосвязного регулирования (СМР), в матричной форме имеет вид [1]

$$C(p)y = B(p)u + D(p)f, \quad (1)$$

где  $y$ ,  $u$ ,  $f$  – матрицы-столбцы соответственно для векторов выходных величин, задающих и возмущающих воздействий;  $C(p)$ ,  $B(p)$ ,  $D(p)$  – постоянные вещественные матрицы размерностью  $n \times n$ ;  $p$  – оператор дифференцирования.

Основными задачами при исследовании систем управления являются проверки условий устойчивости и соответствия показателей качества заданным требованиям к переходным процессам. Для асимптотической устойчивости линейной системы по А.М. Ляпунову необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения были расположены слева от мнимой оси на комплексной плоскости корней. Область расположения корней в левой части полуплоскости, ограниченной линиями заданной степени устойчивости и заданной колебательности, определяет качество системы, оцениваемое временем регулирования и перерегулированием переходного процесса [2]. Условия устойчивости СМР формулируются аналогично случаю системы с одной регулируемой величиной и анализируются с использованием характеристического уравнения обобщенной передаточной функции СМР (1). При отсутствии возмущающих воздействий обобщенный характеристический полином СМР записывается как определитель матрицы  $C(p)$  [2].

Характеристическое уравнение СМР в общем случае может содержать функциональные и связанные свободные параметры. В частности, при наличии перекрестных связей между каналами двухмерной системы ее характеристическое уравнение содержит варьируемый квадратичный параметр. В известных работах к такому случаю сводятся задачи, в которых возможно установление функциональной зависимости между варьируемыми параметрами, и задачи, в которых контуры основных каналов управления СМР имеют одинаковые передаточные функции [2–6].

### 1. Общее решение задачи нахождения границ области устойчивости в плоскости варьируемых параметров

В общей теории корневых траекторий Г.В. Римским [2, 7] обоснован принцип функциональной параметризации и разработаны методы для исследования устойчивости систем управления, которые дают возможность находить уравнения функциональных корневых траекторий, образуемых с помощью многозначных функций отображения для уравнений вида

$$\sum_{i=0}^n A_i(p)K^{n-i} = 0, \quad (2)$$

где  $K$  – действительная величина варьируемого параметра;  $A_i(p) = \sum_{r=0}^l a_{ir} p^{l-r}$  – полиномы с постоянными коэффициентами  $a_{ir}$  [7].

Методы, разработанные в рамках общей теории корневых траекторий, позволяют решать широкий круг задач: анализ устойчивости линейных стационарных и нестационарных систем, параметрический синтез линейных и нелинейных многомерных систем, исследование импульсных систем, а также систем с запаздыванием и с распределенными параметрами. На основе этих методов разработаны пакеты прикладных программ [7], использование которых позволяет автоматизировать процесс аналитических преобразований и численных расчетов, сохраняя при этом приемлемую точность и обеспечивая наглядность для проектировщика благодаря графическому представлению результатов расчета. В частности, задача исследования системы с произвольным числом свободных параметров может быть сведена к построению проекций многомерной области устойчивости на плоскости двух параметров, т. е. к построению диаграмм Вышнеградского.

Рассмотрим задачу построения области устойчивости СМР в пространстве ее варьируемых параметров.

Пусть СМР имеет характеристическое уравнение вида

$$f(p) = \sum_{k=0}^m C_2^{m-k} \left( \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} A_{ik}(p) \right) = 0, \quad (3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – варьируемые параметры;  $A_{ik}(p)$  – полиномы произвольного порядка с постоянными коэффициентами  $a_{ikr}$  от комплексной переменной  $p = \delta + j\omega$ .

Принцип последовательных преобразований плоскостей свободных параметров определяет прямую процедуру решения задачи построения заданных областей в пространстве коэффициентов алгебраического уравнения и пространстве его корней [2]. В общей теории корневых траекторий доказано, что результатные уравнения корневого годографа Теодорчика – Эванса, построенные с помощью уравнений годографа и его параметра, инвариантны относительно коэффициентных функций отображения. Методами понижения степени полиномов и построения результатных миноров достигаются упрощение и машинная реализация процедуры. Для вывода формул, по которым могут быть вычислены соответствующие заданным положениям полюсов на комплексной плоскости значения параметров  $C_1$  и  $C_2$ , построим модифицированные результаты. Элементами результатов являются полиномы, составленные из мнимых и действительных частей исходного полинома  $f(p)$  [2, 7]. Результаты приравняем к нулю:

$$\text{Rez}_{C_2} f(p) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{i0}(p) & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{i1}(p) & \cdots & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{im}(p) & \cdots & 0 & \cdots \\ \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{i0}(p) & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{i1}(p) & \cdots & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{im}(p) & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{i0}(p) & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{i1}(p) & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{i0}(p) & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{i1}(p) & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{ik}(p) & \cdots & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Im}A_{im}(p) \\ \cdots & 0 & \cdots & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{ik}(p) & \cdots & \sum_{i=0}^n C_1^{n-i} \text{Re}A_{im}(p) \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Аналогичный вид имеет результат  $\text{Rez}_{C_1} f(p)$ , но с размерностью  $2n$ . При задании фиксированного вещественного  $C_1$  формула (4) определяет траектории корней одного из корневых годографов алгебраического уравнения (1), а при дискретном задании – семейство траекторий, называемое обобщенным корневым годографом.

При  $n = m = 1$  точки корневого годографа принадлежат действительной оси и траектории, задаваемой уравнением (аргумент  $p$  для упрощения записи полиномов далее опущен)

$$\text{Rez}_{C_2} f = \begin{vmatrix} \text{Im}(A_{00} + C_1 A_{10}) & \text{Im}(A_{01}(p) + C_1 A_{11}) \\ \text{Re}(A_{00} + C_1 A_{10}) & \text{Re}(A_{01}(p) + C_1 A_{11}) \end{vmatrix} = 0.$$

Значения  $C_1$  ( $C_2$ ) в заданной точке годографа находятся как решения квадратного уравнения

$$\begin{aligned} & \text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01} - \text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01} + (\text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01} + \text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01}) C_1 - \\ & - (\text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01} + \text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01}) C_1 + (\text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01} - \text{Im}A_{00} \text{Re}A_{01}) C_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. Оценка устойчивости импульсной СМР на примере двухканальной системы стабилизации амплитуды и нейтрали вынужденных колебаний

В качестве примера рассмотрим двухканальную СМР для стабилизации амплитуды и нейтрали вынужденных колебаний  $V(t) = V_m(t)\sin(2\pi t/T) + V_0(t)$  электромеханического вибратора вблизи его резонансной частоты. На привод виброэлемента этой системы (рис. 1) от генератора подается синусоидальный сигнал основной частоты ( $1/T$ ). Амплитуда и среднее значение (постоянная составляющая) возбуждающего воздействия регулируются по результату сравнения временных интервалов реверса выходного сигнала, которые фиксируются с помощью концевых датчиков, расположенных вблизи крайних точек  $V_1$  и  $V_2$  линии колебаний.

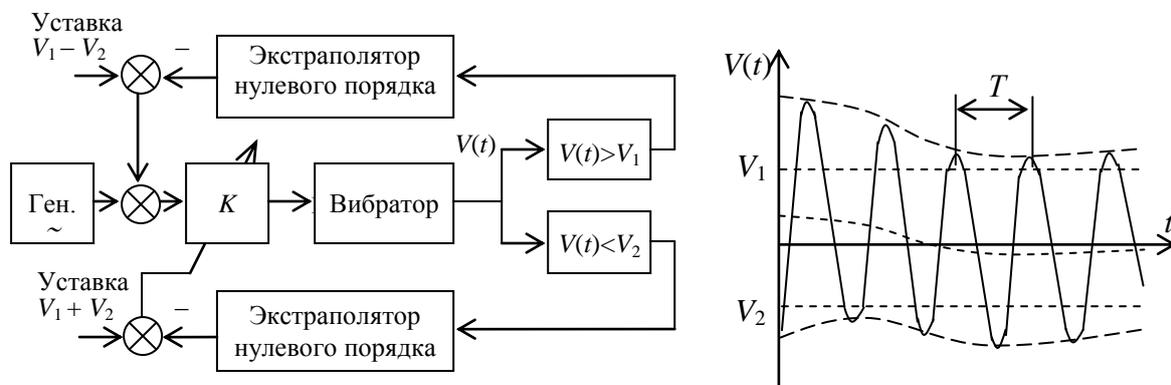


Рис. 1. Система стабилизации амплитуды и нейтрали вынужденных колебаний

Увеличение длительности интервалов реверса означает увеличение размаха колебаний в соответствующем полупериоде. Экстраполяторы, подключенные к концевым датчикам, преобразуют временные интервалы в напряжения, которые с соответствующими знаками сравниваются с уставками по амплитуде и нейтрали. Результаты сравнения подаются на входы умножителя и сумматора, через которые проходит сигнал возбуждения колебаний. В данном примере по сигналу первого из датчиков обеспечивается изменение амплитуды колебаний  $V_m(t)$ , а по сигналу второго – средней точки (нейтрали) колебаний  $V_0(t)$ . В практической реализации могут быть использованы другие варианты вычисления ошибок стабилизации амплитуды и нейтрали, в том числе интегральных и дифференциальных.

Рассматриваемый регулятор является системой с перекрестными связями на переменном токе (рис. 2). Как известно [1–3], в характеристических уравнениях таких систем возможно появление полюсов, не содержащихся по отдельности в каждом из основных контуров управле-

ния. Это накладывает дополнительные ограничения на выбор параметров для устойчивой работы системы. Кроме того, датчики регулятора, выполняя пороговые функции, придают системе существенно нелинейные свойства и усложняют ее анализ. Принимая во внимание, что фиксация текущих значений  $V_M(t)$  и  $V_0(t)$  осуществляется с определенным периодом вынуждаемых колебаний, процедуру линеаризации заменим переходом к рассмотрению двухсвязного регулятора в классе линейных импульсных систем с использованием дискретного преобразования Лапласа и подстановки  $z = e^{pT}$ .

Для оценки устойчивости режима стабилизации построим расчетную схему импульсной системы (рис. 2) и воспользуемся модифицированным  $z$ -преобразованием. Такое представление позволяет учесть тот факт, что такты квантования для положительных и отрицательных полувольт сдвинуты относительно друг друга на полупериод, а введение звена запаздывания  $z^{-1} = e^{-pT}$  в один из каналов связи позволяет продемонстрировать возможность учета задержки вычисления ошибки рассогласования. Для оценки устойчивости в малом (при малых возмущающих воздействиях в режиме стабилизации) нелинейное преобразование интервалов реверса в каждой из полувольт колебаний в амплитуду и среднюю составляющую сигнала возбуждения можно представить в данном случае линейным звеном усиления с коэффициентами  $c_1$  и  $c_2$ . Эти коэффициенты являются свободными параметрами при определении области устойчивости.

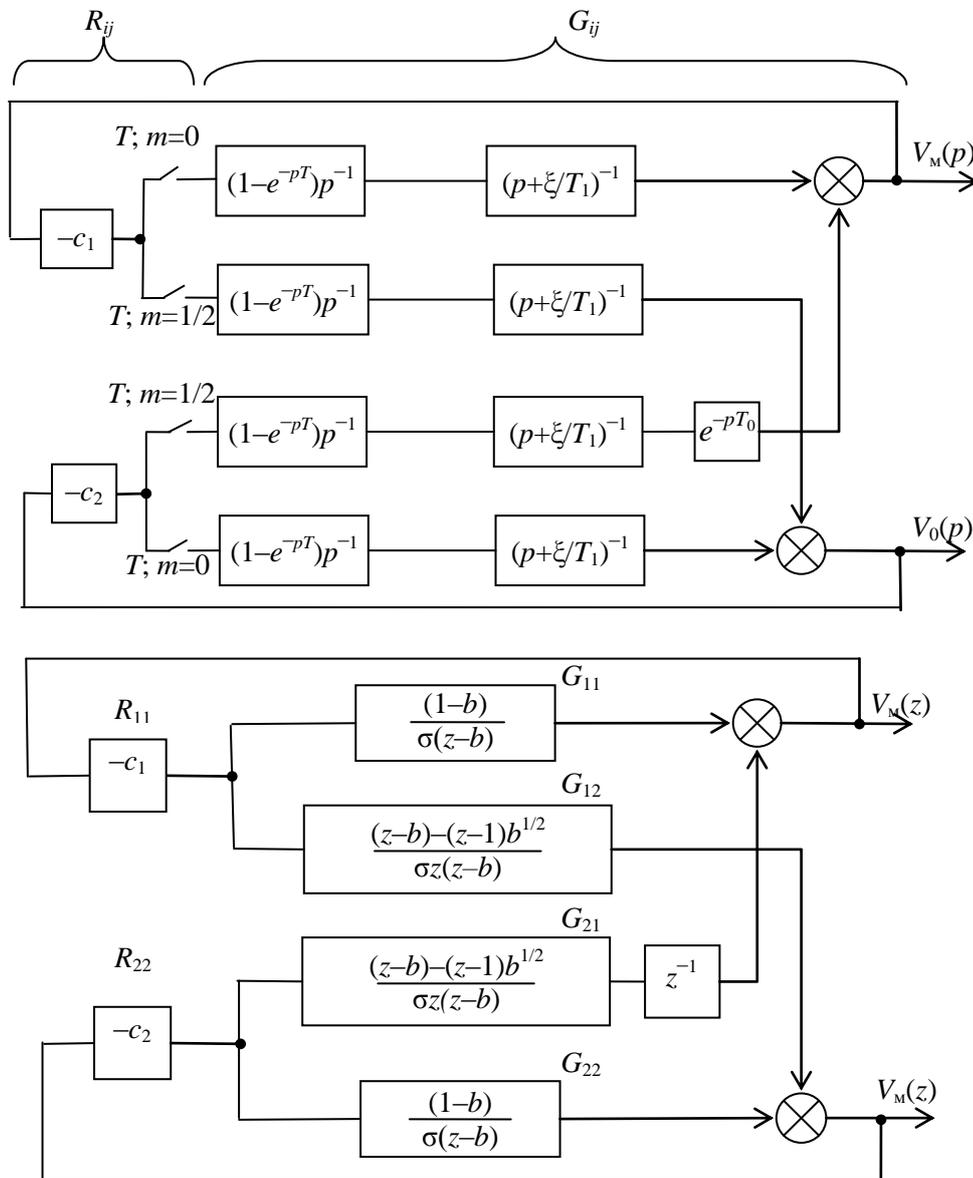


Рис. 2. Расчетная схема двухсвязной системы стабилизации колебаний

Для объекта, представляющего собой колебательное звено, его передаточные функции модулирующих сигналов на несущей частоте вблизи частотного резонанса в каждом из каналов СМР можно записать в виде передаточной функции аperiodического звена:

$$W(p) = K_0/T_1(p + \zeta/T_1), \quad (6)$$

где  $K_0$ ,  $T_1$ ,  $\zeta$  – коэффициент усиления, постоянная времени и коэффициент затухания колебательного звена соответственно.

Используя формулы передаточных звеньев, приведенные на рис. 2, запишем характеристическое уравнение системы при отсутствии возмущающих воздействий:

$$[1 + G_{11}R_{11}][1 + G_{22}R_{22}] - G_{12}R_{11}G_{21}R_{22} = 0, \quad (7)$$

где  $G$  и  $R$  – коэффициенты связи для объекта и главного регулятора при  $K_0/T_1 = 1$ .

Подставляя вместо  $G$  и  $R$  передаточные функции звеньев, показанные на структурной схеме СМР в варианте ее дискретной модели (см. рис. 2), получим в левой части (7)

$$\left[1 + \frac{c_1(1-b)}{\sigma(z-b)}\right] \left[1 + \frac{c_2(1-b)}{\sigma(z-b)}\right] + \frac{c_1c_2[z-b-(z-1)\sqrt{b}]^2}{\sigma^2z^3(z-b)^2}, \quad (8)$$

где  $b = \exp(\sigma T)$ ;  $\sigma = \zeta/T_1$ ;  $T$  – период коммутации.

После приведения уравнения (7) к виду (3) получим

$$\Phi(z) + (c_1 + c_2)\Psi(z) + c_1c_2\Theta(z) = 0, \quad (9)$$

где  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Theta$  – полиномы:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sigma^2z^3(z-b)^2; \Psi(z) = (1-b)\sigma z^3(z-b), \\ \Theta(z) &= z^3(1-b)^2 + (z + \sqrt{b})^2(1-\sqrt{b})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя корневую методику, построим результаты

$$\operatorname{Re}z_{c_2} = \begin{bmatrix} \Phi_R + c_1\Psi_R & \Psi_R + c_1\Theta_R \\ \Phi_I + c_1\Psi_I & \Psi_I + c_1\Theta_I \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Re}z_{c_1} = \begin{bmatrix} \Phi_R + c_2\Psi_R & \Psi_R + c_2\Theta_R \\ \Phi_I + c_2\Psi_I & \Psi_I + c_2\Theta_I \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где индексы  $I$  и  $R$  соответствуют мнимым и действительным частям полиномов, и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \Phi_I\Psi_R - \Phi_R\Psi_I + c_1(\Phi_I\Theta_R - \Phi_R\Theta_I) + c_1^2(\Psi_I\Theta_R - \Psi_R\Theta_I) &= 0; \\ \Phi_I\Psi_R - \Phi_R\Psi_I + c_2(\Phi_I\Theta_R - \Phi_R\Theta_I) + c_2^2(\Psi_I\Theta_R - \Psi_R\Theta_I) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что благодаря совпадению передаточных функций главных каналов СМР частных полиномов в формулах (12) меньше, чем в (5). Для определения границ области устойчивости системы в пространстве параметров  $c_1$  и  $c_2$  перепишем характеристическое уравнение (9) в каноническом виде:

$$A(z) = \sum_{r=0}^l a_r z^{l-r}. \quad (13)$$

Согласно (10)  $l = 5$ . Коэффициенты  $a_r$  получаем суммированием коэффициентов из (9) и (10), стоящих перед  $z^{l-r}$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \sigma^2; \\ a_1 &= (1 - b)\sigma(c_1 + c_2) - 2b\sigma^2; \\ a_2 &= b^2\sigma^2 - (1 - b)b\sigma(c_1 + c_2) + (1 - b)^2c_1c_2; \\ a_3 &= (1 - b^{1/2})^2c_1c_2; \\ a_4 &= 2b^{1/2}(1 - b^{1/2})^2c_1c_2; \\ a_5 &= b(1 - b^{1/2})^2c_1c_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Импульсная система устойчива, если корни ее характеристического уравнения на плоскости  $z = \delta + j\omega$  лежат в пределах круга единичного радиуса. Прямому решению (13) совместно с условием  $|z| = (\delta^2 + \omega^2) = 1$  сопутствуют вычислительные трудности. Пользуясь подстановкой  $z^4 = z^2 = 1$ , можно сразу понизить порядок (13):

$$z(a_0 + a_2 + a_4) + a_1 + a_3 + a_5 = zH + G = 0, \tag{15}$$

после чего сделать подстановку  $z = (\omega^* + 1)/(\omega^* - 1)$ , позволяющую с помощью билинейного преобразования отобразить круг единичного радиуса на левую половину плоскости  $\omega^* = \omega_R^* + j\omega_I^*$ , и воспользоваться результатным методом для определения границы области устойчивости в плоскости варьируемых коэффициентов.

После подстановки имеем:

$$(\omega^* + 1)H + (\omega^* - 1)G = (\omega^* + 1)(a_0 + a_2 + a_4) + (\omega^* - 1)(a_1 + a_3 + a_5) = 0, \tag{16}$$

Из равенства

$$\operatorname{Re} z = \begin{vmatrix} H+G & H-G \\ H+G & 0 \end{vmatrix} = H^2 - G^2 = 0$$

следуют уравнения  $(a_0 + a_2 + a_4) = \pm(a_1 + a_3 + a_5)$ . Подставляя в них выражения коэффициентов (14), получим уравнения кривых

$$\begin{aligned} \sigma^2 - ((1 - b)/(1 + b))\sigma(c_1 + c_2) + ((1 - b)^2/(1 + b)^2 + (1 - b^{1/2})^4/(1 + b)^2) c_1c_2 &= 0, \\ \sigma^2 - \sigma(c_1 + c_2) + 2c_1c_2 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (17) связывают значения  $c_1$  и  $c_2$ , при которых некоторые корни полинома (13) располагаются на окружности единичного радиуса. Область устойчивости в плоскости свободных параметров определяется выбором пары значений варьируемых параметров в пределах каждой из ограниченных ветвями кривых (17) областей и проверкой принадлежности при этих значениях всех корней уравнения (14) внутренней части плоскости частот, ограниченной окружностью единичного радиуса. При установленной взаимосвязи коэффициентов  $a_r$  (14) для данного примера СМР таких областей не существует, иными словами, система неустойчива. Вывод подтверждается проверкой необходимых условий устойчивости дискретной системы по критерию Шура – Кона:

$$A(1) > 0; (-1)^l A(-1) > 0,$$

которые не выполняются для тех же диапазонов варьируемых параметров (13)  $b$ ,  $c_1$  и  $c_2$ .

В практической работе выполнять аналитические преобразования (13)–(17) не требуется, так как необходимые графики получаются в результате численных решений уравнений (5). Коэффициенты таких уравнений определяются по численным расчетам из формул полиномов,

которые представляются в символьной форме с применением метода многомерных коммутативных преобразований [7, 8]. Формулы (17) дают функциональное описание построенных границ в пространстве параметров, при переходе через которые изменение варьируемых параметров приводит к миграции корней через границу устойчивости. Соответствующие им кривые представляют собой гиперболы, повернутые так, что их оси направлены под углом  $45^\circ$  относительно координатных осей плоскости ( $c_1; c_2$ ), а асимптоты каждой из гипербол смещены от координатных осей на некоторое расстояние. Порядок их получения демонстрирует необходимость выбора проектировщиком в каждом конкретном случае решаемой задачи последовательности действий с привлечением того набора методов, которыми располагает общая теория корневых траекторий и которые позволяют автоматизировать процесс создания их математических или компьютерных описаний. С помощью программных модулей осуществляются не только численные расчеты, но и предваряющие их необходимые аналитические преобразования над полиномами, что снимает проблемы достижения необходимой точности расчетов. Корневая методика позволяет также строить области заданного качества регулирования путем задания связи  $f(\delta; \omega)$ , например, при заданных требованиях к степени устойчивости и колебательности.

### Заключение

С целью развития методов исследования многосвязных систем регулирования на основе общей теории корневых траекторий было рассмотрено построение плоских проекций областей их устойчивости в пространстве варьируемых параметров с использованием результата характеристического полинома анализируемой системы. Коэффициенты характеристического полинома могут содержать варьируемые параметры в виде сомножителей с произвольными показателями степени, что позволяет расширить круг задач для автоматизированного проектирования многоканальных или многомерных систем управления с перекрестными связями, таких как обеспечение устойчивости полета беспилотного аппарата или создание многосвязного робота с заданными требованиями по точности и времени выполнения движений.

Преимуществами рассматриваемого метода являются возможности:

- аналитического вывода уравнений проекций областей на плоскости свободных параметров, которые входят в характеристическое уравнение в виде сомножителей не только с первой, но и с любыми показателями степени (следовательно, возможности анализа многомерных систем с перекрестными связями);
- использования исходного уравнения в форме, не требующей приведения к каноническому виду, т. е. в той форме, в которой оно получается непосредственно из структурной схемы системы по передаточным функциям;
- вывода уравнений проекций машинным способом с использованием метода многомерных коммутативных преобразований [6, 7].

На примере двухсвязной системы с перекрестными связями, с помощью которой решается задача стабилизации амплитуды и нейтрали вынужденных колебаний объекта в зоне его резонансной частоты, продемонстрированы возможности применения корневого метода для перехода от исследования непрерывных систем к импульсным многосвязным системам с использованием операторного  $z$ -преобразования, понижения порядка анализируемого полинома и упрощения процедуры построения границ областей устойчивости в плоскости варьируемых коэффициентов.

### Список литературы

1. Неймарк, Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы / Ю.И. Неймарк. – М. : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 336 с.
2. Римский, Г.В. Основы общей теории корневых траекторий систем автоматического управления / Г.В. Римский. – Минск : Наука и техника, 1972. – 328 с.
3. Gasparyan, O.N. Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach / O. N. Gasparyan. – England : John Wiley & Sons. Ltd, 2008. – 341 p.

4. Ильясов, Б.Г. Управление неустойчивыми объектами в составе многосвязной автоматической системы / Б.Г. Ильясов, Г.А. Сайтова, Е.А. Халикова // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1 (часть 2).

5. Ильясов, Б.Г. Алгоритм реконфигурации структуры многосвязной системы автоматического управления из условия устойчивости на основе частотных методов / Б.Г. Ильясов, Г.А. Сайтова, А.Ш. Назаров // Вестник УГАТУ. – 2012. – Т. 16, № 3(48). – С. 3–10.

6. Stengel, R. Singular Value Analysis of Linear Quadratic Systems / R. Stengel // Optimal Control and Estimation MAE 546 / Princeton University. – 2015. – 46 p. [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.princeton.edu/~stengel/MAE546Seminar14.pdf>. – Date of access : 04.09.2016.

7. Римский, Г.В. Автоматизация исследований динамических систем / Г.В. Римский, В.В. Таборовец. – Минск : Наука и техника, 1978. – 330 с.

8. Корневые методы исследования интервальных систем / под ред. Г.В. Римского. – Минск : Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. – 186 с.

Поступила 31.10.2016

*Объединенный институт проблем  
информатики НАН Беларуси,  
Минск, Сурганова, 6  
e-mail: tkach@newman.bas-net.by*

**V.V. Tkachenko**

**THE APPLICATION OF GENERAL THEORY OF ROOT  
TRAJECTORIES METHODS IN RESEARCH OF MULTI-CHANNEL  
CONTROL SYSTEM WITH CROSS-CONNECTIONS**

Computer aided research method on the basis of general theory of root trajectories is considered in the frame of study of multi-channel control systems with varying parameters included as cofactors with arbitrary exponents in coefficients of the characteristic equation of the system. Possibilities of the method are demonstrated on the example of constructing stability regions projections on the plane of varying parameters of dual-channel pulse system with cross-connections.